

## ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ НА ДИНАМИКУ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН С ДВУСТОРОННИМ ПРИВОДОМ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Санкт-Петербургский государственный университет  
промышленных технологий и дизайна, Россия

[vujo@ramler.ru](mailto:vujo@ramler.ru)

***Аннотация.** В статье приведены результаты исследования частотных характеристик и вынужденных колебаний в технологических машинах с цикловыми механизмами и со сдвоенным электроприводом. В развитие предыдущих работ применительно к одностороннему приводу установлено, что при часто применяемом в инженерной практике упрощенном моделировании без учета инерционных характеристик электродвигателя возможны существенные ошибки при определении резонансных частот. Для рассматриваемого класса динамических систем предложены новые динамические модели. Разработана методика инженерных расчетов, базирующаяся на применении матриц перехода. Выявлен ряд особенностей, вызванных большой эквивалентной податливостью электродвигателя.*

***Ключевые слова:** динамика, электродвигатель, цикловые машины, колебания.*

## INFLUENCE OF ELECTRIC MOTOR ON DYNAMICS OF TECHNOLOGICAL MACHINES WITH BILATERAL DRIVE

Iosif I. Vulfson

Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design, Russia

[vujo@ramler.ru](mailto:vujo@ramler.ru)

***Abstract.** The results of the investigation of frequency characteristics and forced oscillations in technological machines with cyclic mechanisms and with bilateral electric drive are presented in the article. In the development of previous works devoted to analysis with respect to a single-sided drive, it is established that with the simplified modeling, that often used in engineering practice without taking into account the inertial characteristics of the electric motor, the significant errors in determining the resonant frequencies are possible. For this class of dynamical systems under consideration, new dynamic models are proposed. A technique of engineering calculations based on the application of transition matrices is developed. A number of features caused by a large equivalent compliance of the electric motor are revealed.*

***Keywords:** dynamics, bilateral electric drive, cyclic machines; vibrations.*

**Введение.** Анализ машинного агрегата с учетом динамической характеристики электродвигателя освещен во многих статьях и монографиях, в частности [1–12]. В работах [7, 8] установлено, что при часто применяемом в инженерной практике упрощенном моделировании, возможны существенные ошибки при определении резонансных частот и были предложены соответствующие коррективы динамических моделей. В данной статье использованный в предыдущих работах лаконичный инженерный способ исследования данной проблемы, применен к технологическим машинам со сдвоенным электроприводом.

Описание электромагнитных колебательных процессов в двигателях связано с решением достаточно сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Однако применительно к установившимся режимам в инженерной практике хорошо себя зарекомендовали приближенные линеаризованные уравнения, которые для двигателя постоянного тока и асинхронных двигателей имеют вид [1]

$$\Omega_{\text{д}} = \Omega_{\text{до}} [1 - v_{\text{д}} (M_{\text{д}} + \tau \dot{M}_{\text{д}})], \quad (1)$$

где  $M_{\text{д}}$  – момент двигателя;  $v_{\text{д}}$  – коэффициент крутизны статической характеристики;  $\tau$  – электромагнитная постоянная времени;  $\Omega_{\text{до}}$  – угловая скорость идеального холостого хода (т.е. при  $M_{\text{д}} \equiv 0$ ).

Для асинхронных двигателей  $\tau = (2\pi f_c s_k)^{-1}$ ;  $s_k = (1 - \Omega_{\text{д}}^{\text{н}} / \Omega_{\text{до}})(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$ ;  $v_{\text{д}} = s_k / (2M_{\text{д}}^{\text{н}} \xi)$ , где  $s_k$  – критическое скольжение;  $f_c = 50$  Гц – частота сети;  $\xi$  – отношение максимального момента к номинальному  $M_{\text{д}}^{\text{н}}$ . (Исходные данные заимствуются из каталога электродвигателей).

Характеристика электродвигателя (1) соответствует реологической модели Максвелла, в которой ротор соединен со статором посредством «упругого элемента» с коэффициентом жесткости  $c_{\text{д}} = (v_{\text{д}} \Omega_{\text{до}} \tau)^{-1}$  и последовательно включенного демпфера с моментом сопротивления  $b_{\text{д}} \Omega_{\text{д}}$  при  $b_{\text{д}} = (v_{\text{д}} \Omega_{\text{до}})^{-1}$  [5–8].

**Динамические модели.** На рис.1 приведены несколько типовых динамических моделей и их модификации для машинного агрегата со сдвоенным двухсторонним приводом, которые состоят из подсистем двигателей **М** и подсистемы рабочей машины, главный вал который связан с двигателями посредством приводов с передаточным числом  $u_1$ .

В целях удобства изложения приведем условные обозначения, принятые в данном классе задач:  $J_0, J_1, J_2$  – моменты инерции;  $\Pi(\varphi)$  – оператор, соответствующий нелинейной функции положения (см. ниже);  $c, \psi$  – приведенные коэффициенты жесткости и рассеяния привода;  $u_1$  – передаточное отношение редуктора. Для идеального механизма, в котором отсутствуют зазоры и все звенья принимаются абсолютно жесткими,  $\varphi = \varphi_* = \bar{\omega} t$ , где  $\bar{\omega}$  – средняя угловая скорость входного звена. Пусть  $\varphi = \varphi_* + \Delta\varphi$ , где  $\Delta\varphi$  – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях. Принимая во внимание, что функция положения непрерывна и дифференцируема, произведём линеаризацию этой функции в окрестности программного движения:  $\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)q$ , где  $\Pi' = d\Pi / d\varphi$  – первая геометрическая передаточная функция механизма (подробнее см. [9, 12]). Модели кольцевой структуры (рис.1,а) весьма распространены в машинах с повышенной длиной зоны технологического процесса, например, в ряде текстильных и полиграфических машин. Эта модель (см.рис.1,а) может быть приведена к модели цепной структуры (рис.1,в,г), если принять  $J^* = J_1 + J_2 \Pi'^2$ ,  $c^* = c_1 + c_2 \Pi'^2$ .

$$c^* = \tilde{c}_1 (1 + \zeta \Pi'^2), \quad J_1^* = J_2^* = J_1 (1 + \mu \Pi'^2), \quad \text{где } \zeta = c_2 / c_1; \mu = J_2 / J_1; \tilde{c}_1(\delta_1^*) = c_1 (1 + 2i\delta_1^*);$$

$$\delta_1^* = \psi_1^* / (4\pi); \psi^* = \psi_1^* = (\psi_1 c_1 + \psi_2 c_2) / (c_1 + c_2), \quad J_2^* = J_2 = \mu J_1 \quad c^* = \tilde{c}_1(\delta_2^*) / (\Pi'^2 + \zeta^{-1});$$

$$\delta_2^* = \psi_2^* / (4\pi); \psi^* = \psi_2^* = |c^*| (\psi_1 / c_1 + \psi_2 / c_2); \tilde{c}_1(\delta_2^*) - \text{комплексная форма упруго-диссипативного элемента [15].}$$

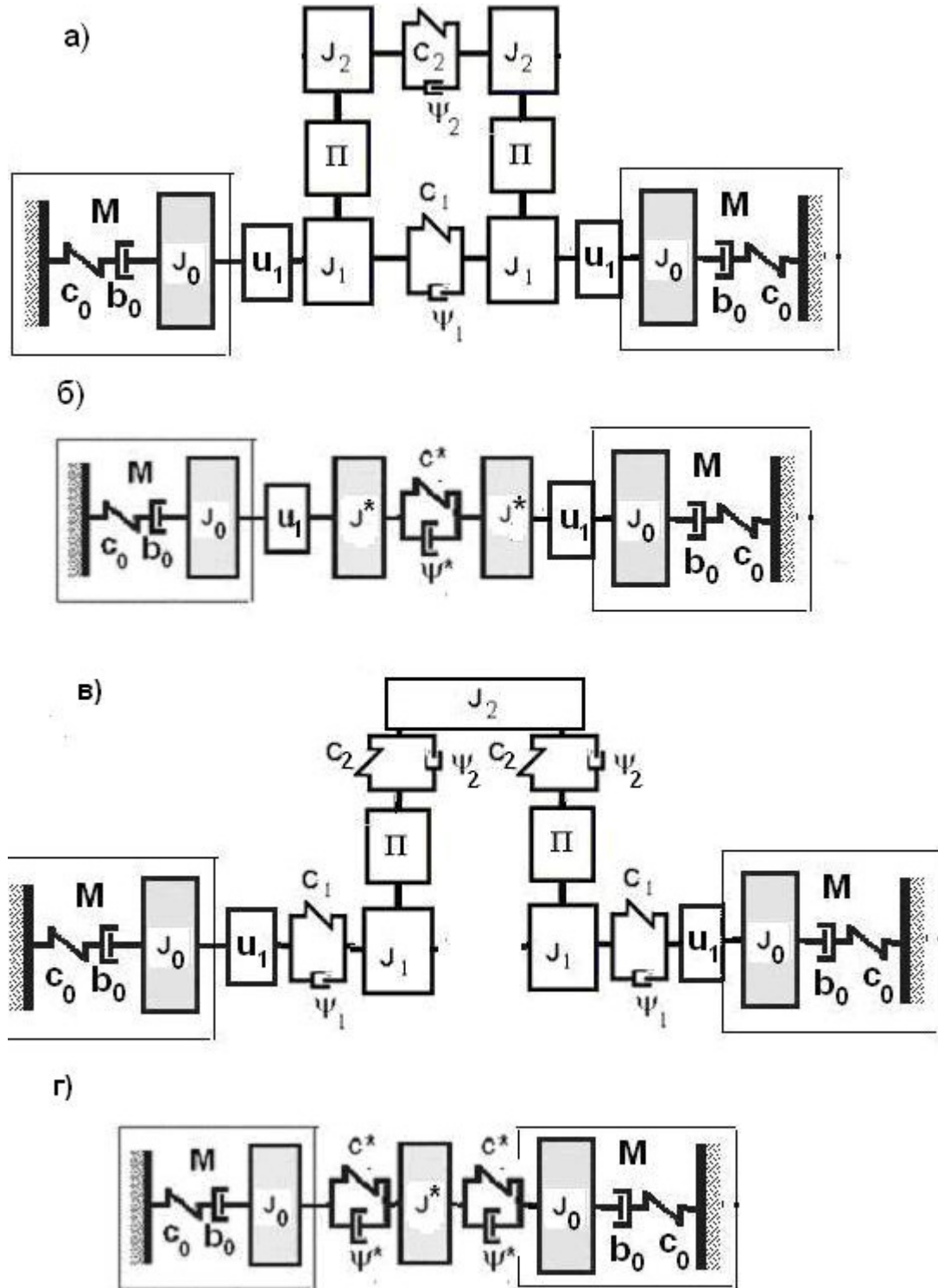


Рис. 1. Типовые динамические модели

Все подсистемы, разумеется, образуют единую систему, расчет которой даже при учете возможностей современной вычислительной техники может вызвать определенные трудности. Это связано не только с большой размерностью системы, но и с большим отличием частотных спектров отдельных подсистем. При этом матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений оказывается близко к вырожденной, что нередко приводит к неустойчивости решений. Хотя известны специальные способы решения подобных так называемых «жестких» систем, в инженерной практике их стремятся

исключить из рассмотрения, что достигается декомпозицией, т. е. расчленением исходной системы на ряд подсистем, которые на рабочем диапазоне частот возбуждения слабо связаны между собой [5 –8]. Заметим, что «жесткие» системы уравнений нередко возникают при гипертрофированной универсальности исходной модели и, как правило, свидетельствует о ее неудачном выборе. Принимая во внимание вышеизложенное, при анализе, и особенно – при динамическом синтезе, конструктор, чтобы избежать возможных ошибок, должен располагать эффективными способами инженерных оценок. Это достигается анализом роли отдельных подсистем в формировании колебательных процессов.

**Динамический анализ.** На первом этапе динамического анализа обычно производят оценку низшей собственной частоты рабочей машины  $p_1$  (или определение динамической жесткости), считая входные сечения главного вала заземленными. При сложной структуре колебательной системы, например, при кольцевой структуре привода исполнительных органов, характерной для многих трикотажных машин, нередко целесообразно использовать континуальную идеализацию, при которой реализуется прием агрегирования системы [9,10,13, 14] .

Второй этап базируется на анализе модифицированной модели, полученной при приведении параметров двигателей к главному валу. Можно показать, что при этом  $c_0 = c_d u_1^2$ ,  $b_0 = b_d u_1^2$ ,  $J_0 = J_d u_1^2$ , а в уравнении (1) следует произвести замену  $\Omega_d = \Omega u_1^{-1}$ ,  $\Omega_{d0} = \Omega_0 u_1^{-1}$ ,  $v_d = v u_1$ ,  $M_d = M_0 u_1^{-1}$ , где  $\Omega$ ,  $\Omega_0$ ,  $M_0$  – соответствующие угловые скорости и движущий момент на главном валу. Далее представим момент инерции рабочей машины как  $J = \bar{J} + \Delta J(\varphi)$ , где  $\varphi = \bar{\omega}t$ ,  $\bar{\omega} = \Omega_d^h u_1^{-1}$  – номинальная угловая скорость главного вала,  $\bar{J}$  – среднее значение приведенного момента инерции. Для одностороннего привода приведенный коэффициент жесткости в первом приближении равен  $c = \bar{J} p_1^2$ , а для двухстороннего –  $c = 0,5 \bar{J} p_1^2$ . Момент, действующий на приводные двигатели, выразим как  $M = M_c + 0,5 \bar{\omega}^2 \Delta J'(\varphi)$ , где  $M_c$  – момент сопротивления,  $( )' = d/d\varphi$ . При этом переменная составляющая этого момента  $\Delta M$  описывается следующим образом:

$$\Delta M = \sum_{j=1}^{\infty} [m_{j1} \sin(j\bar{\omega}t + \alpha_{1j}) + m_{j2} \sin(j\bar{\omega}t + \alpha_{2j})], \quad (2)$$

где  $m_{j1}$ ,  $m_{j2}$  – амплитудные значения гармоники  $j$  момента сопротивления и динамической составляющей.

Для определения амплитудно-частотных характеристик при совместном учете характеристик двигателя и механического привода воспользуемся лаконичным способом, базирующимся на аппарате матриц перехода. Для рассматриваемой цепной системы (см. рис.1,а) матрица перехода имеет вид.

$$\Gamma = \Gamma_M \Gamma_{J0} \Gamma_u \Gamma_{J^*} \Gamma_{c^*} \Gamma_{J^*} \Gamma_u \Gamma_{J0} \Gamma_M \quad (7)$$

Здесь

$$\Gamma_{J^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -J^* \omega^2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{c^*} = \begin{pmatrix} 1 & c^{*-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_u = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_1^{-1} \end{pmatrix}; \quad \Gamma_M = \begin{pmatrix} 1 & c_0^{-1} - i(b_0 \Omega_d)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad i = \sqrt{-1},$$

где  $c^*$  – комплексный коэффициент жесткости (см. выше).

Как следует из правой части уравнения (2), вынуждающий момент, возникающий на рабочем органе, складывается из кинематического возмущения, зависящего от его ускорения при идеальном движении, и силового возмущения от технологических сил и сил сопротивления. Подчеркнем, что особенностью цикловых механизмов является трансформация постоянных составляющих на «входе» в переменные функции на «выходе».

Представим вынуждающий момент, приложенный к выходному звену как  $M = \sum_r M_r \sin(\omega_r t + \alpha_r)$ . На основании (7) имеем

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{M}_{1r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{M}_{mr} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

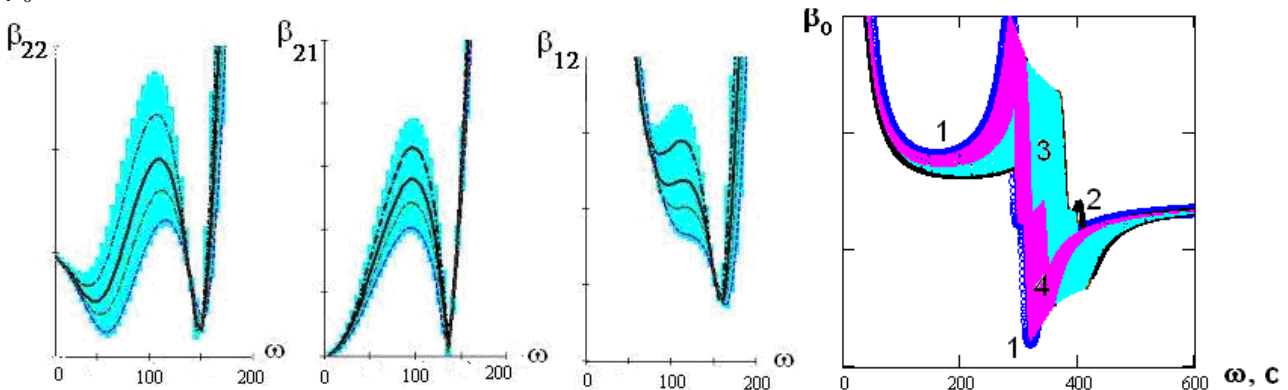
где  $\tilde{g}_{kj}$  – элементы матрицы  $\Gamma$ ;  $\tilde{A}$  – амплитуда выходного звена;  $M_{1r}, \tilde{M}_{mr}$  – амплитуда вынуждающего момента и момента двигателя. Как и выше, волной отмечена комплексная форма функции. (Для упрощения записи ниже индекс  $r$  всюду опущен).

Из (7), (8) следует

$$\tilde{M}_m = \tilde{M}_1 \beta_{22}; \quad \tilde{A} = \tilde{M}_1 \beta_0, \quad (9)$$

где  $\beta_{12}(\omega, \varphi) = |\tilde{g}_{12}|$ ;  $\beta_{22}(\omega, \varphi) = |\tilde{g}_{22}|^{-1}$ ;  $\beta_0(\omega, \varphi) = \beta_{12}(\omega, \varphi) / \beta_{22}(\omega, \varphi)$  (рис.2).

На рис.2 приведены графики функций  $\beta_{jk}$ , экстремумы которых соответствуют резонансам или антирезонансам (см. [3, 4, 5]). Из формул (9) следует, что амплитуда колебаний для рассматриваемой гармоники вынуждающей силы пропорциональна функции  $\beta_0$ , а амплитуда момента двигателя функции –  $\beta_{22}$ . Помимо этих функций здесь принято  $\beta_{21} = |\tilde{g}_{21}|$ . Минимум этой функции соответствует резонансной частоте, когда оба конца системы предполагаются «свободными», т.е. учитываются моменты инерции роторов двигателей, но исключаются из рассмотрения их электромагнитные характеристики, формирующие эквивалентную жесткость. При построении графиков приняты следующие исходные данные:  $\Omega_D^n = \omega / u$ ;  $v_D = 0,003 (\text{Нм})^{-1}$ ;  $\delta = 0,03$ ;  $u_1 = 1$ . (При выборе параметров учтено стремление к наглядности иллюстрируемых эффектов). Обратим внимание на то, что амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна функции  $\beta_0$  только при постоянной амплитуде момента  $M_1$ . При кинематическом возбуждении амплитуда пропорциональна  $\beta_0 \omega^2$ .



**Рис.2.** Графики функций  $\beta_{22}, \beta_{21}, \beta_{12}, \beta_0$ : 1 –  $\varphi = \pi/2$ ;  $\mu = 0,4$ ;  $\zeta = 0$ ;  
2 –  $\varphi = \pi/2$ ;  $\mu = 0$ ;  $\zeta = 0,4$ ; 3 –  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ;  $\mu = \zeta = 0,4$ ; 4 –  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ;  $\mu = 0,4$ ;  $\zeta = 0$

На графиках выделена область изменения этих функций в зависимости от положения входного звена  $\varphi$ . Внутри этой области показано семейство кривых, соответствующих фиксированным значениям угла  $\varphi$ . Низшая резонансная частота четко проявляется в первом минимуме функции  $\beta_{22}$ , который соответствует одностороннему приводу (см. [3, 4, 5]). Если принять во внимание большую «податливость» двигателя ( $c_0 \approx 0$ ), то при двух двигателях сохраняется лишь одна позиционная обобщенная координата, а единственная отличная от нуля переменная «собственная» частота без учета диссипации определяется как

$$p_*(\varphi) = \sqrt{2c_*(\varphi) / [J_0 + J_*(\varphi)]} . \quad (10)$$

Для исходной модели (см. рис.1,а) вторая частота соответствует минимуму функции  $\beta_{12}$  (защемление обоих концов). Отличие результатов, полученных по формуле (10), от значения  $\omega$  при минимуме функции  $\beta_{12}$  обычно не превышают 10%. Это еще раз подтверждает вывод, полученный в работах [7, 8], о том, что использование упрощенной модели при схематизации асинхронного двигателя и двигателя постоянного тока в виде заделки (т.е. игнорирование инерционных характеристик ротора электродвигателя), может привести к существенным ошибкам при определении резонансных частот. Другими словами, система мало отличается от цепной системы со свободными концами *при обязательном учете моментов инерции роторов двигателей*. На этом выводе базируется эффективный способ для оперативного получения инженерных оценок.

Модель, приведенная на рис. 1, в, соответствует случаю, когда в приводе отсутствует распределительный вал. При этом формула (7) при учете некоторых упрощений принимает вид

$$\Gamma = \Gamma_M \Gamma_{J_0} \Gamma_u \Gamma_{J^*} \Gamma_{c^*} \Gamma_{J^*} \Gamma_u \Gamma_{J_0} \Gamma_M . \quad (11)$$

Вопрос об эффективности применения привода с двумя двигателями требует всестороннего анализа с учетом конструктивных особенностей машины и нуждается в отдельном рассмотрении. В целом, отметим, что на характеристики колебательной системы применение двух двигателей обычно влияет мало, что связано с их большой эквивалентной податливостью. Кроме того, следует иметь в виду, что основному резонансу на частоте  $p_*$  отвечает узел колебаний, расположенный в середине рабочего органа, а его концы в окрестности этой частоты колеблются в противофазе. Это может отрицательно проявиться на качестве продукции. Для устранения этого эффекта возможно потребуются другие конструкторские решения при проектировании машины. В частности, может оказаться более эффективным использование для ужесточения системы реализовать двухсторонний привод лишь при одном двигателе посредством установки дополнительного промежуточного вала повышенной жесткости, выполняющего функцию упругой связи между крайними элементами главного вала.

**Заключение.** В работе предложены новые динамические модели динамического расчета машин с двусторонним приводом, на базе которых исследовано взаимовлияние электродвигателя и технологической машины. Разработана методика инженерных расчетов и выявлен ряд особенностей этого класса динамических систем, вызванных большой «эквивалентной податливостью» электродвигателя. Применительно к рассматриваемой проблеме в дальнейшем развитии нуждается анализ влияния двигателя на возбуждение колебаний, при учете, вызванных нелинейных факторов (нелинейные муфты, зазоры, нелинейные диссипативные силы и др.).

## Список литературы

1. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов. - Л.: Машиностроение, 1969. – 370 с.
2. Кононенко В. О. Вопросы теории динамического взаимодействия машины и источника энергии // Изв. АН СССР, МТТ. – 1973. - №4. - С. 19–30.
3. Алифов А. А., Фролов К. В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. – М.: Наука, 1985. – 328 с.
4. Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е. Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
5. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 264 с.
6. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамика машин.– Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с.
7. Вульфсон И. И. К проблеме динамической взаимозависимости электродвигателя и механического привода цикловой машины. // Теория механизмов и машин. – 2016. - Т. 32, №4. – С. 173–182.
8. Вульфсон И. И. О некоторых коррективах при оценке влияния электродвигателя на виброактивность привода технологических машин.// Вестник научно-технического развития. – 2017. - №2 (114). - С. 11–23.
9. Вульфсон И. И. Динамика цикловых машин.– СПб.: Политехника, 2013. – 425 с.
10. Vulfson, I. Dynamics of cyclic machines. (Expanded edition of the monograph [9] translation). – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. – 410 p.
11. Вульфсон И. И. К анализу влияния электропривода на вибрационные характеристики цикловых технологических машин. // Технология текстильной промышленности. – 2007. - № 1С(300). – С. 141 –145.
12. Механика машин: Учебное пособие для втузов /И.И.Вульфсон, М.Л.Ерихов, М.З.Коловский, Э.Е.Пейсах и др.; Под редакцией Г.А.Смирнова.– М.: Высш. шк., 1996.-511 с.
13. Первозванский А.А., Гайцгори В.Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. - М.: Наука, 1979. – 344 с.
14. Банах Л. Я. Методы декомпозиции при исследовании колебаний механических систем.– Ижевск: АНО Ижевский институт компьютерных исследований, 2016.– 291с.
15. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций. – М.: Госстройиздат, 1958. – 325 с.