

УДК 534.1

К АНАЛИЗУ СЛУЧАЙНЫХ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

©^{1,2} Виталий Львович Крупенин, ²Алексей Иосифович Винокур¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Россия, Москва²Московский государственный университет печати, Россия, Москваkrupeninster@gmail.com; alex.vinokour@gmail.com

Аннотация. Предложены модели многомерных виброударных систем сложной структуры, возбуждаемых широкополосными случайными силами типа гауссовских дельта-коррелированных случайных процессов. Для их анализа применяются методы диффузионных марковских процессов. Определены плотности вероятностей, дающие информацию о свойствах систем при ограничениях, диктуемых характером моделей. Описаны важные свойства изучаемых объектов.

Ключевые слова: 2D-системы, ударная пара, упругий удар, виброударная система, ФПК-уравнение, сложные структуры, моменты случайного процесса, частота появления.

TO THE ANALYSIS OF VIBRO-IMPACT PROCESSES IN MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS

©^{1,2}Vitaly L. Krupenin, ^{1,2}Aleksey I. Vinokur¹IMASH RAS, Russia, Moscow²Moscow State University of Printing Arts, Russia, Moscowkrupeninster@gmail.com; alex.vinokour@gmail.com

Abstract. The proposed model is multidimensional vibro-impact systems to the complex structure excited by broadband random forces type of Gaussian Delta-correlated random processes. For the analysis used methods of diffusion Markov processes. Specified probability density, which gives information about the properties of the system under the constraints dictated by the nature of the models. Describes important properties of the studied objects.

Keywords: 2D-systems, impact pair, elastic impact, vibro-impact system, FPK-equation, complex structures, moments of a random process, the frequency of occurrence.

1. Рассмотрим класс достаточно общих задач, анализ которых поможет дать описание механизма генерирования вибрационных полей в пространственно протяженных машинных конструкциях под действием случайного широкополосного силового воздействия типа белого шума. В качестве базовой модели конструкции возьмем дискретную систему сложной структуры с большим числом ударных пар, функционирование которой сопровождается возникновением множественных соударений. Такая модель отвечает дискретному аналогу 2D-модели сильно нелинейной сплошной среды сложной структуры - струнной решетчатой конструкции, оснащенной амортизированными виброударными подсистемами [1].

Одной из особенностей рассматриваемых моделей оказывается наличие двух своеобразных составляющих частей исследуемого объекта - несущей и присоединенной (оснастки). Соответственно уравнения динамики таких сред содержат две группы уравнений. Первая - "отвечает" за несущую часть, вторая - за оснастку. В работах [2 - 7] рассмотрены сильно нелинейные модели подобных сред, в которых, в частности, для учета множественных соударений в элементах присоединенного оборудования использовались распределенные ударные элементы. Такие модели позволяют дать описание процесса формирования, а также и распространения вибрационных полей в сложных составных конструкциях. Кроме того, указанные модели позволяют получить ряд расчетных формул и значимых определяющих соотношений. Необходимость обращения к подобным моделям диктуется, прежде всего, тем обстоятельством, что в реальных машинных конструкциях именно множественные систематические соударения элементов подсистем весьма часто "ответственны" и за вид формируемых глобальных виброполей, и за виброактивность конструкций в целом. В данной работе рассмотрены дискретные модели, несущих частей, представляющие собой $2D$ -решетчатые конструкции, в то время как модели присоединенных частей - суть системы, содержащие линейные фильтры низших частот (цепочки упруго связанных точечных тел), оснащенные ограничителями хода.

Проблемы формирования случайных виброполей в виброударных системах с большим числом ударных пар при случайном широкополосном возбуждении обсуждались и решались в работах [8-11]. В силу того, что для одного достаточно представительного класса задач удается построить точное решение уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова для совместной многомерной плотности вероятностей процесса [12-14], соответствующие методы представляются эффективными и интересными. Далее это будет продемонстрировано.

2. Рассмотрим так называемую струнную решетку [15], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих линейных струн, заземленных на концах и имеющих соответственно длины L_1 и L_2 (рис. 1). Каждая струна нумеруется при помощи индексов $k = 0, 1, 2, \dots, N_1$ и $q = 0, 1, 2, \dots, N_2$. В вершинах решетки помещены точечные абсолютно твердые тела с массами m_{kq} .

Предполагается, что ячейки решетки - одинаковые и прямоугольные, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка (дискретный аналог мембраны) - анизотропная. Струнные элементы предполагаются безынерционными. Крепления струн в узлах считаются абсолютно жесткими, а их натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину ΔL_1 ; «вертикальная» - ΔL_2 . (рис 1). Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение T_1 , а «вертикальные участки» - соответственно T_2 . Поэтому коэффициенты упругости $c_{1,2} = T_{1,2} / \Delta L_{1,2}$.

Таким образом, динамика решетчатой конструкции может быть описана посредством функций смещения узлов решетки $u_{kq}(t)$; индексы $k=0, 1, 2, \dots, N_1$; $q=0, 1, 2, \dots, N_2$. При этом каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Будем считать, что первый по счету индекс (в данном случае k - нумерует струну, расположенную «слева направо» или наоборот), а второй индекс (в данном случае q - «сверху вниз» или наоборот).

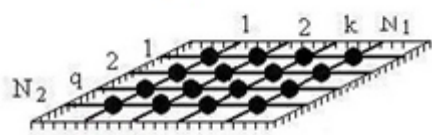


Рис.1



Рис. 2

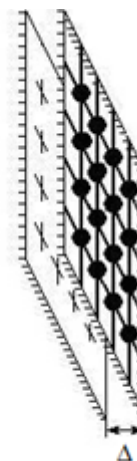


Рис.3

Пусть в каждом узле решетки упруго подвешены некоторые присоединенные упругие линейные системы с h_{kq} степенями свободы. И предположим, для определенности, что каждая из этих систем представляет собой цепочку упруго связанных тел с массами M_{kqi} , где индекс $i=1,2,\dots, h_{kq}$. Кроме того, предположим, что эти присоединенные цепочки оснащены не менее, чем одним односторонним или двусторонним ограничителем хода (рис. 2). Не ограничивая общности можно считать, что все присоединенные цепочки имеют одинаковое число степеней свободы, то есть для всех k и q : $h_{kq} \equiv h$; $h=1,2,\dots$

Это утверждение следует из очевидного факта, о возможности дополнить каждую цепочку «фиктивными» степенями свободы, которые в данном случае легко «обездвижить» предположив, что соответствующие тела оснащены двухсторонним ограничителем с нулевым зазором.

Обобщенные координаты системы будут иметь тройную индексацию: w_{kqi} , где первые два индекса соответствуют месту несущего тела струнной решетки (для тел в узлах самой решетки положим $i=0$, то есть $w_{kq0} = u_{kq}$), а индекс $i=1,2,\dots, h$ – описан выше. В соответствии со сказанным граничные условия защемления записываются как для струн, образующих несущую решетку:

$$w_{kqi} = 0, \quad k=0, N_1+1; \quad q=0, N_2+1; \quad i=0.$$

Обобщенные импульсы $y_{kqi} = m_{kq} \dot{u}_{kq}$ (при $i=0$) и $y_{kqi} = M_{kqi} \dot{w}_{kqi}$ (при $i > 0$).

Предположим, далее, что в каждой из присоединенных цепочек коэффициент упругости есть c_{kq0} .

Пусть описанная конструкция находится в вязкой среде с коэффициентом демпфирования $2b$, так что на все тела системы действуют сила демпфирования, зависящая от их обобщенных импульсов: $-2by_{kqi}$. Будем предполагать, что и колебания всех тел, как несущей, так и присоединенной частей конструкции возбуждаются случайными силами ξ_{kqi} – представляющими собой гауссовские дельта-коррелированные случайные силы (белые шумы), для которых:

$$\langle \xi_{kqi}(t) \xi_{nrj}(\theta) \rangle = \delta_{kn} \delta_{qr} \delta_{ij} \delta(t-\theta),$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ - суть операция статистического усреднения [12], а δ_{kn} – символ Кронекера.

Предполагая, что удары во всех парах - абсолютно упругие, запишем условия удара в виде:

$$y_{kqi}(t_{kqi0}-0) = -y_{kqi}(t_{kqi0}+0) \quad (1)$$

для всех допустимых значений индексов; t_{kqi0} – произвольный случайный момент удара в действующей ударной паре kqi . Сюда должны быть добавлены геометрические условия, вытекающие из структуры системы ударных пар. В общем виде эти условия могут записаны в виде совокупности неравенств

$$D = \{ \Delta_{kqi} \leq w_{kqi} \leq \Delta_{kqi}^* \}. \quad (2)$$

При этом здесь везде $i > 0$; величины $\Delta_{kqi} \leq 0$; $\Delta_{kqi}^* \geq 0$. В случае, если ударная пара с номером kqi – несимметричная, то либо $\Delta_{kqi} \longrightarrow -\infty$, либо $\Delta_{kqi}^* \longrightarrow \infty$; если соответствующее тело не обременено ограничителями, то имеют место оба предельных перехода; если ударная пара отсутствует, то $\Delta_{kqi} = \Delta_{kqi}^* = 0$.

3. Уравнения движения запишем в гамильтоновой форме, для чего рассмотрим функцию Гамильтона, представляющей собой в данном случае сумму кинетической и потенциальной энергий системы:

$$H(w_{kqi}, y_{kqi}) = T^*(y_{kqi}) + U(w_{kqi}), \quad (3)$$

причем $T^*(y_{kqi})$ и $U(w_{kqi})$ – кинетическая и потенциальная энергии. Сразу имеем:

$$T^*(y_{kqi}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{i=1}^h y_{kqi}^2 \quad (4)$$

В соответствии с общими методиками так же находим:

$$U(w_{kqi}) = \frac{1}{2} c_1 \sum_{q=1}^{N_2} [(w_{1q0}^2 + w_{N_1,q0}^2)] + \frac{1}{2} c_1 \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{k=2}^{N_1} (w_{kq0} - w_{(k-1)q0})^2 + , \quad (5)$$

$$+ \frac{1}{2} c_2 \sum_{k=1}^{N_1} [(w_{k10}^2 + w_{N_2,k0}^2)] + \frac{1}{2} c_2 \sum_{q=2}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} (w_{kq0} - w_{k(q-1)0})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} c_{kq0} (w_{kq0} - w_{kq1})^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{i=2}^{h-1} c_{kq0} [w_{kq0}^2 + w_{kqh}^2 + (w_{kqi} - w_{kq(i-1)})^2] + \mu V_0(w_{kqi}).$$

Первые четыре члена, входящие в формулу (5), определяют потенциальную энергию несущей решетки, пятый член – механизма взаимодействия решетки и присоединенных цепочек, наконец, шестой член – потенциальную энергию этой присоединенной оснастки; седьмой – член соответствует малым нелинейным потенциальным силам с потенциальной энергией μV_0 ; μ - малый параметр.

Координаты w_{kqi} ограничены системой неравенств (2).

Зная функцию Гамильтона, можно получить уравнения движения в форме:

$$\frac{dw_{kqi}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_{kqi}}; \frac{dy_{kqi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial w_{kqi}} - 2by_{kqi} + \xi_{kqi}, \quad (5)$$

где индексы изменяются в указанных выше диапазонах. Явный вид уравнений движения в форме Ньютона сейчас не важен, т.к. используя методы диффузионных марковских процессов, можем сразу записать уравнение ФПК для $P(t, w_{kqi}, y_{kqi})$ совместной плотности вероятностей многомерного случайного процесса $\{w_{kqi}(t), y_{kqi}(t)\}$ [12-14]. Имеем:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{i=1}^h [\{H, P\}_{kqi} - 2b \frac{\partial (y_{kqi} P)}{\partial y_{kqi}} - 2S \frac{\partial^2 P}{\partial y_{kqi}^2}] = 0; \quad (6)$$

$$\{F, G\}_{kqi} = \frac{\partial F}{\partial y_{kqi}} \frac{\partial G}{\partial w_{kqi}} - \frac{\partial F}{\partial w_{kqi}} \frac{\partial G}{\partial y_{kqi}}$$

- скобка Пуассона для тела с индексом kqi ; F и G – произвольные гладкие функции.

Как известно [12], в стационарном случае, когда $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$, уравнение (6) имеет точное решение, которое дается каноническим распределением Гиббса:

$$P(w_{kqi}, y_{kqi}) = C \exp\left[-\frac{2b}{S} H(w_{kqi}, y_{kqi})\right], \quad (7)$$

в чем можно убедиться, непосредственно подставив формулу (6) в (7) и пользуясь условием стационарности; $C = \text{const}$.

Распределение Гиббса характеризуется гауссовостью по импульсным переменным и статистической независимостью обобщенных импульсов и координат точечных тел.

4. После интегрирования (7) по координатам, с учетом неравенств (2), получаем распределение Максвелла по обобщенным импульсам:

$$P(y_{kqi}) = C_1 \exp\left(-\frac{b}{S} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{i=1}^h y_{kqi}^2\right), \quad C_1 = \text{const}. \quad (8)$$

Распределение (8) – нормальное; чтобы привести его к классическому виду достаточно, отказавшись от тройной индексации, перенумеровать импульсы и перейти к «сквозной» индексации. Условие удара (1) выполняется автоматически, так как представления (7) и (8) зависят только от квадратов импульсов.

Распределения типа (8) для случая виброударных систем различного вида ранее анализировалось в [10,11]. Важнейшими для приложений являются характеристики случайных импульсов ударов, которые с учетом условий удара (2) вычисляются как $J_{kqi} = 2|y_{kqi}|$, $i > 0$. Проведя стандартные преобразования, проинтегрировав (7) по всем y_{kq0} , пользуясь правилами вычисления плотности вероятности детерминированной функции случайного процесса [14], приходим к представлению:

$$P(J_{kqi}) = \left[\frac{b}{S\pi} \right]^{\frac{N_1+N_2+h}{2}} \exp \left(-\frac{b}{S} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{i=1}^h J_{kqi}^2 \right); J_{kqi} \geq 0. \quad (9)$$

Причем последнее неравенство верно при всех значениях индексов. Распределение (9) - усеченное нормальное. Оно определяет эффекты, связанные с влиянием ударов на динамику сложной многомерной конструкции.

Для нечетных и четных моментов одномерных величин J_{kqi} можно, например, получить [10,11]:

$$m^{(2j+1)}(J_{kqi}) = \sqrt{\frac{b}{\pi S}} \frac{j!}{2(b/S)^{j+1}}; m^{(2N)}(J_{kqi}) = 2Sb^{-1}(2j-1)!! \quad (i > 0).$$

5. Проинтегрировав распределение (8) по импульсам, можно получить распределение Больцмана по координатам точечных тел системы

$$P(w_{kqi}) = C_2 \exp \left[-\frac{2b}{S} U(w_{kqi}) \right], C_2 = \text{const}. \quad (10)$$

При этом, в соответствии с (2), все допустимые конфигурации ограничены системой неравенств (2) ($i > 0$), которые являются неотъемлемыми частями представления распределения.

Распределение (10), (2) позволяет, в частности, описать характеристики любых конфигураций системы.

Одна из наиболее интересных и значимых - это задача об определении частот появления тех или иных конфигураций конструкции при случайном выбросе точечных тел амортизированного оборудования на ограничители. Подобные задачи, рассмотрены в частности в работах [10,11]. В данном случае рассмотрим их существенное обобщение.

Легко показать, что при реализации случайных колебательных процессов в рассматриваемой системе, как наиболее вероятная, наиболее часто будет регистрироваться равновесная конфигурация. Определим среднюю частоту появления такой конфигурации $\square \square$ как среднее число пересечений равновесного уровня $w_{kqi}=0$ ($k=1, \dots, N_1; q=1, \dots, N_2, i=1, \dots, h$) при $y_{kq} > 0$:

$$\Omega_0 = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{k=1}^{N_1} \prod_{q=1}^{N_2} \prod_{i=1}^h y_{kqi} P(0,0,\dots; y_{111}, \dots, y_{kqi}, \dots, y_{N_1 N_2 h}) dy_{111} \dots dy_{kqi} \dots dy_{N_1 N_2 h}. \quad (11)$$

Отсюда, после внесения сюда (7) находим:

$$\square \square = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{k=1}^{N_1} \prod_{q=1}^{N_2} \prod_{i=1}^h y_{kqi} \exp \left[-\frac{b}{S} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{i=1}^h y_{kqi}^2 \right] dy_{111} \dots dy_{kqi} \dots dy_{N_1 N_2 h} = C \left(\frac{S}{8b} \right)^{N_1 N_2 h}.$$

Рассмотрим все конфигурации, при реализации которых в некоторый момент времени тела, образующие несущую часть конструкции, находятся в равновесном состоянии. Пусть одновременно хотя бы один из элементов амортизированного оборудования взаимодействует с каким-то ограничителем. Обозначим такую конфигурацию $w(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*)$, где индекс $\lambda \in \Lambda$

нумерует описанные конфигурации; число элементов этого множества, очевидно, не более чем $2^{N_1+N_2+h}$. Обозначим среднюю частоту появления рассматриваемой конфигурации $\Omega_\lambda \equiv \Omega[w(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*)]$ и проведем подсчет по формуле:

$$\Omega_\lambda = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{k=1}^{N_1} \prod_{q=1}^{N_2} \prod_{i=1}^h y_{kqi} \exp\left[-\left(\frac{b}{S}\right) \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{q=1}^{N_2} \sum_{i=1}^h y_{kqi}^2 - \left(\frac{2b}{S}\right) U[w(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*)]\right] dy_{111} \dots dy_{N_1 N_2 h}$$

где $U[w(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*)]$ – соответствующее значение потенциальной энергии (5). Из последней формулы следует, что

$$\Omega[w(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*)] = \Omega_0 \exp\left\{-\left(\frac{2b}{S}\right) U[w(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*)]\right\}.$$

Обозначим $\eta(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*; U) \equiv \Omega[w(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*)] / \Omega_0$ относительную частоту появления конфигурации $w(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*)$. Из последнего соотношения получим:

$$\eta(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*; U) = \exp\left\{-\left(\frac{2b}{S}\right) U[w(\lambda, \Delta_{kqi}, \Delta_{kqi}^*)]\right\}. \quad (12)$$

Таким образом, как и в других аналогичных случаях, относительно чаще смогут появляться конфигурации, обладающие меньшей потенциальной энергией. То есть, в частности, чем меньше изломов имеет профиль данной конфигурации, тем относительно чаще она появляется. При этом наличие экспоненты в формуле (12) показывает, что рост потенциальной энергии конфигурации весьма быстро делает маловероятной возможность регистрации каких-либо «экзотических» конфигураций с сильно изломанными профилями. Сказанное оказывается тем более верным при больших уровнях затухания.

В соответствии с формулой (5) может быть произведен учет дополнительных нелинейных упругих сил, действующих в системе. В случае, если потенциальная функция $\mu V_0(w_{kqi})$ отвечает степенным характеристикам нелинейности, что, в частности, соответствуют негуковским упругим элементам в несущей части конструкции и (или) присоединенном оборудовании, то сделанные сейчас качественные выводы остаются в силе. Если же речь идет о каких-то более сложных представлениях потенциальной функции V_0 , то, разумеется, эти выводы должны подвергнуться корректировке. Однако, общий вид выведенных определяющих соотношений не изменится.

6. Заключительные замечания. Модели структуры несущей конструкции могут быть изменены. Так, ограничителями могут быть снабжены и точечные тела, помещенные в узлы несущей решетчатой конструкции. Возможный пример дан на рис. 3. Это обстоятельство очевидным образом изменит вид неравенств (2) и, следовательно, распределения (10).

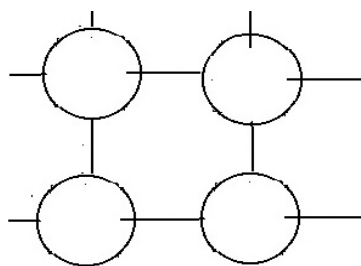


Рис.4

Модели несущей конструкция могут быть и более сложными: можно отказаться от предположения о движение точечных тел вдоль прямой. В этом случае, например, несущая струнная решетка будет содержать ячейки, состоящие из шаров конечного радиуса (рис. 4). В то же время присоединенное оборудование может моделироваться такими же шарами, находящимися в кольцевых зазорах (рис. 5).

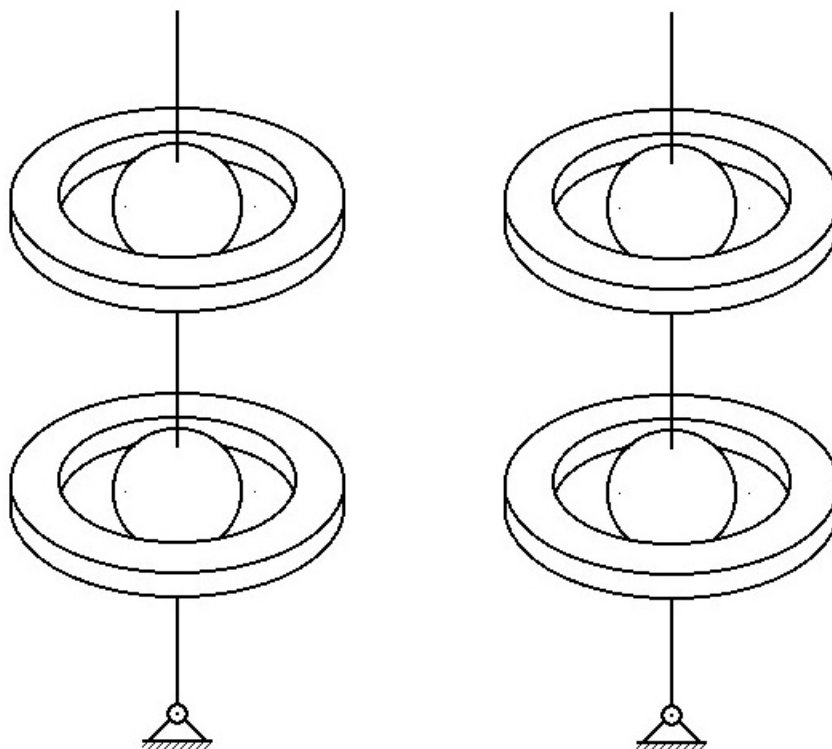


Рис.5

В этом случае необходимо ввести обобщенные векторные координаты $\mathbf{r}_{kqi}(t) \in \mathbf{R}^3$ и обобщенные импульсы $\mathbf{p}_{kqi} \in \mathbf{R}^3$. Полагая соударения абсолютно упругими, при помощи изложенных методов получим определяющее каноническое распределение Гиббса с добавленными граничными условиями, отвечающими абсолютно упругому удару шара, в кольцевом зазоре. Далее, вполне аналогично проделанным вычислениям, проводится анализ частных проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крупенин В.Л. Случайные вибрационные поля в оснащенных многомерных виброударных 2D-системах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. №6. С. 21-27.
2. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных вибропроводов // Машиноведение. 1987. N 1. С. 25-32.
3. Веприк А.М., Вознюк П.Д., Крупенин В.Л. и др. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний. Л.:Машиностроение,1987. -87 с.
4. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. 1995. Т. 343. №6. С. 759-763.

5. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1)//Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www.vntr.ru). 2011. №6. С. 26-33.
6. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 2) // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www.vntr.ru). 2011. №7. С. 3-16.
7. Крупенин В.Л. Об описании виброводов со структурными разрывами при помощи виброударных систем с распределенными ударными элементами // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www.vntr.ru). 2014. №3 (79) С. 23-30.
8. Крупенин В.Л. К расчету виброударных систем с регулярной структурой при случайном возбуждении// Машиноведение.-1984.-№6.-С. 22-29.
9. Крупенин В.Л. Случайные соударения решетчатой конструкции с периодической структурой и плоским ограничителем хода // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005.№4.С. 105-109.
10. Крупенин В.Л. Об исследованиях одномерных и многомерных виброударных процессов при случайном широкополосном возбуждении // Проблемы машиностроения и надежности машин. №6. 2010 С. 25-31
11. Крупенин В.Л. Обзор динамики одномерных и многомерных виброударных режимов движения многомерных виброударных систем при случайном широкополосном возбуждении // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www.vntr.ru). 2010. №9(37) С. 25-36.
12. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука. 1980. 336 с.
13. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
14. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
15. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. Ташкент: ФАН, 1973. 272 с.

Дата поступления статьи: 30 апреля 2016 года.