

УДК 534.1

К ТЕОРИИ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ© ^{1,2} **Виталий Львович Крупенин,**

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Россия, Москва

²Московский государственный университет печати, Россия, Москва
krupeninster@gmail.com

Аннотация. Описана представительная группа динамических систем, анализ которых даёт возможность получить представления о распространении и генерировании широкополосных вибрационных процессов в машиностроительных конструкциях. Рассмотрены необходимые модели сильно нелинейных сплошных сред со сложной структурой, относящиеся к классу «несущая среда плюс амортизированные виброударные системы». Предполагается немгновенность соударений. Выводятся определяющие соотношения и даются примеры расчета.

Ключевые слова: нелинейная среда сложной структуры, немгновенный удар, импульс ударного взаимодействия, время взаимодействия, уравнение Ламе, стержень, мембрана, решетчатая конструкция, оборудование, ударный осциллятор.

ON THE THEORY OF STRONGLY NONLINEAR MEDIA WITH COMPLEX STRUCTURES© ^{1,2} **Vitaly L. Krupenin**

¹IMASH RAS, Russia, Moscow

²Moscow State University of Printing Arts, Russia, Moscow
krupeninster@gmail.com

Abstract. Representative group of dynamical systems, the analysis of which allows to obtain ideas about the dissemination and generation of a broadband vibration processes in engineering structures is described. Considered necessary strongly nonlinear models of continuous media with complex structure, belonging to the class "carrier medium plus amortized vibroimpact system." It is expected to nephewincest collisions. Displays constitutive relationships and examples of calculation.

Keywords: nonlinear continuum of complex structure, non-momentary impact, the momentum of impact interaction, interaction time, Lamé equation, rod, membrane, grid construction, equipment, impact oscillator.

1. Известно [1–2], что вибрация передается от точки к точке посредством виброводов (волноводов) - сред, в которых упругие волны из-за наличия ограничивающих поверхностей распространяются в направлениях, зависящих только от конструктивных особенностей вибропроводящего объекта и от характера взаимодействия элементов конструкций между собой. Разработанные в последнее время методы акустической динамики машин,

включающие в себя, в частности, методы анализа особенностей распространения вибрации и борьбы с нею, основаны на предположении о линейности виброводов или их слабой нелинейности. Однако, появление в виброводе хотя бы одного разрыва [3, 4], приводящего к соударениям элементов его конструкции, вызывает существенное изменение динамических качеств системы в целом и *вибропроводящая* среда одновременно оказывается и *виброгенерирующей*. То же происходит и в случае, когда соударяются элементы, непосредственно связанные с виброводом. Если подобные («паразитные») ударные пары редки и от точек ударов до точек наблюдения вибровод линеен, то генерируемая широкополосная вибрация после прохождения через реально присутствующие механические фильтры может рассматриваться как некий высокочастотный шум малой интенсивности. При наличии же большего числа ударных пар, каким-либо образом присоединенных к виброводу и непосредственно связанных с процессом передачи вибрации, упругая передающая среда из линейной превращается в сильно нелинейную. В этом случае использование традиционных методов расчета - проблематично.

В работе [1] рассмотрены, в частности, линейные (или близкие к таковым) специфические модели сплошных сред сложной структуры. Одной из особенностей этих моделей, оказывается наличие двух своеобразных "частей среды" - "несущей" и "присоединенной". Соответственно уравнения динамики таких сред состоят из двух групп уравнений. Первая - описывает несущую часть, вторая - присоединенную. Как и всякая модель мультиполярной механики здесь существенной ревизии подвергается понятие точки, состояние которой может определяться произвольным числом кинематических параметров. Указанный подход, наряду с другими, получил, принципиальное развитие в диссертации [5] и далее.

В работах [3, 6 - 8] рассмотрены сильно нелинейные модели подобных сред, в которых для учета множественных соударений в компонентах присоединенного оборудования использовались распределенные ударные элементы. Такие модели позволяют дать описание процесса формирования, а также и распространения вибрационных полей в сложных составных конструкциях. Кроме того, указанные модели дают возможность получить ряд расчетных формул и значимых определяющих соотношений. Необходимость обращения к ним диктуется, прежде всего, тем обстоятельством, что в машинных конструкциях именно множественные систематические соударения элементов подсистем часто "ответственны" за вид формируемых глобальных виброполей и за виброактивность конструкций в целом.

Возвращаясь к упомянутым двум группам уравнений движения, во-первых, как обычно, постулируем существование упругой (упруго-вязкой) несущей среды. То есть модель необходимо содержит уравнения движения несущих частей (примеры: классическое уравнение Ламе, уравнение продольных или поперечных колебаний стержней, и т. д.), к которым добавляются граничные условия.

Во-вторых, в предположении, что соударения как бы "размазаны" по некоторой пространственной области, к уравнениям несущих частей добавляются уравнения движения присоединенного оборудования. Механизм связности, обеих частей определяет глобальную структуру генерируемого вибрационного поля.

2. Итак, в достаточно представительном случае постулируется существование некоторой упругой-диссипативной несущей среды, описываемой вектором перемещений $u(x, t)$ ($u, x \in \mathbf{R}^3$, $x \in \Xi \subseteq \mathbf{R}^3$, $t \in \mathbf{R}$), подчиняющейся классическому уравнению Ламе с диссипативным членом (ср.[1, 7])

$$\rho u_t = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \mu \Delta u + D[u] + F, \quad (1)$$

где ρ - плотность среды, λ , μ - параметры Ламе, характеризующие ее упругие свойства, Ξ - область изменения координаты; Δ - лапласиан; $D[\dots]$ - оператор, отвечающий диссипативным потерям. Пусть внешние (объемные и поверхностные) силы $F = F_1 + F_0$,

где F_1 - заданный вектор, а F_0 – воздействие присоединенных систем, содержащих ударные пары.

Отметим, что, вообще говоря, модель несущей среды может сама по себе иметь сложную структуру, так что уравнение (1) может быть заменено более общим. К уравнению (1) должны быть поставлены граничные условия.

Пусть присоединённое оборудование – упруго амортизировано:

$$F_0(x, t) = -c_1(x)[u(x, t) - y_1^{(I)}(x, t)] - c_2(x)[u(x, t) - y_1^{(II)}(x, t)] \quad (2)$$

где предполагается, что в каждой точке среды подвешена взаимодействующая (ударная) пара, состоящая из двух контактирующих линейных стационарных склерономных подсистем $A^{(I)}(x)$ и $A^{(II)}(x)$, каждая из которых описывается конечным набором функций $y_j^{(I,II)}(x, t); j=1, 2, \dots, N$.

Предположение об одинаковом числе степеней свободы обеих подсистем, очевидно, сделано для удобства: лишние степени свободы могут быть фиктивными. Точки подвеса были обозначены в (2) $y_1^{(I,II)}(x, t)$; точки контакта будем обозначать $y_n^{(I,II)}(x, t), n \leq N$. Предположим, что подсистемы $A^{(I,II)}(x)$ определяются семействами распределенных операторов динамической податливости: $L_{qk}^{(I,II)}(x; p) = O(p^{-2}), p \rightarrow \infty$; индексы q и k изменяются от 1 до N ; $p = \partial/\partial t, x, z \in \Xi \subseteq \mathbf{R}^3$.

Здесь и ниже всегда будем предполагать, что взаимодействие в каждом элементе – прямое, центральное и одномерное: пусть $y^0 = y_n^{(II)} - y_n^{(I)}$ - относительное сближение точек контакта; координата y^0 изменяется вдоль некоторой оси. Сила взаимодействия $\Phi_1(y^0, y_t^0) = \lambda\Phi(y^0) + \Phi_2(y^0, y_t^0)$; $\lambda \gg 1$ – большой параметр [10]. Здесь первый член в правой части определяет упругую составляющую силы взаимодействия, а второй – диссипативную. Функция Φ_1 и определяет гипотезу, вообще говоря, немгновенного (неньютоновского) удара; она может и непосредственно зависеть от x , так как характер взаимодействия может меняться от точки к точке. Предположим, что функция Φ является пороговой функцией [6, 9]:

$$\Phi(y^0) \in \{\Phi\}_\Delta \equiv \{\Phi(y^0); \Phi(y^0) = \psi(y^0 - \Delta)\eta(y^0 - \Delta); \Delta \geq 0; \psi(y^0) \equiv 0; y^0 \geq 0\},$$

где $\psi(u)$ - непрерывно дифференцируема на всей числовой оси, монотонно возрастает и является выпуклой при $u \geq 0$ (рис. 1); $\eta(u)$ – единичная функция. В случае отказа от концепции ньютоновского взаимодействия, диссипативная составляющая Φ_2 также описывается некоторой пороговой функцией [6, 9]. Методы анализа таких систем изложены в [6 - 10].

Для точек подвеса и взаимодействия имеем операторные уравнения:

$$y_1^{(I,II)} = L_{11}^{(I,II)}(p)c_{1,2}(x)u \pm L_{n1}^{(I,II)}(p)\Phi_1(y^0, y_t^0) + f_1^{(I,II)}, \quad (3)$$

$$y_1^{(I,II)} = L_{nn}^{(I,II)}(p)c_{1,2}(x)u \pm L_{nn}^{(I,II)}(p)\Phi_1(y^0, y_t^0) + f_n^{(I,II)}, \quad (4)$$

причем здесь для системы $A^{(I)}$ в (3) и (4) выбираем знак "плюс", для $A^{(II)}$ - "минус". В эти же уравнения могут быть внесены какие-либо функции $f^{(I,II)}_{1,n}$, описывающие дополнительные внешние воздействия.

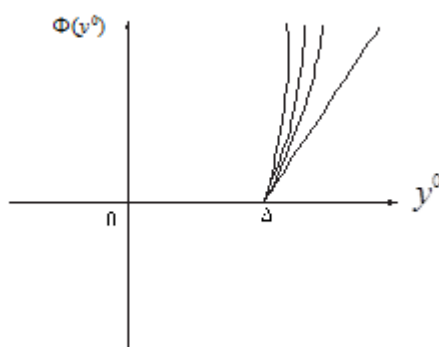


Рис.1

Механизмы связи, несущей и присоединенной частей определяют структуру глобального виброполя. Этот подход жертвует информацией об особенностях конкретных элементов системы, а также об эффектах, проявление которых возможно только при учете дискретности модели.

3. Предложенная выше модель сложна для анализа и нуждается в упрощениях. Приведем примеры более реалистичных моделей такого рода.

2D-структура несущей части. Дискретная модель. Рассмотрим струнную решетку [10, 11], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих линейных струн, закреплённых на концах и имеющих длины L_1 и L_2 (рис. 2). Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0, 1, \dots, N_1$ и $q = 0, 1, \dots, N_2$. В узлах - точечные абсолютно твердые тела с массами m_{kq} .

Предполагается, что ячейки решетки – одинаковые и прямоугольные, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка - анизотропная. Струны - безынерционны. Их крепления в узлах считаются абсолютно жесткими, а натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину ΔL_1 ; «вертикальная» - ΔL_2 ; «горизонтальные струны» имеют натяжение T_1 , а «вертикальные» - T_2 . Таким образом, динамика решетчатой конструкции может быть описана при посредстве функций смещения узлов решетки $u_{kq}(t)$; $k=0, 1, \dots, N_1$; $q=0, 1, \dots, N_2$. Каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки.

Считаем все действующие неконсервативные силы малыми. Обозначим их $\varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq})$, ε - малый параметр. Так как каждая частица лежит на двух струнах, то получаем N уравнений движения ($N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$):

$$m_{kq} \ddot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq} - u_{(k-1,q)} - u_{(k+1,q)}) + c_2(2u_{kq} - u_{(k,q-1)} - u_{(k,q+1)}) = \varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq}) + F_{kq}. \quad (5)$$

Здесь обозначено: $c_{1,2} = T_{1,2}/\Delta L_{1,2}$ – коэффициенты упругости.

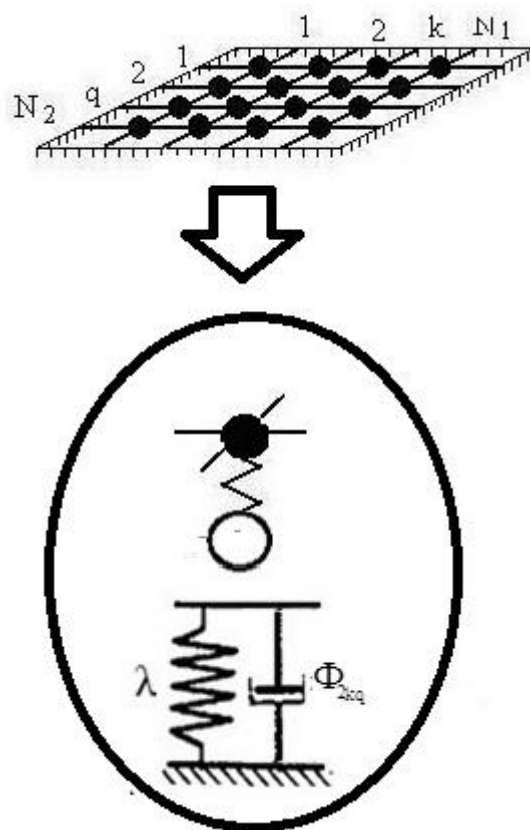


Рис.2

Граничные условия защемления можно записать как ([10]) $u_{kq}=0$, при $k=0;N_1$; $q=0;N_2$. Уравнения (5) представляют собой первую группу уравнений; в дискретной модели они описывают несущую часть среды со сложной структурой. Пусть в каждом узловом телем решетки подвешен так называемый ударный осциллятор [9] (рис. 2). Пусть далее: w_{kq} - координата тела, образующего осциллятор; M_{kq} – его масса; Ω_{kq} - собственная частота; Δ_{kq} – значения установочных зазоров (натягов); $k=0, 1, \dots, N_1$; $q=0, 1, \dots, N_2$. Таким образом, уравнения движения присоединенного оборудования будут такими:

$$M_{kq} \ddot{w}_{kq} + M_{kq} \Omega_{kq}^2 (w_{kq} - u_{kq}) + \Phi_{1kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq}) = \varepsilon f_{kq}(t, w_{kq}, \dot{w}_{kq}), \quad (6)$$

где $f_{kq}(t, w_{kq}, \dot{w}_{kq})$ – дополнительные силы, действующие на осциллятор.

Отсюда видно, что в уравнении (5) силы $F_{kq} = M_{kq} \Omega_{kq}^2 (w_{kq} - u_{kq})$.

Силы взаимодействия определяются пороговыми функциями (см. п.2 и [10]): $\Phi_{1kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq}) = \lambda \Phi_{1kq}(w_{kq}) + \Phi_{2kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq})$, $\lambda \gg 1$. Полагаем, что при $\lambda \rightarrow \infty$ рассматриваемые гипотезы взаимодействия переходят в гипотезу Ньютона: удар - мгновенный, сила удара даётся сингулярной обобщенной функцией. Строго говоря, это положение должно постулироваться, так как построить его корректное доказательство удаётся только в предположении упругости взаимодействия [9].

Необходимо найти перемещения $\{u_{kq}, w_{kq}\}$ при заданных силах $\{g_{kq}, f_{kq}\}$.

2D – структура несущей части. Континуальная модель. В системе (5), (6) перейдем к длинным волнам, считая, для простоты что при всех k и q : $m_{kq}=m$. Пусть число струн в обоих семействах достаточно велико и величины $\Delta L_{1,2}$ малы. Пусть в то же время, величины $\gamma = m/(\Delta L_1 \Delta L_2)$ – поверхностная плотность, а также $\theta_x = T_1/\Delta L_1$, $\theta_y = T_2/\Delta L_2$ – погонные натяжения – имеют порядки $O(1)$. Систему уравнений движения (1) можно континуализировать, рассматривая её как конечно-разностный аналог непрерывной системы с распределенными

параметрами. При этом рассмотрим достаточно гладкую функцию $u(x, y, t)$, совпадающую (в данном случае) в узлах решетки с исходными функциями $u_{kq}(t)$.

Выражения $(2u_{kq}-u_{(k-1,q)}-u_{(k+1,q)})$ и $(2u_{kq}-u_{(k,q-1)}-u_{(k,q+1)})$ заменим их аналогами:

$$2u_{kq}-u_{(k-1,q)}-u_{(k+1,q)}=2u(x, y, t) - u(x-\Delta L_1, y, t) - u(x+\Delta L_1, y, t);$$

$$2u_{kq}-u_{(k,q-1)}-u_{(k,q+1)}=2u(x, y, t)-u(x, y-\Delta L_2, t)-u(x, y+\Delta L_2, t)$$

Тогда уравнение (5) можно представить, как

$$\gamma\Delta L_1\Delta L_2u_{tt}=\Delta L_1\Delta L_2(\theta_x u_{xx}+\theta_y u_{yy})+(\Delta L_1)^3(\Delta L_2)(\theta_x/12)u_{xxxx}+(\Delta L_1)(\Delta L_2)^3(\theta_y/12)u_{yyyy}+\dots$$

Здесь вместо разностей, определяющих (1) выписаны отвечающие им ряды по степеням ΔL_1 и ΔL_2 . В данном случае с точностью до малых порядка $O[(\Delta L_{1,2})^2]$, в исходном приближении приходим к уравнению анизотропной мембраны: $\gamma u_{tt} - \theta_x u_{xx} - \theta_y u_{yy} + \dots = \varepsilon g(t, u, u_t, \dots) + O[(\Delta L_{1,2})^2]$.

Если рассмотреть наиболее популярную модель изотропной мембраны, когда натяжения равны: $\theta_x = \theta_y \equiv \theta$ при $\varepsilon = 0$, приходим к хорошо известному и досконально изученному уравнению классической натянутой по контуру мембраны, прогиб которой $u = u(t, x, y)$: $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$, $c^2 = \theta \gamma^{-1}$.

Граничные условия, взятые выше для решетки, приводят к заземленной по всем краям мембране. Если длины её сторон l_1 и l_2 , то условия заземления записываются так: $u(0, y, t) = u(l_1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l_2, t) = 0$.

Таким образом, учитывая представления для фигурирующей в (1) силы F получим следующее уравнение несущей части среды:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + M(x, y) \Omega^2(x, y)(w - u) + \varepsilon g(t, u, \dot{u}), \quad (7)$$

Здесь силы и другие физические факторы заменены их распределениями по площади. Уравнения (6) трансформируются так:

$$M(x, y)w_{tt}(t, x, y) + M(x, y) \Omega^2(x, y) [w(t, x, y) - u(t, x, y)] + \Phi_1(w, w_t) = \varepsilon f(t, w, w_t), \quad (8)$$

Уравнения (7), (8) дают простейшую модель *двумерной* сильно нелинейной среды сложной структуры. Обобщение может быть выполнено при рассмотрении более сложных моделей несущих сред (пластины, балочные и стержневые решетки и т. д.) и, естественно, за счет более общих моделей присоединенного оборудования (п.2). В работе [13] при рассмотрении дискретной модели, подверженной случайному широкополосному возбуждению изучалась решетка с присоединенными упругими цепочками точечных тел, снабженных одно- и двухсторонними ограничителями хода. В случае ньютоновского взаимодействия анализ данной модели частично проводился в работе [11].

Оснащенный сильно нелинейный стержень. Одномерный аналог модели (1) – (4) изучен наиболее подробно [6, 8]. Вместо уравнения (1) имеем для стержня длины l :

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} + c_1(u - y_n^{(I)}) + c_1(u - y_n^{(II)}) - D[u] + F = 0, \quad x \in [0, l], \quad (9)$$

граничные условия: $u(0, t) = 0$; $Eu_x(l, t) = P \cos \omega t$ [$u(l, t) = \mu \cos \omega t$]. Смысл обозначений очевиден. Соотношения (2) - (4) сохраняют свой вид.

На рис.3. показана континуальная модель сильно нелинейного вибровода с упруго амортизированным оборудованием. Здесь показана несущая часть системы и символически - присоединенное оборудование (взаимодействующие в буферах подсистемы $A^{(I)}(x)$ и $A^{(II)}(x)$).

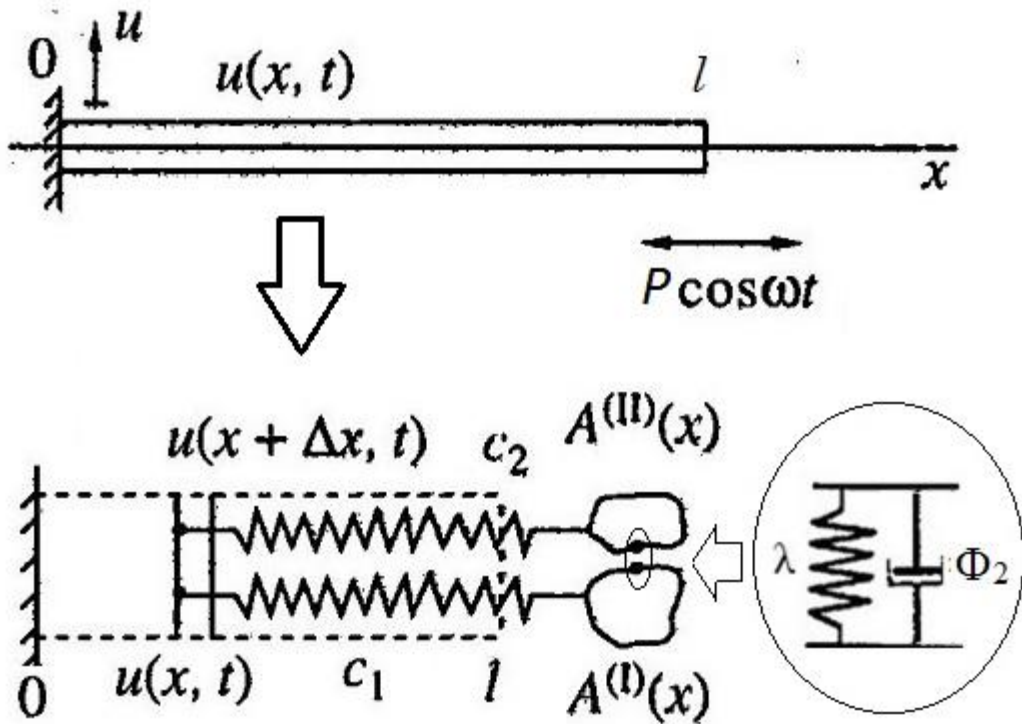


Рис.3

Стержень с внутренними разрывами. На рис. 4 приведена дискретная модель стержня с внутренними разрывами. При большой концентрации упруго связанных систем, снова можно перейти к длинноволновому приближению. Постулируем существование одномерной среды с определяющими уравнениями

$$\rho u_{tt} - Eu_{xx} - \Phi_1(y^0, y_t^0) = 0, \quad (10)$$

$$m(y_{tt}^0 + u_{tt}) + \Phi_1(y^0, y_t^0) = 0. \quad (11)$$

где ρ и E - погонная масса и модуль Юнга стержня, по длине которого как бы "размазывается" взаимодействующее оборудование; m - погонная масса распределенных ударных элементов; $y^0(x, t)$ - распределение их относительного смещения. Граничные условия, приведены после уравнения (9).



Рис.4.

Отметим, что использование этой модели ограничено, из-за того, что здесь оказывается возможным выйти за рамки непрерывных решений и в определенных частотных диапазонах модель должна быть уточнена.

Замечания. Виброполя в рассматриваемых объектах определяются двумя основными механизмами.

Присоединенное оборудование действует на несущую часть подобно ударным гасителям вибрации (ср. [1]). Исключение составляют узкие частотные зоны, вблизи собственных частот линейных колебаний, где это действие подобно линейным гасителям. Несущая часть осуществляет фильтрацию проходящей вибрации. Именно эти механизмы, проявляясь по-разному в разных точках несущих конструкций и могут порождать специфические динамические эффекты.

Заканчивая краткий обзор моделей типа «линейная несущая среда плюс взаимодействующее присоединенное оборудование», заметим, что при записи необходимых уравнений движения могут использоваться разные предположения о структуре взаимодействующих элементов. Контакттировать могут две подсистемы или присоединенное оборудование может взаимодействовать с неподвижными ограничителями или речь может идти о двухсторонних элементах и т. д.

4. Предположим далее, что взаимодействие – упругое: $\Phi_1(y^0, y_i^0) = \lambda\Phi(y^0)$ (п. 2). Если принята гипотеза о мгновенном взаимодействии ($\lambda \rightarrow \infty$), то сила удара выражается сингулярными обобщенными функциями. Для анализа процессов и систем, в которых важно учесть конечную продолжительность взаимодействия был предложен метод сингуляризации [9, 10], в соответствии с которым, приняв во внимание переход к длинноволновому приближению, запишем при осуществлении одиночного взаимодействия

$$\lambda\Phi[y^0(x, t)] \approx J_\lambda(x)\delta[t - \varphi_\lambda(x) - \tau_\lambda(x)], \quad (12)$$

где $J_\lambda(x)$ – плотность импульса взаимодействия; $\varphi_\lambda(x)$ – распределение моментов начала взаимодействия; $\tau_\lambda(x) = 1/2 t_\lambda(x)$; $t_\lambda(x)$ – распределение времен взаимодействия; $\delta(x)$ – δ -функция Дирака; $x \in \Xi_1$ - область взаимодействия.

Обозначим $\Delta(x)$ – распределение координат начала (и, соответственно, окончания) взаимодействия:

$$y^0[x, \varphi_\lambda(x)] = y^0[x, \varphi_\lambda(x) + t_\lambda(x)] = \Delta(x). \quad (13)$$

Плотность импульса и полный импульс взаимодействия:

$$J_\lambda(x) = \int_0^{t_\lambda(x)} \lambda\Phi[y^0(x, t)] dt; \quad I_\lambda = \int_{\Xi_1} J_\lambda(x) dx. \quad (14)$$

Функции $J_\lambda(x)$ и $\varphi_\lambda(x)$ определяются при конкретизации задачи и, в конечном итоге, определяют вид искомых решений. При рассмотрении T -периодических процессов, сила (12) выражаются через T -периодическую δ -функцию (гребенку Дираку) или двойную гребенку Дирака в случае симметричного двухстороннего ограничителя:

$$\delta^T(t) = T^{-1} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \exp(i\sigma\omega t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(t - KT), \quad \omega = 2\pi/T^{-1},$$

$$\delta^{T/2}(t) = \frac{1}{2} T^{-1} \sum_{\sigma=-\infty}^{\infty} \exp[i(2\sigma+1)\omega t] = \sum_{K=-\infty}^{\infty} [\delta(t-KT) - \delta(t-T/2-KT)], \quad \omega = 2\pi/T^{-1}.$$

5. Множество искомым полей перемещений структурных элементов среды имеет вид $\mathbf{U} = \{u(x, t); y_0(x, t); y_1(x, t); \dots; y_N(x, t)\}$, причем первый элемент здесь описывает несущую часть среды, а остальные – присоединённые части. В рассматриваемых моделях нелинейные силы определяются только присутствием подсистем, взаимодействующих между собой или с фиксированными ограничителями. Для моделей рассматриваемого вида можно указать структуру элементов множества \mathbf{U} . Поле перемещений $u(x, t)$ складывается как результат действия внешних (массовых и поверхностных) сил – обозначим его $u_I(x, t)$ – и результата действия сил взаимодействия в присоединенном оборудовании, то есть

$$u(x, t) = u_I(x, t) + \int_{\Xi_1 - \infty}^t V(x, z, t - s) \Phi_1[y^0(x, s), y_i^0(x, s)] ds dz, \quad (15)$$

где $V(x, z, t - s)$ – соответствующая функция Грина, определяемая структурами линейных систем – несущей и присоединенной частями среды. Для взаимодействующих элементов среды (присоединенные части) найдем представления типа:

$$y_q(x, t) = y_{q1}(x, t) - \int_{-\infty}^t H_q(t - s) \Phi_1[y^0(x, s), y_i^0(x, s)] + \\ + \int_{\Xi_1 - \infty}^t \int Y_q(x, z, t - s) \Phi_1[y^0(x, s), y_i^0(x, s)] ds dz, \quad (16)$$

где $y_q(x, t)$ – перемещение структурного элемента одной из взаимодействующих подсистем; $H_q(t - s)$ – функция Грина в точке взаимодействия: второй член в правой части (16) – суть перемещение, возникающее как непосредственный результат взаимодействия в данной точке; в то время, как третий член – перемещение, возникающие вследствие взаимодействия, но появляющиеся в результате вызванного им движения других структурных элементов среды; $Y_q(x, z, t - s)$ – соответствующая функция Грина. Теперь легко записать соотношения для относительной координаты и других элементов среды.

При анализе периодических виброударных процессов в уравнениях (15), (16) целесообразно перейти к периодическим функциям Грина (ПФГ). Примеры анализа подобных моделей в случае принятия аналогов гипотезы Ньютона даны в работах [3, 5-8]. При усложнении моделей несущих частей сред, например, за счет учета микроструктуры, соответственно изменятся (усложнятся) представления перемещений структурных элементов.

В книге [1] рассматривалась модель среды, в которой присоединенной оборудование моделировалась континуальным набором изотропных осцилляторов. Подобные построения частично использовались и для приведенных здесь моделей, но из-за сильной нелинейности присоединенной части, для описания частотных свойств системы оказывается достаточным снабдить эту часть конечным числом степеней свободы

6. В качестве примера рассмотрим более подробно задачу о виброводе с внутренними разрывами – рис. 4. Пусть погонная масса ударных элементов: $m(x) \equiv 1$. Уравнения (10), (11), перепишем в виде:

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} + \lambda \Phi(y^0) = 0, \quad (17)$$

$$y^0_{tt} + u_{tt} + \lambda \Phi(y^0) = 0, \quad (18)$$

где упругая сила взаимодействия принадлежит классу симметричных пороговых функций, который строится при помощи класса $\{\Phi\}_\Delta$, описанного в п.2, как $\Phi(y^0) = \Phi_1(y^0) - \Phi_1(-y^0)$; $\Phi_1(y^0) \in \{\Phi\}_\Delta$. Будем предполагать, что нагружение в зонах контакта – линейное:

$$\lambda\Phi[y^0(x,t)] = \lambda\{[y^0(x,t) - \Delta(x)]\eta[y^0(x,t) - \Delta(x)] - [y^0(x,t) + \Delta(x)]\eta[y^0(x,t) + \Delta(x)]\}.$$

Пусть $\Delta(x) = \text{const}$. Установим: $\varepsilon = O(\lambda^{-1/2})$. Граничные условия:

$$u(0,t) = 0, \quad Eu_x(l,t) = \varepsilon P_1 \cos \alpha t, \quad P_1 = 0, \quad (19)$$

что отвечает случаю закрепления левого конца стержня и приложения к его правому концу T -периодического силового воздействия; $T = 2\pi\omega^{-1}$.

В соответствии с (15), (16) и [9] запишем интегральные уравнения симметричных T -периодических колебаний:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^{l} \int_0^{T/2} \chi(x,z,t-s) \lambda \Phi[y^0(z,s)] dz ds, \quad (20)$$

$$y^0(x,t) = -u(x,t) - \int_0^{T/2} \chi_1(t-s) \lambda \Phi[y^0(x,s)] ds, \quad (21)$$

где χ и χ_1 – периодические функции Грина (ПФГ). Поле перемещений несущего структурного элемента в пренебрежении соударениями:

$$u_1(x,t) = [P_1 \sin \omega_0 x \cos \omega t] [E \omega_0 \cos \omega_0 l]^{-1}, \quad (22)$$

причем в соответствии с [7], в данном случае $\omega_0 = \omega a^{-1}$, где $a = \sqrt{E\rho^{-1}}$; ПФГ $\chi_1(t)$ дается рядом [9]:

$$\chi_1(t) = T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} -(2k+1)^{-2} \omega^{-2} \exp[i(2k+1)\omega t].$$

При $0 < t \leq T/2$ этот ряд можно записать в конечной форме: $\chi_1(t) = [\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\pi\omega^{-1}]$ [9]. Вне интервала $]0, T/2]$ данное представление следует продолжить по периодичности, исходя из условий симметрии. В результате получаем пилообразную периодическую функцию («треугольный синус»).

ПФГ $\chi(x, z, t)$ соответствует линейному волновому оператору и типу рассматриваемых граничных условий. Пользуясь [9], найдем:

$$\chi(x, z, t) = (lT\rho)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_n \cos \frac{1}{4}\Omega_n T)^{-1} \sin(h_n x) \sin(h_n z) \cos[\Omega_n(t - \frac{1}{4}T)], \quad (23)$$

$$h_n = [(2l)^{-1}(2n+1)\pi]; \Omega_n = \frac{1}{2}a(2n+1)\pi l^{-1}; a = \sqrt{E/\rho}; 0 < t \leq \frac{1}{2}T.$$

Показывается [6, 8], что для ПФГ (23) имеет место ещё одно представление:

$$\chi(x, z, t) = 4(Ta^2\rho)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} G_{2k+1}(x, z) \cos[(2k+1)\omega t], \quad (24)$$

причем функции

$$G_k(x, z) = [-k\omega_0 \cos k\omega_0]^{-1} \cos k\omega_0(z-l) \sin k\omega_0 x, 0 \leq x \leq l; \quad (25)$$

$$G_k(x, z) = [-k\omega_0 \cos k\omega_0]^{-1} \cos k\omega_0(x-l) \sin k\omega_0 z, z \leq x \leq l$$

определяются функциями Грина задачи Штурма - Лиувилля, в данном случае задачи с левым закрепленным и правым свободным концом [12].

В соответствии с (12), для симметричных двухударных режимов движения ([7, 8]) запишем плотность силы ударного взаимодействия как

$$\Phi(y^0) = J_\lambda(x) \delta^{T/2}(t) [t - \varphi_\lambda(x) - \tau_\lambda(x)], \quad (26)$$

С учетом приведенных выше соотношений, внося (20) в (21), получаем двухфункциональное представление [4, 7, 8] вида:

$$y^0(x, t) = -u_1(x, t) - J_\lambda(x) \chi_1 [t - \varphi_\lambda(x) - \tau_\lambda(x)] - \int_0^l J_\lambda(z) \chi [x, z, t - \varphi_\lambda(x) - \tau_\lambda(x)] dz. \quad (27)$$

Двухфункциональные представления типа (27), определяют при сделанных предположениях искомые перемещения. Для принятой гипотезы взаимодействия можно положить при больших импульсах [10]: $\tau_\lambda(x) = \tau_\lambda = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} = \text{const}(x)$. Воспользуемся (13) и (22). Имеем:

$$J(x) = J_{\lambda 0} - \chi_1^{-1} \int_0^l J(z) \chi [x, z, \varphi_\lambda(x) - \varphi_\lambda(z)] dz - \varepsilon P_1 [E \omega_0 \chi_1 \cos \omega_0 l]^{-1} \sin \omega_0 x \cos [\omega_0 \varphi_\lambda(x)] \quad (28)$$

Причем: $\omega_0 = \omega a^{-1}$; $\chi_1 = \chi_1(\tau_\lambda)$; $J_{\lambda 0} = -\Delta / \chi_1(\tau_\lambda)$ - плотность импульса взаимодействия, для абсолютно жесткой несущей части среды; $\chi_1(\tau_\lambda) = \frac{1}{2} \tau_\lambda - \frac{1}{4} \pi \omega^{-1}$. Второе условие, определяющее параметры движения, дает (14) или другие эквивалентные соотношения. Из формулы (20) имеем:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + \int_0^l J_\lambda(z) \chi [x, z, t - \varphi_\lambda(z) - \tau_\lambda] dz, \quad (29)$$

7. Рассмотрим прохождение вибрации вблизи первой резонансной частоты. В работах [6-8] показано, что в этом случае в подобных системах реализуются синфазные формы нелинейных колебаний. Пусть линейная плотность оборудования существенно меньше погонной массы несущего стержня: $\rho \gg 1$.

В рассматриваемом гамильтоновом случае и в данной частотной зоне значения фазы могут быть только следующими: $\omega_0 \varphi_\lambda = 0, \pi$. При действии реальной диссипации устойчивому режиму в порождающей системе ($\rho \rightarrow \infty$) может отвечать только большее значение импульса удара. Поэтому при $\omega_0 < \pi/2l$ выбираем $\omega_0 \varphi_\lambda = 0$; в тоже время при $\pi/2l < \omega_0 < \pi/l$ выбираем $\omega_0 \varphi_\lambda = \pi$.

Следует специально подчеркнуть, что при анализе ситуации в зарезонансных областях $\omega_0 > \pi/l$, необходимо введение различного рода антифазных форм нелинейных колебаний [8]. Для виброводов с внутренними разрывами описание таких форм требует специальных рассмотрений, выводящих за рамки данной статьи, т.к. требуется уточнение модели.

Ограничиваясь важнейшим случаем синхронизации ударников вблизи первой резонансной зоны, заметим, что если $\varphi = \text{const}$, то уравнение (29) - суть уравнение Фредгольма. Считая ρ^{-1} - малым, вне малой окрестности значения $\omega_0 > 0,5\pi/l$, при помощи метода последовательных приближений найдем первое приближение для плотности импульса $J_\lambda(x)$, полагая, что в нулевом (порождающем) приближении $J_\lambda(x) \approx J_0 = -\Delta / \chi_1(\tau)$. Имеем после вычислений с учетом (23) - (28):

$$J_\lambda(x) = J_{\lambda 0} \left\{ 1 - \frac{8}{\pi \rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)\omega_0(x-l)]}{(2k+1)^2 \{1 - \cos[(2k+1)\omega_0 l]\}} \right\} + 4\varepsilon \frac{P_1 a}{\pi E} \left| \frac{\sin \omega_0 x}{\cos \omega_0 l} \right|,$$

$$\omega_0 \neq \pi/2l; \omega_0 < \pi/l.$$

Из формулы (15) с точностью до малых высшего порядка найдем:

$$u(x, t) = 4\varepsilon \frac{P_1 a}{\pi E} \frac{\sin \omega_0 x}{\cos \omega_0 l} \cos \omega t + \frac{8\Delta}{\pi^2 \rho} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos[(2k+1)\omega_0(x-l)]}{(2k+1)^2 \cos[(2k+1)\omega_0 l]} - 1 \right\} \cos[(2k+1)\omega(t - \varphi_\lambda)] + \dots,$$

откуда можно получить, что при $\omega_0 < \pi/2l; \varphi_\lambda = 0$ вибровод прозрачен для основного тона и конструкция активно колеблется. Если $\omega_0 > \pi/2l; \varphi_\lambda = \pi$, то вибровод заперт и основной тон вибрации практически не проходит [6, 8]. В обоих случаях в конструкции генерируется представительный набор высших гармонических составляющих.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант № 15-19-30026).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел.-М.: Наука, 1976. 328 с.
2. Артоболовский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. Krupenin V.L., Veprik A.M. Vibroconductors equipped with impact elements and distributed vibroimpact systems // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V.1. Czech Prague: CTU, 1996, pp. 229-234.
4. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения надежности машин. 1998, № 5, с. 13-30
5. Беляев А.К. Высокочастотная динамика сложных инженерных конструкций: дис....доктора физ.-мат. наук. СПб. 2001. 232 с
6. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных виброводов // Машиноведение. 1987. N 1. С.25-32
7. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. 1995. Т. 343. №6. С. 759-763.
8. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1 и 2)// Интернет-журнал Вестник научно-технического развития. №№6, 7. 2011. С.26-33; с.3-16

9. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
10. Крупенин В.Л. Анализ сингуляризованных уравнений движения решетчатых виброударных 2D-систем при отказе от гипотезы ньютона // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016, № 2, с. 13-22.
11. Крупенин В.Л. Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016, № 4, с. 9-19.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
13. Крупенин В.Л. Случайные вибрационные поля в оснащенных многомерных виброударных 2D-системах// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015, № 6, с. 21-28

Дата поступления статьи: 24 июня 2016 года.