

УДК 621.833.7

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГРАФОВ В СТРУКТУРНОМ АНАЛИЗЕ ВОЛНОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ.

© Геннадий Алексеевич Тимофеев, Евгений Олегович Подчасов

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия.*

[timga@bmstu.ru](mailto:timga@bmstu.ru)

**Аннотация.** Волновые зубчатые передачи за последние 50 лет получили очень широкое распространение в авиационной и космической технике, в электромеханических приводах промышленных роботов и различных станков. Это объясняется высокими качественными показателями волновых передач: малой кинематической погрешностью, высокой крутильной жесткостью и КПД, малыми габаритами и массой, которые достигаются за счет многопарности и многозонности волнового зацепления (распределения нагрузки между многими парами взаимодействующих зубьев гибкого и жесткого колес).

При неграмотном проектировании ВЗП могут возникнуть избыточные связи, наличие которых уменьшает КПД и долговечность, увеличивает статические моменты трогания и кинематическую погрешность передач. Для получения наилучших показателей ВЗП необходимо определить в конструкции избыточные связи и устранить их, т.е. синтезировать самоустанавливающийся механизм. Для этого в работе используется один из современных методов структурного анализа – метод графов. Этот метод позволяет найти в механизме контуры с избыточными связями и целенаправленно устранить их.

В самоустанавливающихся механизмах с ВЗП долговечность и КПД значительно выше, чем в подобных механизмах с избыточными связями, а габариты и масса, кинематическая погрешность и статический момент трогания ниже.

**Ключевые слова:** волновая зубчатая передача, электромеханический привод, избыточные связи, кинематическая погрешность, крутильная жесткость, КПД, статический момент трогания

## GRAPH METHOD USAGE FOR HARMONIC GEARING STRUCTURAL ANALYSIS

© Gennady A. Timofeev, Evgeny. O. Podchasov

*Bauman Moscow State Technical University  
(National research university of technology), Moscow, [Russia](http://www.bmstu.ru).*

[timga@bmstu.ru](mailto:timga@bmstu.ru)

**Abstract.** Harmonic drives became widely used in aerospace technique, mechatronic drives of robots and machine tools through last 50 years. It happened because of high quality of harmonic drives: they have low kinematic bias, high torsional stiffness and ECE, low weigh and overall sizes, which can be reached by means of multiple-tooth and multiple-zone contact of harmonic gearing (loads are distributed between many pairs of contacting teeth of rigid and flexible gear).

Harmonic drives incorrect design causes redundant constrains, which leads to ECE and longevity loss, static starting torque and kinematic bias increase. For the best harmonic drives parameters gaining it is necessary to find and eliminate redundant constrains, which means self-aligning mechanism synthesis. Modern method – graph method – is used for this purpose. It allows finding redundant contours in mechanism and eliminating them.

In self-aligning mechanism with harmonic drives longevity and ECE is much higher than in similar mechanisms with redundant constrains and overall sizes, mass, kinematic bias and static starting torque is lower.

**Key words:** Harmonic drive, mechatronic drive, redundant constrains, kinematic accuracy, torsional stiffness, energy conversion efficiency, static starting torque.

При проектировании и изготовлении механизмов повышенной точности с высоким КПД и малым статическим моментом трогания особое внимание должно быть уделено правильному выбору кинематической схемы механизма. Необходимо стремиться к созданию рациональных конструкций механизмов, не имеющих избыточных связей. Применение механизмов без избыточных связей позволяет получить ряд преимуществ [1 - 4]:

- а) расширяются допуски на изготовление звеньев;
- б) уменьшается чувствительность к изменению размеров, что особо важно для конструкций, работающих в широком температурном диапазоне;
- в) уменьшается трение и увеличивается КПД из-за уменьшения или полного отсутствия натягов в кинематических парах;
- г) уменьшаются до минимума зазоры в соединениях и зацеплениях, чему способствует самоустановка звеньев.

Однако при создании конструкций, к которым предъявляются высокие требования по крутильной жесткости и собственной частоте колебаний, рациональные конструкции не всегда приемлемы [1, 4, 5]. Наглядное представление о влиянии избыточных связей даёт, например, механизм параллельных кривошипов, используемый в волновой передаче с генератором волн внешнего деформирования [6].

В данной работе анализируются конструкции ВЗП с генераторами волн внешнего деформирования. Эти механизмы реализуют многозонное и многопарное волновые зацепления, которые обеспечивают им высокие кинематическую точность и крутильную жёсткость при небольших габаритных размерах и массе. Кроме того эти механизмы имеют малый приведённый к входному валу момент инерции [3]. Структурные схемы исследуемых конструкций показаны на рис. 1.

Для структурного анализа неважно, какое из колес в механизме остановлено. Важно правильно установить и обосновать классы кинематических пар.

**Обоснование классов кинематических пар**

Для подсчета числа избыточных связей и подвижностей, необходимо правильно определить, к какому классу кинематических пар относятся соединения звеньев в механизме. Проанализируем схемы механизмов, приведенные на рисунке 1, с этой точки зрения.

а) Гибкое колесо и корпус соединяются радиальными шарикоподшипниками, допускающими только вращение гибкого колеса вокруг своей оси. Следовательно, это соединение – пара  $V_2$  класса (обозначение классов кинематических пар приводится в соответствии с работой [1]).

б) Кривошипные (ведущие) валики также ставятся в корпус и крышку редуктора на радиальные шарикоподшипники. Отверстия под подшипники в крышке и корпусе растачиваются с одного установка деталей, поэтому можно принять (что обычно и делается в практике расчетов) два подшипника на каждом валике за одну пару  $V_2$  класса;

в) Постановка деформирующих шайб на шейки кривошипных валиков может быть осуществлена в двух вариантах:

- 1) при помощи радиальных шарикоподшипников;
- 2) при помощи сферических шарикоподшипников;

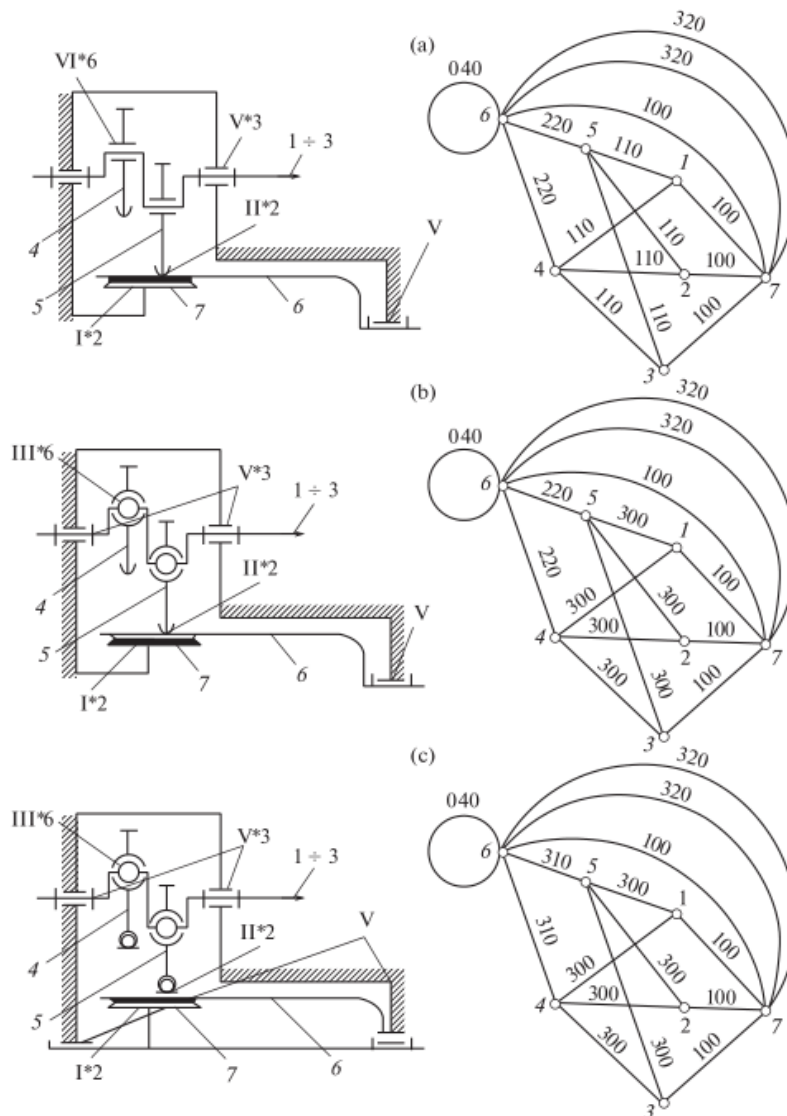


Рис. 1 Структурные схемы и графы ВЗП.

В первом случае данное соединение деформирующей шайбы по каждому из кривошипов считается парой  $V_2$  класса, а во втором -  $III_2$  класса. Последняя кинематическая пара допускает дополнительный перекося осей отверстий под подшипники в двух взаимно перпендикулярных плоскостях;

г) Деформирующие шайбы облегают гибкое колесо в двух зонах на дуге, равной (от  $60^\circ$  до  $120^\circ$ ). Ширина полосы контакта незначительна по сравнению с длиной дуги облегания, поэтому рассматриваемое соединение принимается кольцевым, т.е. парой  $III_4$  класса;

д) В зацеплениях гибкого колеса с жестким в несиловых приводах обычно имеет место точечный контакт. Это объясняется пространственными деформациями гибкого колеса и наличием двух зон зацепления. Данное сопряжение является парой  $I_2$  класса

е) Гибкое колесо волновой передачи является податливым деформированным звеном. Сама деформация является необходимым условием кинематики волнового зацепления и она происходит под действием усилий, неизмеримо меньших тех, которые могут вызвать такую

же по величине деформацию других звеньев волновой передачи. В самом гибком колесе точка контакта с деформирующими шайбами получает пространственное перемещение относительно своего недеформированного состояния. Это происходит вследствие прогиба зубчатого венца в местах контакта с деформирующими шайбами по отношению к заземленному сечению. Перемещение зубчатого венца вдоль оси гибкого колеса за счет податливости тонкостенной диафрагмы по сравнению с двумя другими перемещениями незначительно, поэтому им можно пренебречь. При наличии двух независимых зон зацепления получаем четыре линейные подвижности ( $2 \cdot \Pi_4$ ), характеризующие гибкое колесо. По результатам данного анализа проставляются классы кинематических пар в структурных схемах механизмов.

### Структурные схемы и графы ВЗП

Метод графов для структурного анализа волновых передач с генераторами волн внешнего деформирования был выбран по следующим соображениям. Обычно в теории структуры кинематических цепей используют уравнения Малышева А.П. [1] или Озола О.Г. [1, 3], по которым определяют число подвижностей и количество избыточных связей. Следовательно, дать точное представление об искомых величинах при отсутствии достаточного опыта структурного анализа они не могут. Метод Решетова Л.Н. [1], основанный на анализе подвижностей в контурах, позволяет определить не только количество, но и характер подвижностей и избыточных связей. Однако сложность метода возрастает с увеличением числа контуров. Трудности данного метода заключаются также в переходе из одной системы координат в другую даже в пределах одного контура.

Метод структурного анализа механизмов, разработанный Павловой Л.А. на базе общей теории графов [7], позволяет избежать трудностей метода Решетова Л.Н. и определить количество и характер подвижностей и избыточных связей в любых пространственных механизмах. Метод основан на анализе механизма взаимодействия контуров и использует аппарат теории графов. Структура механизма исследуется на его математической модели-графе. В графе механизма звенья образуют множество вершин, а кинематические пары - множество ребер.

Очевидно, что граф механизма содержит число вершин, равное числу звеньев ( $n$ ), и числу ребер, равное числу кинематических пар ( $p$ ). Класс и вид кинематических пар характеризуется трехзначным числом [7, 8], проставляемым в графе на соответствующих ребрах. На первом месте в трехзначном числе ставится количество независимых вращательных движений, допускаемых парой, на втором - поступательных, на третьем - винтовых. Тогда вращательная пара  $V_2$  класса запишется в виде 100, поступательная  $V_3$  - 010, винтовая  $V_4$  - 001, цилиндрическая  $IV_2$  - 110, шаровая  $III_2$  - 300 и т.д.

Если два звена механизма соединяются друг с другом более чем одной кинематической парой, в графе механизма соответствующие вершины соединяются числом ребер, кратность которых равна количеству кинематических пар. В гибких звеньях одна часть звена имеет относительно другой некоторую подвижность. На графе механизма это отражается наличием петли, соединяющей вершину саму с собой. Петля - это не кинематическая пара, это как бы условная кинематическая пара, характеризующая подвижности самого гибкого звена. Граф, допускающий наличие кратных ребер и петель, называется псевдографом. Граф механизма волнового редуктора - это псевдограф.

Контуром графа называется такая замкнутая чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой все вершины и ребра различны  $n > 3$ . Число независимых простых контуров ( $K$ ) называется циклическим рангом графа и определяется по формуле:

$$K = p - n + 1 \quad (1)$$

Набор независимых простых контуров можно получить несколькими способами. Один из них следующий. Из графа удаляется " $K$ " ребер так, чтобы в оставшемся дереве не было ни

одного контура. Прибавляя затем к дереву по одному ребру получают “К” контуров. Каждое ребро образует только один контур, поэтому все контуры независимы.

Сам структурный анализ состоит из следующих этапов :

а) По структурной схеме механизма составляется его  $(n, p)$  - граф.

б) Подсчитывается число независимых контуров по формуле (1);

в) Из графа удаляется “К” ребер таким образом, чтобы не осталось ни одного контура.

Оставшаяся часть графа - дерево;

г) К дереву добавляется одно ребро и таким образом создается первый контур. Ребро выбирается так, чтобы в первый контур входили ведущее звено и стойка;

д) Подсчитываются контурные подвижности ( $f_k$ ) и связи ( $p_k$ ). Расчет подвижностей в контуре производится по следующим правилам [7, 8]:

1) для замыкания контура требуется наличие шести подвижностей  $\|330\|$ ;

2) угловые ( $f''$ ) и винтовые ( $f'''$ ) подвижности кинематических пар могут заменять отсутствующие линейные подвижности ( $f'$ ) в контуре, обратная возможность отсутствует;

3) угловые подвижности одного звена могут заменить не более двух линейных подвижностей.

Определяются звенья и группы звеньев, имеющие подвижность по формуле:

Таблица 1. Расчет подвижностей и избыточных связей в контурах ВЗП к рис. 1,а.

Номер контура	Контур	Расчет связей и подвижностей в контурах	$f$	$P_k$
I		$110 + 110 + 100 = 420$ $420 - 330 = -010$	$W = 1$	$P_k'' = 1$
II		$100 + 110 = 210$ $210 - 330 = -120$		$P_k' = 2$ $P_k'' = 1$
III		$110 + 110 = 220$ $220 - 330 = -110$		$P_k' = 1$ $P_k'' = 1$
IV		$110 - 330 = -220$		$P_k' = 2$ $P_k'' = 2$
V		$220 + 220 = 440$ $440 - 330 = 110$	$f' = 1, f'' = 1$ $6 - 2f'$ $6 - 2f''$	
VI		$100 - 330 = -230$		$P_k' = 3$ $P_k'' = 2$
VII		$320 - 330 = -010$		$P_k' = 1$
VIII		$320 - 330 = -010$		$P_k' = 1$

$$f_r = \sum f - \|330\| - f_{1,2,3...r-1} - \epsilon r \quad (2)$$

где  $f_r$  - подвижность упорядоченной  $r$  - выборки звеньев (одного звена или группы звеньев в том порядке, в котором они идут по цепи контура);

$\sum f$  - сумма подвижностей всех кинематических пар данной  $r$ -выборки, включая крайние кинематические пары;

$f_{1,2,3...r-1} \in r$  - сумма подвижностей всех выборок звеньев порядков от 1 до  $(r - 1)$  принадлежащих  $r$ .

Вычитание по формуле матричное. Результат анализируется по п.п. д 2,3 и записывается в окончательном виде в таблицу.

е) Все сказанное в п. д. повторяется для другого ребра. Оно тоже образует с ветвями данного дерева независимый контур. В расчет по данному контуру входят только новые ребра, которые не принимали участия в предыдущем расчете.

ж) Продолжая далее аналогичным образом создается каждый новый контур, добавляемый ребром и ветвями дерева. Каждый последующий контур должен "присоединяться" к предыдущим теми ребрами, которые участвуют в расчете данного контура. В остальном порядок расчета контуров безразличен. Каждое ребро графа участвует в расчете только один раз. Если в графе имеется петля, ее подвижности относятся к расчету того контура, который содержит звено с петлей.

з) Проводится проверка расчетов по п.п. г-ж. Разность сумм подвижностей и связей должна равняться разности подвижностей и избыточных связей в механизме, подсчитанных по формулам Малышева А.П. [1] или Озола О.Г. [1 - 3]:

$$\sum f_k - \sum p_k = W - q = 6(n - 1) - \sum i \cdot p_i + m = f - 6k \quad (3)$$

и) Составляется контурная сеть, в которой каждый контур обозначается треугольником. В последний вносятся данные, полученные при расчете контуров по п.п. г - е: порядковый номер контура, номера звеньев, входящих в него, подвижности в контуре и контурные связи. Линии в контурной сети показывают, как контуры присоединяются друг к другу. На линиях ставятся номера вершин, к которым контур присоединяется ребрами, участвующими в расчете данного контура;

к) Анализ контурной сети проводится по следующим правилам:

1) угловые и винтовые контурные подвижности ( $f_k''$ ,  $f_k'''$ ) могут заменять отсутствующие угловые и линейные подвижности ( $p_k''$ ,  $p_k'$ ) в контурах, при этом угловые подвижности одного звена могут заменять не более двух отсутствующих линейных подвижностей в каждом из последующих контуров. Контурные линейные подвижности ( $f_k'$ ) могут восполнить отсутствие только линейных подвижностей в контурах;

2) подвижность может последовательно передаваться из предыдущего контура в последующий при условии, что контур, "нуждающийся" в подвижности (т.е. содержащий контурные связи), присоединяется к звену, имеющему эту подвижность (последняя может быть подвижностью группы звеньев, содержащих данное звено);

3) подвижность может последовательно передаваться через нормальный контур, такой, в котором отсутствуют контурные связи или они предварительно реализованы (п. к 2);

4) по одной линии контурной сети может быть передано столько подвижностей, сколько их имеет звено, характеризующее данную линию (с учетом п. к 1).

### Структурный анализ

Согласно вышперечисленным этапам проводим структурный анализ механизма волнового редуктора с кинематическими парами  $V_2$  класса в соединении деформирующих шайб с кривошипными валиками.

а) По структурной схеме механизма строим его граф (рис. 1,а)

б) Подсчитываем число независимых контуров по формуле (1):

$$K = p - n + 1 = 14 - 7 + 1 = 8$$

в) Из графа удаляем 8 ребер так, чтобы не осталось ни одного контура. Получаем дерево (рис. 2).

г) К дереву прибавляем ребро 4-1. Получаем первый контур.

д) Подсчитываем контурные подвижности и связи. Определяем звенья и группы звеньев, имеющие подвижности. Результаты расчетов вносим в таблицу.

е) Все сказанное в п.д. повторяем для ребра 4-3. В расчет по контуру войдут новые ребра 4-3 и 3-7.

ж) Продолжая далее аналогичным образом, проводим расчет всех остальных контуров. Данные расчетов вносим в таблицу 1.

з) Проводим проверку расчетов по формуле (3). Для рассматриваемого механизма:

и) Составляем контурную сеть (рис. 2).

к) Проводим анализ контурной сети по п.п. к. 1, 2, 3. Анализируя контурную сеть, видим, что избыточные линейные подвижности имеются в V контуре у звена 6. Шестое звено входит в контуры VI, VII и VIII, в которых отсутствуют линейные подвижности.

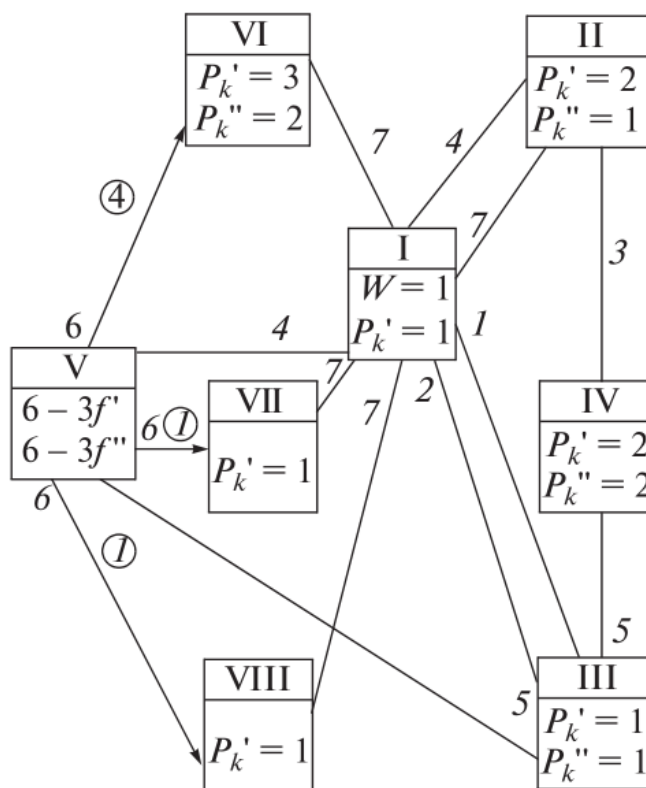


Рис. 2 Контурная сеть ВЗП к рис. 1,а.

Согласно правилам, приведенным в методике анализа, эти отсутствующие подвижности могут быть заменены “лишними” подвижностями контура V. В результате в механизме редуктора остается основная подвижность  $W = 1$  и семнадцать не устранимых контурных связей, являющихся избыточными.

Таблица 2. Расчет подвижностей и избыточных связей в контурах ВЗП к рис. 1,б.

Номер контура	Контур	Расчет связей и подвижностей в контурах	$f$	$P_k$
I		$100 + 100 + 300 + 300 = 800 + 500$ $800 - 330 = -030$	$W = 1$ $f'' = 1$	$P_k' = 0$

II		$100 + 300 = 400 + 100$ $400 - 330 = -030$		$P'_k = 2$
III		$300 + 300 = 600 + 300$ $600 - 330 = -030$	$f'' = 1$	$P'_k = 1$
IV		$300 + 300 = -330$		$P'_k = 3$
V		$220 + 220 = 440$ $440 - 330 = 110$	$f' = 1, f'' = 1$ $6 - 2f'$ $6 - 2f''$	
VI		$100 - 330 = -230$		$P'_k = 3$ $P''_k = 2$
VII		$320 - 330 = -010$		$P'_k = 1$
VIII		$320 - 330 = -010$		$P'_k = 1$

Уменьшение числа избыточных связей в механизме может быть достигнуто путем снижения классов кинематических пар. Для уменьшения числа избыточных связей была разработана конструкция волнового редуктора с кинематическими парами III<sub>2</sub> в местах соединения деформирующих шайб с кривошипными валиками (см. рис. 1,б).

Структурная схема, граф и контурная сеть механизма показаны на рисунках 1,б и 3. Результаты расчета подвижностей и связей в контурах сведены в таблицу 2.

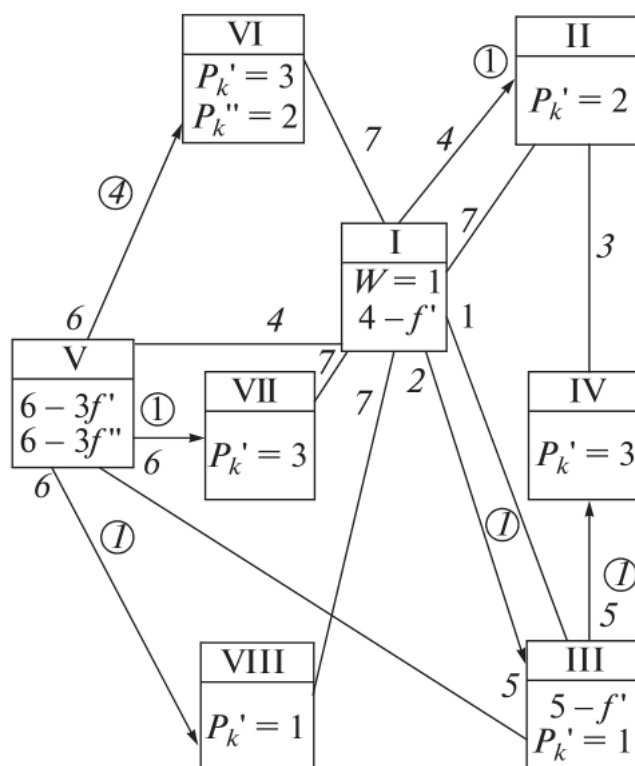


Рис. 3 Контурная сеть ВЗП к рис. 1,б.



Анализ контурной сети (рис. 3) новой схемы показывает, что в механизме редуктора осталось пять избыточных связей. Устранить эти связи, обусловленные особенностями механизма параллельных кривошипов, можно путем введения дополнительных звеньев между кривошипными валиками и деформирующими шайбами. На конструкцию такого механизма параллельных кривошипов получено авторское свидетельство [9].

Структурный анализ конструкции волнового редуктора по рис. 1, в аналогичен уже описанным. Подшипники качения, запрессованные внутрь деформирующих шайб генератора волн, можно рассматривать как пассивные звенья, так как они не влияют на закон движения выходного вала и служат лишь для уменьшения потерь на трение в кинематической паре “генератор волн - гибкое колесо”.

Проведен структурный анализ конструкций исследуемых волновых зубчатых передач методом графов, установлены количество и местонахождение избыточных связей, показаны возможности их уменьшения или полного устранения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Решетов Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. М.: Машиностроение, 1991. 288с.
2. Волков Д.П., Крайнев А.Ф. Трансмиссии строительных и дорожных машин. Справочное пособие. М.: Машиностроение, 1974. 424с.
3. Конструирование машин: Справочно-методическое пособие: В 2т. Т.1 /К.В. Фролов, А.Ф. Крайнев, Г.В. Крейнин и др.; Под общ. ред. К.В. Фролова. –М. Машиностроение, 1994. 528с.
4. Крайнев А.Ф. Идеология конструирования. Многопоточность передачи энергии: // Инженерный журнал. – Справочник. 1997. №7. С. 28 – 31.
5. Тимофеев Г.А, Разработка методов расчёта и проектирование волновых зубчатых передач для приводов следящих систем. Дисс. д-ра техн. наук. –М.: ИМАШ РАН, 1997. 358 с.
6. В.Б. Тарабарин, Г.А. Тимофеев Волновая передача. Авторское свидетельство СССР № 541057, МКИ F 16 H 1/00 // Б.И. 1976. № 48
7. Павлова Л.А. Метод графов в структурном исследовании пространственных механизмов. Дисс. канд. техн. наук. – М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1976. -180с.
8. Тимофеев Г.А., Самойлова М.В. Использование метода графов в структурном анализе планетарно-волнового механизма // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2010. №2. С. 3 – 14
9. Л.Н. Решетов, В.В. Каганова, Н.Л. Решетов, Г.А. Тимофеев Кривошипно-планетарный механизм. Авторское свидетельство СССР № 1702020 A1SU, МКИ F 16 H 21/00 // Б.И. 1991. №48.

*Дата поступления: 7 июля 2016 года.*