

УДК 534.1

К АНАЛИЗУ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ДВУМЯ СЛУЧАЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

© ¹Борис Алексеевич Роев, ^{1,2}Алексей Иосифович Винокур¹ Московский государственный университет печати имени Ивана Федорова, Москва, Россия² Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, Россияbroev@list.ru, alex.vinokour@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача о вынужденных колебаниях в механической системе со случайными параметрами. Анализ взаимодействия вынужденных и параметрических источников колебаний проведен на примере системы, в которой свойства инерции и жесткости изменяются случайным образом. Параметрические воздействия представлены в виде случайных узкополосных процессов. Получены амплитудно-частотные характеристики, которые наглядно показывают развитие динамических процессов.

Ключевые слова: дисперсия, несущая частота, параметрическое воздействие, резонанс, случайный процесс.

ON THE ANALYSIS OF FORCED OSCILLATIONS OF SYSTEMS WITH TWO RANDOM SOURCES OF PARAMETRIC EFFECTS

© ¹Boris Roev, ^{1,2}Aleksey Vinokur¹Moscow State University of Printing Arts, Moscow, Russia²National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russiabroev@list.ru, alex.vinokour@gmail.com

Abstract. We consider the problem of forced oscillations in a mechanical system with random parameters. The analysis of the interaction of forced and parametric oscillators is conducted by the example of the system where the properties of inertia and stiffness are randomized. The parametric effects are presented in the form of narrowband random processes. The obtained amplitude-frequency characteristics demonstrate the development of dynamic processes.

Keywords: variance, carrier frequency, parametric effect, resonance, random process.

1. Введение

При рассмотрении ряда машин, в частности полиграфических, актуальным вопросом является взаимодействие, возникающих в них параметрических и вынужденных случайных колебаний. Задачи такого рода в общем плане были исследованы в работах [1-6].

Приведены результаты исследования взаимодействия вынужденных и параметрических случайных колебаний на примере системы, совершающей крутильные колебания, когда случайным образом меняются коэффициенты при инерционном слагаемом и при слагаемом, связанным с жесткостью. Уравнение, описывающее эти колебания, имеет вид

$$(1 - f_1(t))\ddot{\theta} + 2\varepsilon\dot{\theta} + \omega_0^2(1 - f_3(t))\theta = m(t) \quad (1)$$

Где $\theta(t)$ - угол поворота, $f_j(t)$ - параметрические воздействия, $m(t)$ - приведенный крутящий момент; ε, ω_0 - параметры системы [4]. Описание возбуждающих факторов $f_j(t)$ и $m(t)$ дается ниже.

2. Метод

Для решения задачи используем модифицированный спектральный метод [7,8]. Введем для функций $\theta(t)$ и $\bar{f}_j(t)$ следующие интегральные представления

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega, t) Q(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \bar{f}_j(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\omega) e^{i\omega t} d\omega, j = 1, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

где $\theta_0(t)$ – математическое ожидание угла поворота $\theta(t)$; $\psi(\omega, t)$ - неизвестная детерминистическая функция; $Q(\omega)$ и $F_j(\omega)$ -случайные спектры, удовлетворяющие условиям стохастической ортогональности. Внешнее воздействие является детерминированным и задано в виде $m(t) = m_0 \cos \Omega t$.

После подстановки (2) в (1) и составления моментных соотношений по методике, изложенной в [7,8], для неизвестных функций $\theta_0(t)$ и $\psi(\omega, t)$ получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_0 + 2\varepsilon\dot{\theta}_0 + \omega_0^2\theta_0 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\ddot{\psi} + 2i\omega\dot{\psi} - \omega^2\psi) S_{f1\theta} + \omega_0^2\psi S_{f3\theta} \right] d\omega &= m_0 \cos \Omega t \\ \left[\ddot{\psi} + 2(\varepsilon + i\omega)\dot{\psi} + (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega)\psi \right] S_{f1\theta}(\omega) - \ddot{\theta}_0 S_{f1}(\omega) - \omega_0^2\theta_0 S_{f1f3}(\omega) &= 0 \\ \left[\ddot{\psi} + 2(\varepsilon + i\omega)\dot{\psi} + (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega)\psi \right] S_{f3\theta}(\omega) - \ddot{\theta}_0 S_{f1f3}(\omega) - \omega_0^2\theta_0 S_{f3}(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть параметрические воздействия представляют идеальные узкополосные процессы со спектральными плотностями

$$S_{ff}(\omega) = \frac{\sigma_{ff}^2}{2} \delta(\omega - \omega_j) \quad (4)$$

с одинаковой несущей частотой $\omega_1 = \omega_3 = \omega_*$, но с разной дисперсией σ_{ff}^2 . Здесь $\delta(\omega)$ - дельта-функция Дирака.

Далее находим частное решение этой системы, которое описывает установившиеся вынужденные колебания. Поскольку правая часть этой системы $m(t) = m_0 \cos \Omega t$, то решение будем искать в следующем виде

$$\begin{aligned} \theta_{0*}(t) &= A \cos \Omega t + B \sin \Omega t, \\ \psi(\omega, t) &= D(\omega) \cos \Omega t + G(\omega) \sin \Omega t \end{aligned} \quad (5)$$

В результате подстановки (4) и (5) в (3) и проведения необходимых преобразований, получаем формулу для амплитуды углов поворота

$$\bar{A} = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{m_0}{\omega_0^2 \cdot \bar{\Delta}_1} \sqrt{\bar{\alpha}_{22}^2 + \bar{\alpha}_{21}^2}, \quad (6)$$

Где

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{11} &= 1 - \gamma^2 + I_1, \bar{\alpha}_{12} = (2\delta\gamma + I_2), \bar{\alpha}_{21} = (-2\delta\gamma + I_3), \bar{\alpha}_{22} = 1 - \gamma^2 + I_4, \\ I_1 &= \sigma_{f1}^2 \frac{a_{11}A_1 + b_{11}B_1}{A_1^2 + B_1^2} + \sigma_{f3}^2 \frac{c_5A_1 + d_5B_1}{A_1^2 + B_1^2}, I_2 = \sigma_{f1}^2 \frac{a_{21}A_1 + b_{21}B_1}{A_1^2 + B_1^2} - \sigma_{f3}^2 \frac{c_6A_1 + d_6B_1}{A_1^2 + B_1^2}, \\ I_3 &= \sigma_{f1}^2 \frac{a_{31}A_1 + b_{31}B_1}{A_1^2 + B_1^2} + \sigma_{f3}^2 \frac{c_6A_1 + d_6B_1}{A_1^2 + B_1^2}, I_4 = \sigma_{f1}^2 \frac{a_{41}A_1 + b_{41}B_1}{A_1^2 + B_1^2} + \sigma_{f3}^2 \frac{c_5A_1 + d_5B_1}{A_1^2 + B_1^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\gamma^2 \cdot (c_1 + c_4), b_{11} = -\gamma^2 \cdot (d_1 + d_4), a_{21} = \gamma^2 \cdot (c_2 - c_3), b_{21} = \gamma^2 \cdot (d_2 - d_3), \\
a_{31} &= -\gamma^2 \cdot (c_2 + c_3), b_{11} = -\gamma^2 \cdot (d_2 + d_3), a_{41} = -\gamma^2 \cdot (c_1 - c_4), b_{21} = -\gamma^2 \cdot (d_1 - d_4), \\
c_1 &= (\gamma_1^2 - \gamma^2) \left(1 - \gamma^2 - \gamma_1^2 \right), d_1 = 2\delta\gamma_1(\gamma_1^2 - \gamma^2), c_2 = 2\delta\gamma(\gamma_1^2 - \gamma^2), d_2 = 2\gamma\gamma_1(\gamma_1^2 - \gamma^2), \\
c_3 &= -4\delta\gamma_1^2\gamma, d_3 = 2\gamma_1\gamma \left(1 - \gamma^2 - \gamma_1^2 \right), c_4 = -4\gamma_1^2\gamma^2, d_4 = 4\delta\gamma^2\gamma_1, c_5 = 1 - \gamma^2 - \gamma_1^2, d_5 = 2\delta\gamma_1, \\
c_6 &= 2\delta\gamma, d_6 = 2\gamma_1\gamma, A_1 = \left(1 - \gamma^2 - \gamma_1^2 \right)^2 + 4 \cdot \left(\gamma^2 \left(\delta^2 - \gamma_1^2 \right) - \delta^2\gamma_1^2 \right), B_1 = 4\delta\gamma_1 \cdot \left(1 + \gamma^2 - \gamma_1^2 \right), \\
\gamma &= \frac{\Omega}{\omega_0}, \gamma_1 = \frac{\omega_*}{\omega_0}, \delta = \frac{\varepsilon}{\omega_0}, \tau = \omega_0 t.
\end{aligned}$$

3. Результаты

Чтобы наглядно представить результаты исследования, эти характеристики необходимо построить в объемном изображении и в виде графиков уровней. Если частоты внешнего и параметрического воздействий записать в виде одномерных массивов γ_i ($i=1, \dots, 200$; $j=1, \dots, 300$, с шагом 0.02), то амплитуда колебаний (6), происходящих в системе привода, будет представлять собой двумерный массив \bar{A}_{ij} , графическим изображением которого является некоторая поверхность. Графики уровней дают возможность наблюдать, как происходит изменение амплитудно-частотных характеристик на плоскости частот. При этом вертикальная ось соответствует частоте внешнего, а горизонтальная - параметрического воздействий.

Рассмотрим влияние дисперсии $\sigma_{f_3}^2$ параметрического воздействия, соответствующего только жесткости, при этом считая, что инерционное воздействие отсутствует $\sigma_{f_1}^2 = 0$. При этом безразмерный параметр демпфирования принимался $\delta = 0.2$. Вначале рассмотрим случай, когда $\sigma_{f_3}^2 = 0$. Тогда амплитудно-частотная характеристика будет соответствовать системе с одной степенью свободы с постоянными параметрами, где наблюдается один резонанс на собственной частоте. При этом на графике уровней нет никаких искажений (рис.1).

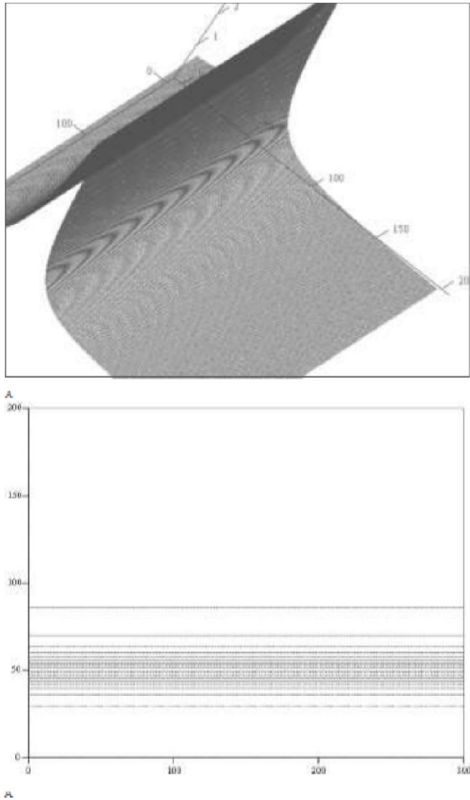


Рис.1. Амплитудно-частотная характеристика при $\sigma_{f_1}^2 = 0$ и $\sigma_{f_3}^2 = 0$

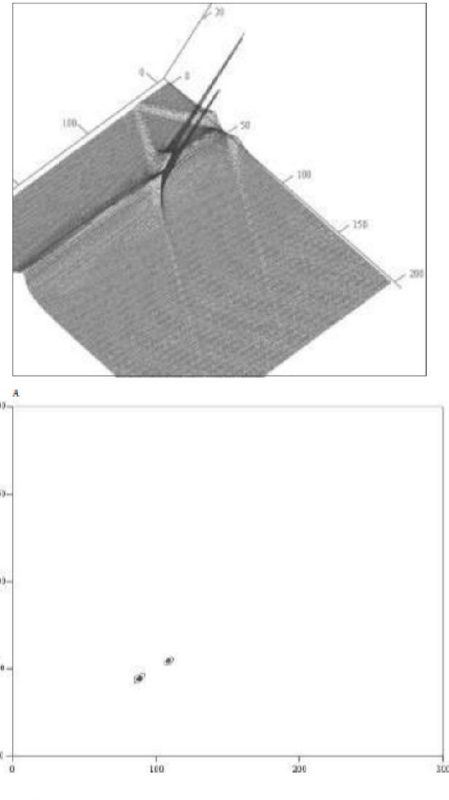


Рис.3. Амплитудно-частотная характеристика при $\sigma_{f_1}^2 = 0$ и $\sigma_{f_3}^2 = 0.16$

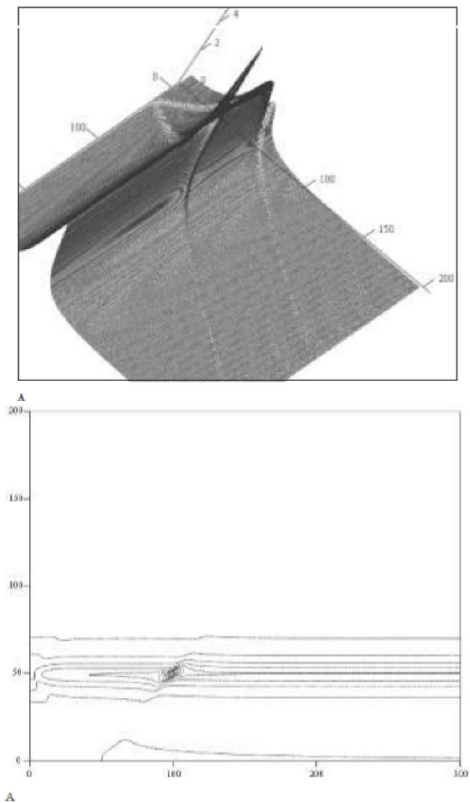


Рис.2. Амплитудно-частотная характеристика при $\sigma_{f_1}^2 = 0$ и $\sigma_{f_3}^2 = 0.04$

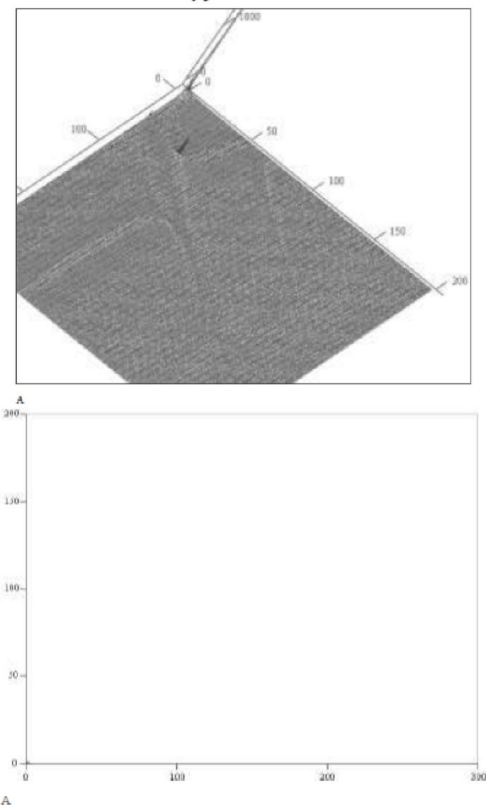


Рис.4. Амплитудно-частотная характеристика при $\sigma_{f_1}^2 = 0$ и $\sigma_{f_3}^2 = 1.0$

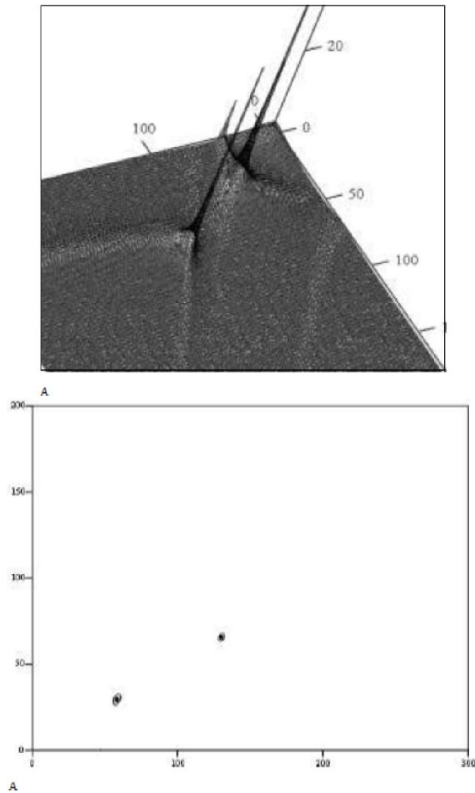


Рис.5. Амплитудно-частотная характеристика при $\sigma_{f_1}^2 = 0$ и $\sigma_{f_3}^2 = 1.44$

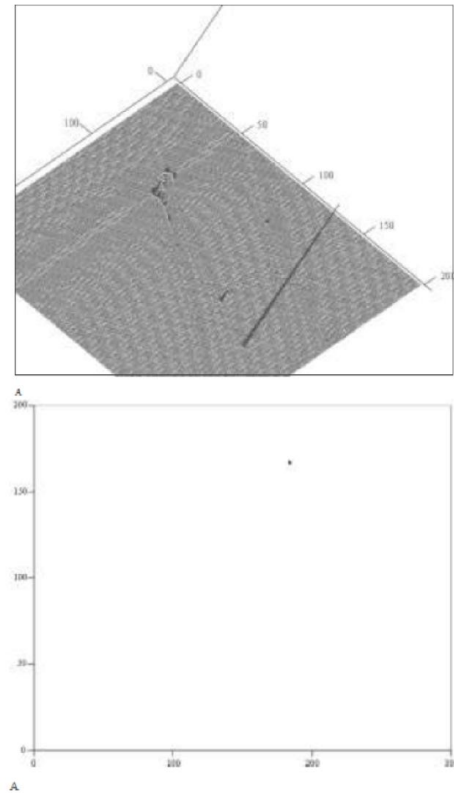


Рис.7. Амплитудно-частотная характеристика при $\sigma_{f_1}^2 = 0.04$ и $\sigma_{f_3}^2 = 0.16$

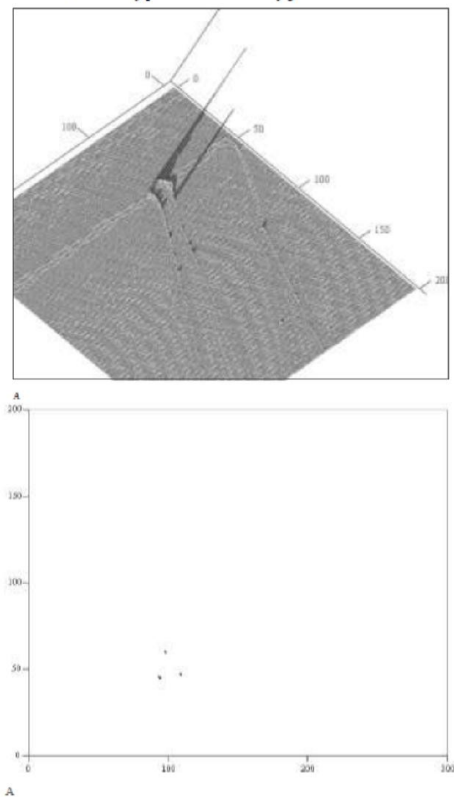


Рис.6. Амплитудно-частотная характеристика при $\sigma_{f_1}^2 = 0.04$ и $\sigma_{f_3}^2 = 0.04$

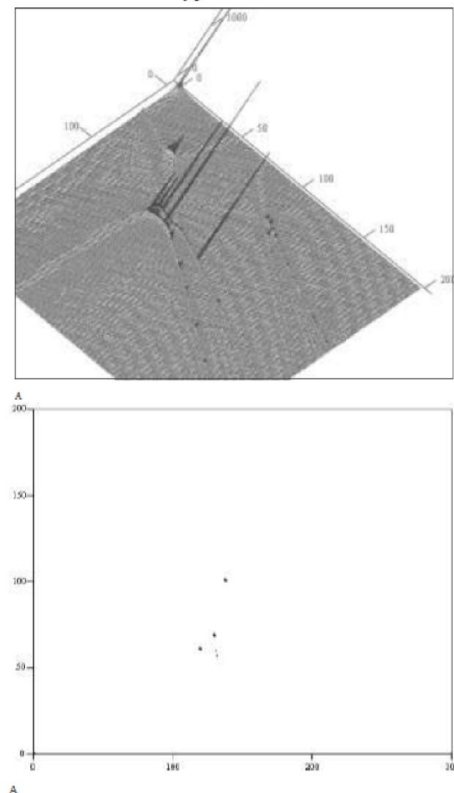


Рис.8. Амплитудно-частотная характеристика при $\sigma_{f_1}^2 = 0.04$ и $\sigma_{f_3}^2 = 1.0$

По мере увеличения дисперсии параметрического воздействия со стороны жесткости $\sigma_{f_3}^2$, в области главного параметрического резонанса ($\gamma_1 = 2,0; j = 100$) начинается искажение амплитудно-частотной характеристики (рис. 2-4), что существенно изменяет характер динамических процессов в системе. При этом возникают дополнительные резонансные пики.

Очень интересным представляется случай, когда дисперсия параметрического воздействия, связанного с жесткостью, $\sigma_{f_3}^2 = 1,0$. Здесь возникают два резонанса, самый значительный из которых наблюдается при низких частотах (рис.4). Дальнейшее увеличение этой дисперсии вновь меняет картину динамических процессов, происходящих в системе.

Далее рассмотрим влияние инерционного параметрического воздействия на характер амплитудно-частотных характеристик (рис. 6-8). В этом случае происходит качественное изменение поведения системы при внешнем периодическом воздействии. При малом значении дисперсии инерционного воздействия $\sigma_{f_1}^2 = 0,04$ на амплитудно-частотной характеристике появляется группа резонансных пиков. Наиболее значительные из них наблюдаются в области главного параметрического резонанса ($\gamma_1 = 2,0; j = 100$). При увеличении этой дисперсии резонансные пики начинают смещаться из резонансных областей параметрических и вынужденных колебаний. На графиках уровней эти пики изображены точками. Смещение этих резонансов связано, по-видимому, с наличием других параметрических резонансов кроме главного. Каждый из них может проявиться только при определенном сочетании частот внешнего и параметрических воздействий, поскольку система становится чувствительной даже к незначительному изменению своих параметров.

4. Обсуждение

В работе [7] результаты исследования вынужденных колебаний в механических системах были представлены в виде амплитудно-частотных характеристик при фиксированных значениях частоты и дисперсии случайных параметрических воздействий. Для того, чтобы иметь полное представление о динамических процессах в этих системах, в рамках принятой в данной работе методики необходимо провести анализ значительного числа амплитудно-частотных характеристик. Полученные результаты показывают, что увеличение дисперсии параметрического воздействия, связанного с жесткостью системы, приводит к увеличению количества резонансных пиков, поскольку любое незначительное изменение параметров воздействия может существенно изменить их вид.

Список литературы

1. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. - М.:Наука,1979, 336 с.
2. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука. 1980.336 с.

3. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
4. Коловский М.З. Динамика машин. Л.: Машиностроение (ЛЮ), 1989, с. 263
5. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin. Heidelberg. New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.p.
6. Krupenin V.L. Investigation of One-Dimensional and Multidimensional Vibroimpact Processes during Random Broadband Excitation// Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2010, Vol. 39, No. 6, pp. 530–538.
7. Роев Борис. Вынужденные и параметрические колебания. Технические приложения. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2013, 128 с.
8. Винокур А.И., Роев Б.А., Яковлев Р.В. Устойчивость обращенного маятника при случайных колебаниях его опоры. Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела. — №1— 2015— с. 14-19

Дата поступления статьи: 30 июня 2016 года.