

УДК 534.222

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

© Алексей Олегович Мальханов

Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия
alexey.malkhanov@gmail.com

Аннотация. Изучается влияние магнитного поля на формирование локализованной волны в нелинейно-упругой проводящей среде. Получено эволюционное уравнение для описания распространения волнового пучка в среде. Показана зависимость параметров волнового пучка от ориентации поля в пространстве.

Ключевые слова: магнитное поле, нелинейно-упругая среда, магнитоупругость.

DEFORMATIONAL LOCALIZED WAVES IN NONLINEAR ELASTIC CONDUCTING MEDIA INTERACTING WITH ARBITRARY ORIENTED MAGNETIC FIELD

© Alexey O. Malkhanov

Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,
Nizhny Novgorod, Russia
alexey.malkhanov@gmail.com

Abstract. The influence of magnetic field on the localized wave formation in nonlinear elastic media is studied. The evolutionary equation has been obtained for describing the propagation of the wave beam in the media. It shown that there is a dependence of wave beam parameters on magnetic field orientation.

Key words: magnetic field, nonlinear elastic media, magnetoelasticity.

1. Введение

Проблемам взаимодействия деформационных, электромагнитных и тепловых полей в электропроводных телах в присутствии постоянного сильного магнитного поля традиционно уделяется большое внимание исследователей разных научных школ [1 – 9]. Актуальность таких исследований связана с разработкой методов неразрушающего контроля материалов, способов электродинамического возбуждения и приема акустических волн [10].

Важность этого круга задач определяется и развитием технологий термомеханической обработки крупногабаритных изделий [11]. Сквозной прогрев материалов выступает при этом одной из технологических операций, он обеспечивает снижение жесткости материала перед его обработкой давлением, при спекании порошков и композитов. Помещение образца в сильное магнитное поле создает дополнительные возможности для равномерного распределения источников тепла, приводящие к выравниванию температурного поля и

увеличению скорости нагрева при индукционной обработке. Приповерхностные токи взаимодействуют с магнитным полем, что приводит к генерации акустических колебаний в среде, которые, в свою очередь, вызывают появление в среде индукционных токов и связанных с ними квазистационарных электромагнитных полей. Вязкая и джоулева диссипации энергии связанных акусто-электромагнитных колебаний приводят к формированию дополнительных объемно распределенных источников тепла.

Большинство задач магнитоакустики рассматривается в линейном приближении и одномерной постановке. Учет нелинейности, как правило, ограничивается нелинейностью взаимодействия упругой среды и электромагнитного поля [4] и нелинейностью, связанной с температурными напряжениями [12]. Важная для акустики твердого тела физическая нелинейность, учитываемая, например, в [13], еще не получила в магнитоакустике должного рассмотрения.

В работе [22] было изучено влияние величины внешнего магнитного поля на параметры волнового пучка, распространяющегося в нелинейно-упругой проводящей среде. В настоящей работе рассматривается воздействие ориентации внешнего магнитного поля на распространение магнитоупругих волн в трехмерной нелинейно-упругой среде. При этом, как и в [22], основное внимание уделяется вопросам формирования пространственно-локализованных волн. Задача влияния магнитного поля на локализацию волны деформации рассматривалась ранее авторами в одномерной (стержень) [14 – 16] и двумерной (пластина) [17, 18] постановках.

2. Уравнения магнитоупругости для нелинейно-упругой среды, находящейся в произвольно ориентированном магнитном поле

В работе [22] была получена система уравнений магнитоупругости для трехмерной нелинейно-упругой проводящей среды. Они имеют вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left(K + \frac{1}{3} G \right) \text{grad div } \mathbf{u} + G \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_{\text{нел}} + \mu_e (\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right] + \frac{1}{\mu_e \sigma} \Delta \mathbf{H}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{H} – напряженность магнитного поля, σ – проводимость, μ_e – абсолютная магнитная проницаемость среды; \mathbf{u} – вектор перемещений; K – модуль всестороннего сжатия; G – модуль сдвига; ρ – плотность материала; t – время. Вектор $\mathbf{F}_{\text{нел}}$ включает в себя слагаемые, обусловленные учетом упругой нелинейности.

В результате взаимодействия начального магнитного поля с полем деформаций, появляются возмущения. Поэтому результирующее магнитное поле представляется в виде суммы его постоянного значения с напряженностью H_0 и малой поправки:

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{n} + \mathbf{h}, \quad (3)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали, \mathbf{h} – малое возмущение магнитного поля.

Будем считать, что внешнее постоянное магнитное поле имеет произвольную ориентацию в пространстве, которая определяется углами $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Согласно выражению (3) вектор суммарного магнитного поля имеет следующие компоненты:

$$\mathbf{H} = (H_0 \sin \theta \cos \varphi + h_x, H_0 \sin \theta \sin \varphi + h_y, H_0 \cos \theta + h_z). \quad (4)$$

Тогда система уравнений магнитоупругости(1), (2) для однородной нелинейно-упругой среды, находящейся в произвольно ориентированном магнитном поле запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - c_t^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) - (c_l^2 - c_t^2) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) - F_{нел.х} - \\ & - \frac{\mu_e}{\rho} \left[(H_0 \cos \theta + h_z) \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) - (H_0 \sin \theta \sin \varphi + h_y) \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right] = 0, \\ & \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - c_t^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) - (c_l^2 - c_t^2) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} \right) - F_{нел.у} - \\ & - \frac{\mu_e}{\rho} \left[(H_0 \sin \theta \cos \varphi + h_x) \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) - (H_0 \cos \theta + h_z) \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) \right] = 0, \\ & \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - c_t^2 \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) - (c_l^2 - c_t^2) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} \right) - F_{нел.z} - \\ & - \frac{\mu_e}{\rho} \left[(H_0 \sin \theta \sin \varphi + h_y) \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) - (H_0 \sin \theta \cos \varphi + h_x) \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \right] = 0, \\ & \frac{\partial h_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left((H_0 \sin \theta \sin \varphi + h_y) \frac{\partial u_x}{\partial t} - (H_0 \sin \theta \cos \varphi + h_x) \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left((H_0 \sin \theta \cos \varphi + h_x) \frac{\partial u_z}{\partial t} - (H_0 \cos \theta + h_z) \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) + \frac{1}{\mu_e \sigma} \left(\frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2} \right), \\ & \frac{\partial h_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left((H_0 \cos \theta + h_z) \frac{\partial u_y}{\partial t} - (H_0 \sin \theta \sin \varphi + h_y) \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left((H_0 \sin \theta \sin \varphi + h_y) \frac{\partial u_x}{\partial t} - (H_0 \sin \theta \cos \varphi + h_x) \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) + \frac{1}{\mu_e \sigma} \left(\frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} \right), \\ & \frac{\partial h_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((H_0 \sin \theta \cos \varphi + h_x) \frac{\partial u_z}{\partial t} - (H_0 \cos \theta + h_z) \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left((H_0 \cos \theta + h_z) \frac{\partial u_y}{\partial t} - (H_0 \sin \theta \sin \varphi + h_y) \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) + \frac{1}{\mu_e \sigma} \left(\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $c_l = \sqrt{\frac{K + 4/3 G}{\rho}}$ – скорость распространения продольной волны, $c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость распространения сдвиговой волны, $x = x_1, y = x_2, z = x_3$.

3. Распространение пучка продольных волн.

Будем предполагать, что ограниченный, слабо расходящийся, близкий к плоской волне пучок волн распространяется вдоль оси x . Рассмотрим область, в которой параметры нелинейности, дисперсии и дифракции имеют одинаковый порядок ($\sim \varepsilon$).

Перейдем в системе (5) к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_x}{\varepsilon \Lambda}, v = \frac{u_y}{\varepsilon \Lambda}, w = \frac{u_z}{\varepsilon \Lambda}, \\ x' &= \frac{x}{\Lambda}, y' = \frac{y}{\Lambda}, z' = \frac{z}{\Lambda}, t' = \frac{c_l t}{\Lambda}, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь Λ – длина волны; а также введем лучевые координаты:

$$\xi = x' - \tilde{c} t', \eta = \varepsilon x', \chi = \sqrt{\varepsilon} y', \zeta = \sqrt{\varepsilon} z', \quad (7)$$

где \tilde{c} – характерная безразмерная скорость волны, заранее неизвестная. Выбор лучевых переменных в виде (7) отражает тот факт, что в силу нелинейности, дисперсии и дифракционной расходимости величины u, v, w изменяются как вдоль направления распространения пучка ($\sim \varepsilon$), так и поперек ($\sim \sqrt{\varepsilon}$).

Подставим (6) и (7) в систему (5), сохраняя при этом члены с ε в степени, не выше первой. В этом случае система уравнений магнитоупругости (5) сводится к одному скалярному

уравнению для осевой деформации $U = \frac{\partial u}{\partial \xi}$, описывающему эволюцию волнового пучка:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right] + \gamma_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (8)$$

где

$$\alpha = \frac{c_A^2 \left(1 - \left(\frac{H_x}{H} \right)^2 \right)}{(5 + g + 3 \frac{c_A^2}{c_i^2})}, \beta = \frac{1}{\mu_e \sigma c_i A \sqrt{1 + \frac{c_A^2 \left(1 - \left(\frac{H_x}{H} \right)^2 \right)}{c_i^2}}},$$

$$\gamma_1 = \frac{\rho c_A^2 \left(1 - \left(\frac{H_x}{H} \right)^2 \right)}{K + \frac{1}{3} G}, \gamma_2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{c_A^2 \left(1 - \left(\frac{H_x}{H} \right)^2 \right)}{c_i^2} \right) \left(1 + \frac{\rho c_A^2 \left(1 - \left(\frac{H_x}{H} \right)^2 \right)}{K + \frac{1}{3} G} \right)},$$

$$\tilde{c} = \sqrt{1 + \frac{c_A^2 \left(1 - \left(\frac{H_x}{H} \right)^2 \right)}{c_i^2}}, g = \frac{2A + 6B + 2C}{\rho c_i^2}; A, B, C - \text{константы Ландау, } c_A = H_0 \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho}} -$$

скорость волны Альфвена [4]; H_x – проекция поля H на направление распространения волны.

Уравнение (8) совпадает с известным в теории нелинейных волн уравнением Хохлова – Заболоцкой [21], решение которого имеет вид:

$$U = U_1 - U_2 \operatorname{th} \left[-\frac{\alpha B}{2\beta} \xi + \sqrt{\frac{1}{4\gamma_1}} \chi + \sqrt{\frac{1}{4\gamma_2}} \zeta + \frac{2\beta^2 + \alpha^3 AB^2}{2\alpha\beta B} \eta \right], \quad (9)$$

где U_1, U_2 – произвольные постоянные.

Рассмотрим решение уравнения Хохлова – Заболоцкой при $U_1 = 2, U_2 = 1$ и проследим изменение ширины пучка вдоль каждой из координат в зависимости от величины внешнего магнитного поля. С учетом выбранных произвольных постоянных, выражения для ширины пучка вдоль осей имеет вид:

$$\Delta_\xi = -\frac{2\beta}{\alpha}, \Delta_\eta = \frac{\alpha\beta}{\beta^2 + \alpha^3}, \Delta_\chi = 2\sqrt{\gamma_1}, \Delta_\zeta = 2\sqrt{\gamma_2}. \quad (10)$$

Проследим изменение ширины пучка вдоль каждой из координатных осей в зависимости от ориентации внешнего магнитного поля. Изменение параметров в зависимости от углов представлено при $\frac{c_A}{c_i} = 0.5 \cdot 10^{-3}$. Выражения для ширины пучка вдоль осей

определяются формулами (10) в которых коэффициенты уравнения (8) зависят от углов $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Поверхности $\Delta_\xi(\varphi, \theta), \Delta_\eta(\varphi, \theta)$ и $\Delta_\chi(\varphi, \theta)$, представляющие собой зависимость ширины волнового пучка вдоль осей ξ, η и χ , соответственно, от углов θ и φ качественно идентичны и изображены на Рис.1-а:

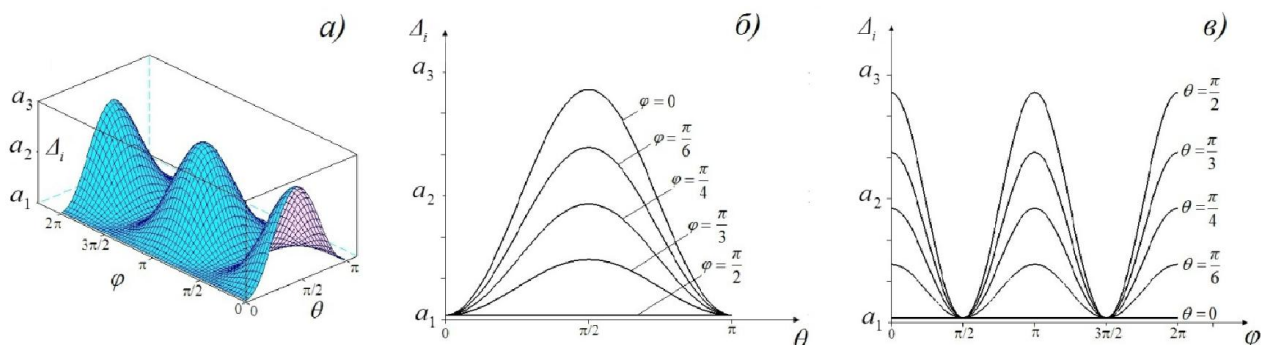


Рис. 1 а) Поверхность $\Delta_i(i = \xi, \eta, \chi)$, б) Сечения поверхности $\Delta_i(i = \xi, \eta, \chi)$ плоскостями $\varphi = const$, в) Сечения поверхности $\Delta_i(i = \xi, \eta, \chi)$ плоскостями $\theta = const$.

Значения величин a_1, a_2, a_3 для каждой из поверхностей приведены в Табл. 1:

	a_1	a_2	a_3
$\Delta_\xi(\varphi, \theta)$	$1.2124735 \cdot 10^{-4}$	$1.2124737 \cdot 10^{-4}$	$1.2124739 \cdot 10^{-4}$
$\Delta_\eta(\varphi, \theta)$	$8.710296 \cdot 10^{-7}$	$8.710299 \cdot 10^{-7}$	$8.710302 \cdot 10^{-7}$
$\Delta_\chi(\varphi, \theta)$	$2 - 14 \cdot 10^{-8}$	$2 - 7 \cdot 10^{-8}$	2

Табл. 1

Как видно из Рис. 1-б, на котором изображены сечения поверхностей $\Delta_\xi(\varphi, \theta), \Delta_\eta(\varphi, \theta)$ и $\Delta_\chi(\varphi, \theta)$ плоскостями $\varphi = const$, с ростом угла θ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ширина волнового пучка вдоль осей ξ, η и χ убывает. При $\theta = 0, \pi$ она принимает минимальное значение и не зависит от величины угла φ . При $\theta = \frac{\pi}{2}$ ширина волнового пучка вдоль осей ξ, η и χ принимает максимальное значение.

Из анализа сечений поверхностей $\Delta_\xi(\varphi, \theta), \Delta_\eta(\varphi, \theta)$ и $\Delta_\chi(\varphi, \theta)$ плоскостями $\theta = const$, представленных на Рис. 1-в, заключаем, что с ростом угла θ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ширина волнового пучка вдоль осей ξ, η и χ возрастает, а в зависимости от угла φ принимает свое максимальное значение при $\varphi = 0, \pi$. Ширина пучка вдоль осей ξ, η и χ при $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ принимает минимальное значение и не зависит от величины угла θ .

На Рис. 1-а изображена поверхность $\Delta_{\zeta}(\varphi, \theta)$, которая представляет собой зависимость ширины волнового пучка вдоль оси ζ от углов θ и φ :

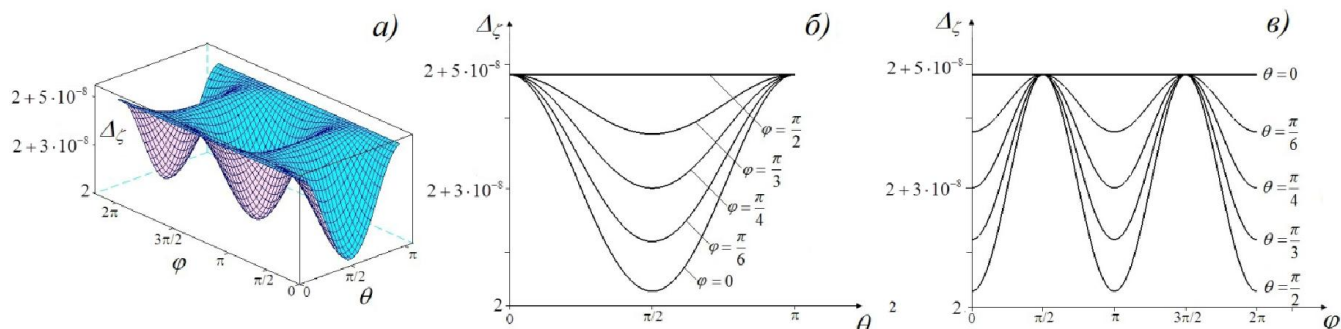


Рис. 1 а) Поверхность $\Delta_{\zeta}(\varphi, \theta)$, б) Сечения поверхности $\Delta_{\zeta}(\varphi, \theta)$ плоскостями $\varphi = const$, в) Сечения поверхности $\Delta_{\zeta}(\varphi, \theta)$ плоскостями $\theta = const$.

Как можно видеть из Рис. 1-б, на котором представлены сечения поверхности $\Delta_{\zeta}(\varphi, \theta)$ плоскостями $\varphi = const$, с ростом угла φ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ширина волнового пучка вдоль оси ζ возрастает. При $\theta = 0, \pi$ она принимает максимальное значение и не зависит от величины угла φ . При $\theta = \frac{\pi}{2}$ ширина волнового пучка вдоль оси ζ принимает максимальное значение.

Проводя аналогичные рассуждения для сечений поверхности $\Delta_{\zeta}(\varphi, \theta)$ плоскостями $\theta = const$, изображенных на Рис. 1-в, заключаем, что с ростом угла θ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ширина волнового пучка вдоль оси χ убывает, а в зависимости от угла φ принимает свое минимальное значение при $\varphi = 0, \pi$. Ширина пучка вдоль оси ζ при $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ принимает максимальное значение и не зависит от величины угла θ .

Сравним степень влияния ориентации магнитного поля и напряженности поля при его поперечной ориентации к направлению распространения волн на характеристики рассмотренного решения (9) уравнения (8) (Табл. 2):

$\Delta\Delta_{\xi 1}$	$\Delta\Delta_{\xi 2}$	$\Delta\Delta_{\xi 2}/\Delta\Delta_{\xi 1} \times 100\%$	$\Delta\Delta_{\eta 1}$	$\Delta\Delta_{\eta 2}$	$\Delta\Delta_{\eta 2}/\Delta\Delta_{\eta 1} \times 100\%$
$16 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-11}$	25,00%	$2 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-13}$	30,00%
$\Delta\Delta_{\chi 1}$	$\Delta\Delta_{\chi 2}$	$\Delta\Delta_{\chi 2}/\Delta\Delta_{\chi 1} \times 100\%$	$\Delta\Delta_{\zeta 1}$	$\Delta\Delta_{\zeta 2}$	$\Delta\Delta_{\zeta 2}/\Delta\Delta_{\zeta 1} \times 100\%$
$6 \cdot 10^{-7}$	$14 \cdot 10^{-8}$	23,33%	$2 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$	25,00%

Табл. 2

Здесь $\Delta\Delta_{\xi 1}, \Delta\Delta_{\eta 1}, \Delta\Delta_{\chi 1}, \Delta\Delta_{\zeta 1}$ – величина абсолютного изменения ширин решения (9) уравнения (8) вдоль координатных осей при изменении напряженности поперечно ориентированного магнитного поля, $\Delta\Delta_{\xi 2}, \Delta\Delta_{\eta 2}, \Delta\Delta_{\chi 2}, \Delta\Delta_{\zeta 2}$ – величина абсолютного изменения ширин вдоль координатных осей того же решения уравнения (8) при изменении

ориентации поля и его постоянной напряженности, при которой $c_A/c_l = 0.5 \cdot 10^{-3}$. Отношение величины абсолютного изменения характеристик волны (9) при изменении ориентации магнитного поля при его постоянной напряженности к величине абсолютного изменения характеристик волны при изменении напряженности поля и его поперечной ориентации колеблется от 23% до 30% в зависимости от направления вдоль которого рассматривается изменение параметров волны.

Таким образом в статье продемонстрирована возможность формирования локализованной магнитоупругой волны в трехмерной упругой среде и исследована зависимость параметров волны от ориентации магнитного поля.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-08-00776-а).

Список литературы

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. – Ереван: Изд-во ЕГУ, 2006. – 492 с.
3. Селезов И.Т., Селезова Л.В. Волны в магнитоупругих средах. Киев: Наукова думка, 1975. 160 с.
4. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф. Магнитотермоупругость электропроводящих тел. Киев: Наукова думка, 1982. 296 с.
5. Сибгатуллин Н.Р. Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. М.:Наука, 1984. 350 с.
6. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
7. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с. (Maugin G.A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. North-Holland, Amsterdam, 1988. 598 p.)
8. Kaliski S., Rymarz Cz., Sobczyk K. Vibration and Waves. Elsevier, Amsterdam. 1992. 382 p.
9. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М.: Едиториал УРСС. 2003. 336 с.
10. Неразрушающий контроль: Справочник в 8 томах / Под общ.ред. В.В. Клюева. Т.6: Магнитные методы контроля. Оптический контроль. Радиоволновой контроль. М.: Машиностроение. 2006. 832 с.
11. Физико-химические процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии / Под ред. А.А. Углова. М.: Наука. 1989. 268 с.
12. Ghaleb A.F., Ayad M.M. Nonlinear waves in thermo-magnetoelasticity. I. Basic equations. II. Wave generation in a perfect electric conductor // Int. J. Appl. Electromagn. and Mech. 1998. Vol. 9. No 4. P. 339-357. P. 359-379.
13. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 519 с.
14. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние магнитного поля на локализацию волны деформации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №1. С. 95-100.

15. Erofeyev V.I., Malkhanov A.O. Localized Magnetoelastic Waves Formation // International Review of Mechanical Engineering, 2010, v. 4, №5, p. 581-585.
16. Мальханов А.О., Ерофеев В.И. Магнитоупругая волна Римана в стержне // Нелинейный мир. 2009. Т. 7. №12. С. 933-936
17. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Нелинейные продольные локализованные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. №4. С. 5 – 15.
18. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Нелинейные локализованные продольные магнитоупругие волны в пластине, находящейся в произвольно ориентированном магнитном поле // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т.5. № 1.
19. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.:Наука. 1982. 620 с.
20. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 328 с.
21. Руденко О.В. К 40-летию уравнения Хохлова – Заболоцкой // Акустический журнал. 2010. т. 56. №4. с. 452-462.
22. Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Морозов А.Н. Локализация волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде // Электронный журнал "Труды МАИ". Выпуск 40.

Дата поступления статьи: 15 июля 2016 года.