УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ КОССЕРА

© Федор Сергеевич Пеплин

Институт проблем машиностроения РАН, Москва, Россия
f-peplin@yandex.ru

Аннотация. *В работе получены уравнения нелинейной термоупругой среды Коссера. Преподлагается, что перемещения и вращения достаточно малы, в то время как температура может быть конечной. Поэтому учтены только нелинейности, связанные с нагревом. Используется обобщенный закон теплопроводности Фурье, который учитывает конечное время распространения тепловых возмущение, что приводит к гиперболическому уравнению теплопроводности. Считаем, что взаимодействие подсистем континуума (трансляционной, ротационной и тепловой) носит самый общий характер.*

Ключевые слова*: обобщенный континуум, континуум Коссера, термоупругость.*

NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL OF THERMOELASTIC COSSERAT CONTINUA

© Fedor S. Peplin

IMASH RAS, Moscow, Russia
f-peplin@yandex.ru

Abstract*. Equations of nonlinear thermoelastic Cosserat media are obtained. Let us assume displacements and rotations are small enough while temperatures may be finite. That is why we take into account only temperatur-related nonlinearities. The generilized Fourier heat transfer law is evoked. It allows for finite velocity of temperature disturbances and eventually leads to hyperbolic heat transfer equation. All possible interactions of different media subsystems (translations, rotations and temperature) are included into the model.*

Key words*: generilized continua, Cosserat continua, thermoelasticity.*

Теория микрополярного континуума впервые была построена в работах Эжена и Франсуа Коссера [1] и [2] в начале прошлого века. Появление этих работ знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело. В отличие от общепринятого упругого континуума микрополярная среда описывается двумя несимметричными тензорами напряжений, что приводит к более сложной теории и большому количеству подлежащих определению материальных констант. В то же время целый ряд явлений (например, аномальный пьезоэлектрический эффект в кварце и дисперсия упругих волн) и материалов (нано- и метаматериалы) не могут быть адекватно описаны средствами существующих теорий классической упругости и пьезоэлектричества, поэтому построение и изучение более сложных моделей микрополярного континуума представляется обоснованным.

Математическая модель термоупругой микрополярной среды в линейном приближении предложена В. Новацким в работе [3]. Линейные термоупругие волны в такой среде изучались в [4].

Целью настоящей работы является применение методов механики сплошной среды к построению более сложной математической модели динамики континуума Коссера, учитывающей связанную с температурой нелинейность, конечное время распространения теплового возмущения (релаксацию теплового потока), а также взаимосвязь ротационной и температурной подсистем среды.

В настоящей работе задействована модель гиперболической термоупругости LS-типа [5].

Уравнения движения континуума Коссера могут быть записаны в следующем виде [3]:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\sigma = \rho\ddot{\mathbf{u}} \\ \nabla\cdot\mu + \varepsilon\cdot\cdot\sigma = \mathbf{I}\cdot\ddot{\varphi}, \end{cases} \tag{1}$$

где σ, μ — тензоры силовых и моментных напряжений соответственно, $\mathbf{u}$ — вектор перемещения тела-точки, φ — вектор поворота тела-точки, ρ — плотность, $\mathbf{I}$ — момент инерции тела-точки, ε — тензор Леви-Чивиты. В случае, когда тело-точка симметрична относительно оси с направляющим вектором $\mathbf{m}$, тензор инерции имеет вид

$$\mathbf{I} = I_1\mathbf{mm} + I_2(\mathbf{E}-\mathbf{mm}).$$

Запишем уравнение баланса энтропии [3]:

$$\int_V \dot{s}dV = -\int_\Gamma \frac{\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}}{T}d\Gamma + \int_V \xi dV, \tag{2}$$

где s — объемная плотность энтропии, $\mathbf{q}$ — вектор плотности теплового потока, T — температура тела. Левая часть (2) обозначает прирост энтропии. Первое слагаемое правой части описывает возникновение энтропии за счет обмена энтропии с окружающей средой, а второе выражает производство энтропии, связанное с теплопроводностью. Пользуясь теоремой Остроградского-Гаусса и произвольностью области V, преобразуем (2) к виду:

$$\dot{s} = \xi - \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{h}}{\theta}\right) \tag{3}$$

Тогда выражение энергетического баланса для свободной энергии ψ запишется следующим образом:

$$\dot{\psi} = \mathrm{tr}(\sigma\cdot\dot{\mathbf{e}}^T) + \mathrm{tr}(\mu\cdot\dot{\mathbf{\Gamma}}^T) - s\dot{T} - T\left(\mathbf{h}\cdot\frac{\nabla\theta}{\theta} - \xi\right), \tag{4}$$

где ψ — объемная плотность свободной энергии, T — температура, $\mathbf{e} = \nabla\mathbf{u} - \varepsilon\cdot\varphi$ — несимметричный тензор деформации, $\nabla\varphi$ — тензор изгиба-кручения.

Пользуясь (4), можно получить определяющие соотношения рассматриваемого континуума:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial e_{ij}},\ \mu_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial\Gamma_{ij}},\ s = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ \xi + \mathbf{h}\cdot\frac{\nabla T}{T^2} = 0 \tag{5}$$

Вместо обычно используемого закона теплопроводности Фурье ($\mathbf{h} = -\mathbf{\Lambda} \cdot \nabla T$) мы будем использовать более общее соотношение:

$$\mathbf{h} = -\mathbf{\Lambda} \cdot \nabla T - \tau \dot{\mathbf{h}}, \tag{7}$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — положительно определенный тензор. Для изотропного и однородного тела $\mathbf{\Lambda} = \Lambda \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ — единичный тензор, Λ — постоянный скаляр). Ясно, что

$$h_{i,i} = -\dot{s}T = T\left(\frac{\partial \psi}{\partial T}\right) = T\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2}\dot{T} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial e_{ij}}\dot{e}_{ij} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \Gamma_{ij}}\dot{\Gamma}_{ij}\right) \tag{8}$$

В свете (5) и (7) уравнение баланса энтропии (3) принимает форму

$$\dot{s}T = -\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla^2 \theta + \tau \nabla \cdot \dot{\mathbf{h}}, \tag{9}$$

где под θ понимается приращение температуры ($T = T_0 + \theta$).

В случае центрально-симметричного изотропного тела можно принять следующий вид свободной энергии:

$$\psi = \frac{\mu+\eta}{2} e_{ji}e_{ji} + \frac{\mu-\eta}{2} e_{ji}e_{ij} + \frac{\lambda}{2} e_{kk}e_{nn} + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\Gamma_{ji}\Gamma_{ji} + \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\Gamma_{ji}\Gamma_{ij} + \frac{\beta}{2}\Gamma_{kk}\Gamma_{nn} - \alpha e_{kk}\theta - \zeta \Gamma_{kk}\theta - \frac{\Lambda_*}{2}\theta^2 \tag{10}$$

Тогда из (8) получим

$$\dot{h}_{i,i} = -\dot{\theta}(\Lambda_* \dot{\theta} + \alpha \dot{u}_{i,i} + \xi \dot{\varphi}_{i,i}) - T(\Lambda_* \ddot{\theta} + \alpha \ddot{u}_{i,i} + \xi \ddot{\varphi}_{i,i})$$

В таком случае (9) примет вид

$$\dot{s}T = \nabla^2 \theta - \tau(\dot{\theta}(\Lambda_* \dot{\theta} + \alpha \dot{u}_{i,i} + \xi \dot{\varphi}_{i,i}) + T(\Lambda_* \ddot{\theta} + \alpha \ddot{u}_{i,i} + \zeta \ddot{\varphi})) \tag{11}$$

Подставив (10) в (5), получим конкретный вид определяющих соотношений:

$$\begin{gathered} \sigma = (\mu+\eta)\mathbf{e} + (\mu-\eta)\mathbf{e}^T + (\lambda \operatorname{tr}\mathbf{e} - \alpha\theta)\mathbf{I} \\ \mu = (\gamma+\varepsilon)\mathbf{\Gamma} + (\gamma-\varepsilon)\mathbf{\Gamma}^T + (\beta \operatorname{tr}\mathbf{\Gamma} - \zeta\theta)\mathbf{I} \\ s = \alpha \operatorname{tr}\mathbf{e} + \zeta \operatorname{tr}\mathbf{\Gamma} + \Lambda_* \theta \end{gathered} \tag{12}$$

Вспомним, что $\frac{\partial s}{\partial \theta} = \frac{k}{T}$, где k — теплоемкость при нулевых деформациях. Тогда $ds = \alpha d\operatorname{tr}\mathbf{e} + \zeta d\operatorname{tr}\mathbf{\Gamma} + \frac{k}{T}dT$, и после интегрирования (считая, что $s = 0$ в отсчетной конфигурации) получим

$$s = \alpha \operatorname{tr}\mathbf{e} + \zeta \operatorname{tr}\mathbf{\Gamma} + k \ln\left(\frac{T}{T_0}\right). \tag{13}$$

Продифференцировав последнее равенство, имеем:

$$\dot{s} = \alpha \mathrm{tr}\dot{\mathbf{e}} + \zeta \mathrm{tr}\dot{\mathbf{\Gamma}} + k\frac{\dot{\theta}}{T},$$

откуда получаем

$$\dot{s}T = \alpha T \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} + \zeta T \nabla \cdot \dot{\varphi} + k\dot{\theta} \tag{14}$$

Сравнивая (11) и (14), окончательно можем записать:

$$\nabla^2\theta - \frac{k}{\Lambda}\dot{\theta} - \alpha\frac{T_0}{\Lambda}\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)(\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}} + \tau\nabla\cdot\ddot{\mathbf{u}}) - \zeta\frac{T_0}{\Lambda}\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)(\nabla\cdot\dot{\varphi} + \tau\nabla\cdot\ddot{\varphi}) - $$
$$-\tau\frac{\Lambda_*}{\Lambda}\dot{\theta}^2 - \tau\alpha\dot{\theta}\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}} - \tau\zeta\dot{\theta}\nabla\cdot\dot{\varphi} = 0 \tag{15}$$

Заметим, что, если считать $|\theta/T_0|$ малой величиной, то логарифм в (13) можно заменить на $|\theta/T_0|$ и из сравнения с (12) получаем, что $k = \Lambda_* T_0$.

Уравнение (15) является одним из семи скалярных уравнений в перемещениях рассматриваемого континуума. Чтобы получить остальные шесть, подставим определяющие соотношения (12) в уравнения движения (1) и проведем преобразования. В результате придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\lambda+\mu-\eta)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + (\mu+\eta)\nabla\cdot\nabla\mathbf{u} + 2\eta\nabla\times\varphi - \alpha\nabla\theta - \rho\ddot{\mathbf{u}} = 0 \\ (\beta+\gamma-\varepsilon)\nabla\nabla\cdot\varphi + (\gamma+\varepsilon)\nabla\cdot\nabla\varphi - 4\eta\varphi + 2\eta\nabla\times\mathbf{u} - \zeta\nabla\theta - I\ddot{\varphi} = 0 \\ \nabla^2\theta - \frac{k}{\Lambda}\dot{\theta} - \alpha\frac{T_0}{\Lambda}\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)(\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}} + \tau\nabla\cdot\ddot{\mathbf{u}}) - \zeta\frac{T_0}{\Lambda}\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)(\nabla\cdot\dot{\varphi} + \tau\nabla\cdot\ddot{\varphi}) - \tau\frac{\Lambda_*}{\Lambda}\dot{\theta}^2 - \tau\alpha\dot{\theta}\nabla\cdot\dot{\mathbf{u}} - \tau\zeta\dot{\theta}\nabla\cdot\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Уравнения (16) представляют собой нелинейную математическую модель связанного термоупругого континуума Коссера. Сконструированная модель учитывает нелинейность температуры, конечное время распространения тепловых возмущений и все виды взаимосвязи между подсистемами континуума.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Гранты № 16-08-00776 и № 16-38-00387).

Список литературы

1. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: A. Hermann. 1909 (репринт: 2009).
2. Коссера Э., Коссера Ф. Заметка о теории эвклидовского действия (репринт)
3. // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2013. Т.5. № 1. С.5-76.
4. Новацкий В. Теория упругости. Пер. с польск. Б. Е. Победри. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Ерофеев В.И., Пеплин Ф.С. Расчет дисперсионных зависимостей для термоупругого

континуума Коссера // III международная школа-конференция молодых ученых «Нелинейная динамика машин» - School-NDM 2016: Сборник трудов (Москва, 12-15 апреля 2016 г.) / Под ред. В.К. Асташева, В.Л. Крупенина, Г.Я. Пановко, К.Б. Саламандра. М.: ИМАШ РАН, 2016. С. 146-153.
6. Lord H., Shilman Y. A generilized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids, 1967, N.15. P. 299-309.

Дата поступления статьи: 3 августа 2016 года.