

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МАГНИТОУПРУГОЙ ВОЛНЫ РИМАНА В СТЕРЖНЕ

© Владимир Иванович Ерофеев^(1,2), Алексей Олегович Мальханов⁽²⁾,
Андрей Борисович Дарьенков⁽¹⁾

⁽¹⁾ Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева

⁽²⁾ Институт проблем машиностроения Российской академии наук, г. Нижний Новгород
erof.vi@yandex.ru

Аннотация. Изучается формирование волны Римана в стержне, находящемся во внешнем магнитном поле. Показано, что время опрокидывания волны зависит от величины внешнего магнитного поля, которое приводит к стабилизации волны.

Ключевые слова: стержень, нелинейность, магнитное поле, волна Римана

FEATURES OF THE FORMATION OF A MAGNETOELASTIC RIEMANN WAVE IN A ROD

© V.I. Erofeev^(1,2), A.O. Malkhanov⁽²⁾, A.B. Dar'enkov⁽¹⁾

⁽¹⁾ R.E. Alekseev Nizhny Novgorod Technical University, Nizhny Novgorod, Russia

⁽²⁾ Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, Russia
erof.vi@yandex.ru

Abstract. The formation of a Riemann wave in a rod located in an external magnetic field is studied. It is shown that the time of wave overturning depends on the magnitude of the external magnetic field, which leads to the stabilization of the wave.

Keywords: rod, nonlinearity, magnetic field, Riemann wave.

Рассмотрим распространение продольных волн в однородном, нелинейно-упругом стержне, находящемся во внешнем магнитном поле.

Внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью H_0 будем считать перпендикулярным направлению распространения волн. Поскольку в результате взаимодействия магнитного поля с полем деформаций появляются малые возмущения, то результирующее магнитное поле представляется в виде суммы его постоянного значения и возмущений:

$$\vec{H} = H_0 \vec{n} + \vec{h}, \quad (1)$$

где \vec{n} – вектор нормали, \vec{h} – малое возмущение магнитного поля.

Для продольных волн в стержне имеем

$$\vec{u} = (u_1, 0, 0), \vec{h} = (0, 0, h_3), \vec{H} = (0, 0, H_0 + h_3). \quad (2)$$

Для описания продольных колебаний стержня воспользуемся классической нелинейной моделью Бернулли. Система уравнений магнитоупругости для идеально проводящего стержня в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - c_0^2 \left(1 + \frac{6\alpha_1}{E} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{4\pi\rho} (H_0 + h_3) \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial h_3}{\partial \tau} + (H_0 + h_3) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial \tau} + \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь τ – время, $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ – модуль Юнга, λ, μ – модули упругости (константы

Ламе) второго порядка; ρ – плотность материала, $\alpha_1 = \frac{E}{2} + \frac{3\lambda}{2} + A + B(1 - 2\nu) + \frac{C}{3}(1 - 6\nu)$ –

коэффициент упругой нелинейности, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны.

Обозначая $G = \frac{\partial u_1}{\partial \tau}$, $Q = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, перепишем систему (3) в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial \tau} - c_0^2 \left(1 + \frac{6\alpha_1}{E} Q \right) \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{1}{4\pi\rho} (H_0 + h_3) \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial h_3}{\partial \tau} + (H_0 + h_3) \frac{\partial G}{\partial x_1} + G \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Перейдем в системе (4) к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} U = Q, V = \frac{G}{c_0}, W = \frac{h_3}{H_0}, \\ \tilde{x}_1 = \frac{1}{x_m} x_1, \tilde{\tau} = \frac{c_0}{x_m} \tau \end{aligned} \quad (5)$$

где x_m – масштабирующий множитель, имеющий размерность длины. Далее введем движущуюся систему координат

$$x = \tilde{x}_1 - V_p \tilde{\tau}, \quad t = \varepsilon \tilde{\tau}, \quad (6)$$

где V_p – характерная скорость волн, заранее неизвестная, ε – малый параметр.

Подставим (5) и (6) в систему (4), сохраняя при этом члены с ε в степени, не выше первой, получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} -V_p \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{c_A^2}{c_0^2} \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \\ -V_p \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ -V_p \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{6\alpha_1}{E} U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{c_A^2}{c_0^2} W \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

которые являются соответственно нулевым и первым приближением системы (4) в новых переменных. Здесь $c_A = \sqrt{\frac{H_0^2}{4\pi\rho}}$ – скорость волны Альфвена [1].

Из второго и третьего соотношений системы (7) получим между функциями

$$\begin{aligned} U &= -W, \\ V &= -V_p U, \end{aligned} \quad (9)$$

а из первого соотношения определим значение скорости:

$$V_p = \sqrt{1 + \frac{c_A^2}{c_0^2}}. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8) и складывая полученные уравнения системы (8), преобразуем её к уравнению Римана:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

где
$$\alpha = \frac{\frac{c_A^2}{c_0^2} - \frac{6\alpha_1}{E} + 2V_p}{1 + V_p}.$$

Оно эквивалентно характеристической системе:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha U, \quad \frac{dU}{dt} = 0, \quad (12)$$

полный интеграл которой определяется выражением:

$$x + \alpha Ut = \psi(U) \quad (13)$$

где $\psi(U)$ - произвольная функция.

Общее решение уравнения (11) есть

$$U(x,t) = F(x + \alpha Ut) \quad (14)$$

где F – обратная по отношению к ψ функция и определяется из начальных или граничных условий.

Выражение (14) называют простой волной или волной Римана. Её профиль по мере распространения искажается, поскольку разные участки бегут с разными скоростями. Остаются неподвижными лишь точки профиля волны, в которых $U(x,t) = 0$.

Проследим более подробно нелинейную эволюцию волны, заданной в начальный момент времени в виде синусоиды $U(x,0) = U_0 \sin(kx)$.

В этом случае:

$$U(x,t) = U_0 \sin\left(kx + \frac{U}{U_0} t_1\right), \quad (15)$$

где $t_1 = k\alpha U_0 t$ - безразмерное время.

За нелинейными искажениями волны (15) удобнее всего проследить с помощью графических построений. В силу периодичности функции (15) можно ограничиться её рассмотрением лишь на одном периоде.

Решая (15) относительно x получим:

$$kx = \arcsin \frac{U}{U_0} - t_1 \frac{U}{U_0}.$$

Очевидно, что профиль волны при $t_1 \neq 0$ получается путем графического сложения функции $kx = \arcsin \frac{U}{U_0}$, описывающей форму волны при $t_1 = 0$ и прямой $kx = -t_1 \frac{U}{U_0}$,

$$(16)$$

характеризующей относительные перемещения точек профиля волны в зависимости от амплитуды.

На рис.1 приведен графический анализ нелинейных искажений простой волны (15) на плоскости $\left(kx, \frac{U}{U_0}\right)$.

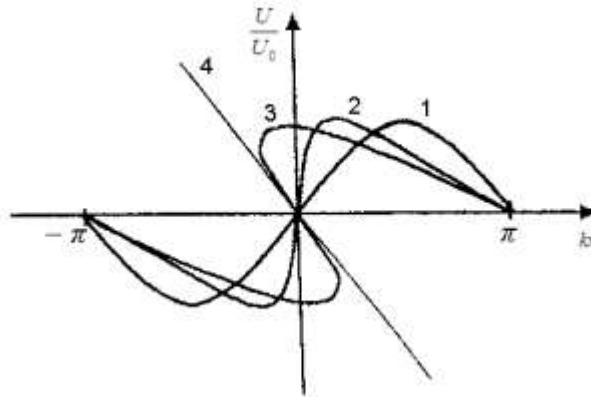


Рис. 1. Искажение профиля простой волны. Профиль волны при $t_1 = 0$ (кривая 1), при $t_1 = 1$ (кривая 2), при $t_1 = 2$ (кривая 3), 4 – прямая $kx = -t_1 \frac{U}{U_0}$.

Из рисунка видно, что в некоторый момент времени $t_1 = t_{1*}$ простая волна приобретает бесконечную крутизну и затем (при $t_1 > t_{1*}$) становится неоднозначной. Это явление иногда называют опрокидыванием волны. Оно начинается при $t_{1*} = 1$, когда на ее профиле впервые появляется точка с вертикальной касательной. Параметры точки опрокидывания x_*, t_{1*}, U_* находятся из условий, что в ней:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial U}\right)_* = \left[\frac{1}{k\sqrt{U_0^2 - U_*^2}} - \frac{t_{1*}}{kU_0}\right] = 0, \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial U^2}\right)_* = \frac{U_*}{k(U_0^2 - U_*^2)^{3/2}} = 0.$$

Следовательно, опрокидывание волны происходит при $U_* = 0$, в момент времени $t_{1*} = 1$ и в точке с пространственной координатой $x_* = 0$. Возвращаясь к времени t , получим, что опрокидывание происходит при:

$$t_* = \frac{1}{k\alpha U_0}, \tag{18}$$

которое зависит от напряженности внешнего магнитного поля.

На рис.2 изображена зависимость времени опрокидывания от величины напряженности внешнего магнитного поля:

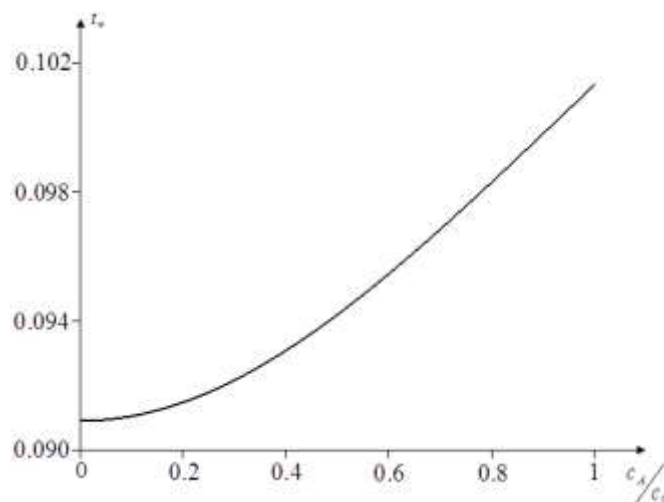


Рис.2. Зависимость времени опрокидывания волны Римана от напряженности внешнего магнитного поля.

Для конденсированных сред в магнитных полях до 10 скорость волны Альфвена меньше скорости распространения продольной волны [5], поэтому изменение параметров представлено на интервале $0 \leq \frac{c_A^2}{c_0^2} < 1$.

Из рисунка видно, что время опрокидывания увеличивается с ростом напряженности магнитного поля. На рисунке изображена тенденция изменения времени опрокидывания в зависимости от величины внешнего магнитного поля. Таким образом, внешнее магнитное поле стабилизирует простую волну, увеличивая время её опрокидывания.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 15-19-10026).

Список литературы

1. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. - Киев: Наукова думка, 1991. - 200 с.
2. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. - М.: Изд-во МГУ, 1999. - 328 с.
3. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: Фролов К.В. (пред.). Колебания линейных систем. Т.1 / Под ред. Болотина В.В. - М.: Машиностроение, 1999. - 504 с.
4. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. - М.: Мир, 1988. - 694 с.
5. Физико-химические процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии / Под ред. Углова А.А. - М.: Наука, 1989.

Дата поступления статьи - 30 мая 2017 года