УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА НА ДИСПЕРСИЮ, ДИССИПАЦИЮ И НЕЛИНЕЙНОСТЬ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

© Владимир Иванович Ерофеев[1], Елена Александровна Никитина[1,2], Павел Алексеевич Хазов[2]

[1]*Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия*

[2]*Нижегородская государственный архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород, Россия*

erf04@sinn.ru

Аннотация. *В линейной и нелинейной постановках рассматриваются самосогласованные задачи, включающие в себя уравнения динамики материала и уравнения его поврежденности. Показано, что поврежденность материала привносит частотно-зависимое затухание и дисперсию фазовой скорости ультразвуковой акустической волны. Определено, что баланс между нелинейностью и диссипацией может привести к формированию локализованной слабой ударной волны деформации. Ширина ударной волны будет расти, а ее скорость будет уменьшаться с увеличением параметра, характеризующего поврежденность материала. Проведена оценка влияния поврежденности материала на проявление эффекта акустоупругости, применяющегося для определения напряжений акустическим методом.*

Ключевые слова: *материал, поврежденность, акустическая волна, дисперсия, диссипация, нелинейность, эффект акустоупругости.*

THE IMPACT OF DAMAGE OF THE MATERIAL ON THE DISPERSION, DISSIPATION AND NONLINEARITY OF ACOUSTIC WAVES

© Vladimir I. Erofeev[1], Elena A. Nikitina[1,2], Pavel A. Khazov[2]

[1]*IMASH RAS, Nizhny Novgorod, Russia*

[2]*Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia*

erf04@sinn.ru

Abstract. *In linear and nonlinear statement is considered self-consistent problem that includes equations of material dynamics and equation of its damage. It is shown that the damage of material introduces a frequency-dependent attenuation and dispersion of phase velocity of ultrasonic acoustic waves. Determined that the balance between nonlinearity and dissipation can lead to the formation of localized weak shock wave deformation. The width of the shock wave will grow, and its speed will decrease with the increase of the parameter characterizing the damage of material. The influence of material damage on the manifestation of the effect of acoustoelasticity used for the determination of stresses by the acoustic method.*

Key words: *material, damage, acoustic wave, dispersion, dissipation, nonlinearity, the effect of acoustoelasticity.*

Введение

Задача надежной оценки выработанного и прогноза остаточного ресурса высоконагруженных конструкций решается путем широкого применения неразрушающих методов диагностики. При этом наиболее успешно используется акустический метод [1]. Расчетные методики, позволяющие на базе диагностических данных получать оперативную оценку остаточного ресурса, должны точно и адекватно отображать как уровень напряженного состояния, так и деградацию материала длительно эксплуатируемой конструкции.

Существует большое количество механизмов, вызывающих деградацию материала – многоцикловая и малоцикловая усталость, коррозионное повреждение, старение металла и т.д. Неучет изменения акустических параметров упругих волн в поврежденном материале приводит к существенному разбросу результатов измерений и низкой эффективности методик поверочного расчета.

Механика поврежденного континуума интенсивно развивается, начиная с основополагающих работ Л. М. Качанова, обобщенных в монографии [2], и Ю. Н. Работнова, обобщенных в монографии [3] . Ценность этих первых работ, признанных ныне классическими, заключается в возможности применения единой схемы представления поврежденности для описания поврежденности в упругих и упругопластических телах.

Под поврежденностью обычно понимается сокращение упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещины – в упругости, дислокации – в пластичности, микропоры – при ползучести, поверхностные микротрещины – при усталости) [4].

Не измеряемая непосредственно (как, например, скорость, сила или температура), поврежденность, т.е. деградация механических свойств тела, может быть обнаружена в результате анализа реакции тела на различные внешние воздействия. Согласно экспериментальной практике, наличие поля повреждений в материалах может быть косвенно обнаружено и отчасти количественно представлено, через уменьшение скорости прохождения ультразвукового сигнала [5-7], уменьшение модуля Юнга («дефект модуля») [8] , уменьшение плотности («разрыхление») [9], изменение твердости [10], падение электрического потенциала [11], падение амплитуды напряжений при циклическом испытании [12, 13], ускорение ползучести в третьей стадии [14].

В традиционных расчетах за меру повреждаемости в процессе развития деформации принимается скалярный параметр повреждаемости ψ (x,t), характеризующий относительную плотность равномерно рассеянных в единице объема микродефектов. Этот параметр равен нулю, когда повреждений нет, и близок к единице в момент разрушения.

Процесс накопления повреждений в материале исследуемой конструкции рассчитывается путем последовательного решения на каждом этапе нагружения кинетического уравнения повреждаемости. Исследование процесса накопления повреждений в элементе конструкции продолжается до достижения параметром ψ (x,t) заданного предельного значения, близкого к единице.

Рассмотрим образец материала, выполненный в виде стержня, по которому может распространяться продольная акустическая волна. Обозначим через $u(x,t)$ перемещение частиц срединной линии стержня. Считаем, что стержень подвергается статическим или циклическим испытаниям и в его материале может накапливаться поврежденность. Для описания меры поврежденности введем функцию ψ (x,t) [2, 3].

Как правило, в механике деформируемого твердого тела задачи динамики рассматривают отдельно от задач накопления повреждений. При разработке таких методов принято заранее постулировать, что скорость упругой волны является заданной функцией поврежденности, а затем экспериментально определять коэффициенты пропорциональности.

Фазовая скорость волны (υ_ϕ) и ее затухание считаются обычно степенными функциями частоты (ω) и линейными функциями поврежденности (ψ) [15]:

$$\upsilon_\Phi(\omega) = c_0\left(1 - h_1\psi - h_2\psi\omega^2\right), \tag{1}$$

$$\alpha(\omega) = \left(h_3 + h_4\psi\right)\omega^4, \tag{2}$$

где $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость, с которой распространялась бы продольная упругая волна в материале стержня, если в нем не было бы повреждений; E – модуль Юнга; ρ – плотность материала, h_{1-4} – коэффициенты, подлежащие экспериментальному определению.

Эволюция поврежденности описывается кинетическим уравнением вида [16, 17]:

$$\frac{d\psi}{dt} = f(\sigma, \psi), \tag{3}$$

где σ – внешнее действующее напряжение.

Функция $f(\sigma,\psi)$ чаще всего аппроксимируется линейной зависимостью, иногда – полиномиальной зависимостью [16,17].

При несомненных достоинствах (простота) подход, основанный на предположениях (1),(2), обладает целым рядом недостатков, как и любой подход, не опирающийся на математические модели процессов и систем.

Дисперсия и затухание акустической волны в поврежденном материале.

Будем считать, что рассматриваемая задача является самосогласованной и включает в себя, кроме уравнения развития поврежденности (3), которое перепишем в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\psi = \beta_2 E\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

еще и уравнение динамики стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta_1\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{5}$$

Здесь α, β_1, β_2 – константы, характеризующие поврежденность материала и связь циклических процессов и процессов накопления повреждений.

Отыскивая решение системы (4) и (5) в виде бегущих гармонических волн u, $\psi \approx e^{i(\omega t - kx)}$, где ω – круговая частота, $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число (λ – длина волны), придем к дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 - (C_0^2 + \frac{E\beta_1\beta_2}{\alpha})K^2 + \frac{i}{\alpha}\omega^3 - \frac{iC_O^2}{\alpha}\omega K^2 = 0. \tag{6}$$

Заметим, что уравнение (6), связывающее пространственные и временные масштабы продольной волны, содержит комплексные коэффициенты, откуда следует, что волна будет не только распространяться по стержню, но и затухать по мере распространения.

Представим волновое число в виде $K = K^1 + iK^{11}$, где K^1 – характеризует постоянную распространения ($\upsilon_\phi = \omega / K^1$ – фазовая скорость волны), а $K^{11} = \alpha(\omega)$ – характеризует затухание волны.

Решение алгебраического уравнения (6) позволяет определить обе составляющие волнового числа:

$$K^1 = \pm\sqrt{\frac{a\omega^2 + \frac{C_0^2}{\alpha^2}\omega^4 \pm \sqrt{a^2\omega^4 + \frac{C_0^4}{\alpha^4}\omega^8 + \frac{(a^2 + C_0^4)}{\alpha^2}\omega^6}}{2(a^2 + \frac{C_0^4}{\alpha^2}\omega^2)}}, \qquad (7)$$

$$K^{11} = \pm\frac{\left(\frac{a - C_0^2}{\alpha}\right)\omega^3}{\sqrt{(a\omega^2 + \frac{C_0^2}{\alpha^2}\omega^4) \pm \sqrt{a^2\omega^4 + \frac{C_0^4}{\alpha^4}\omega^8 + \frac{(a^2 + C_0^4)}{\alpha^2}\omega^6}}}. \qquad (8)$$

Здесь принято обозначение $a = C_0^2 + \frac{E\beta_1\beta_2}{\alpha}$.

Из (7),(8) видно, что наличие поврежденности приводит к дисперсии, т.е. зависимости фазовой скорости продольной волны от частоты $\upsilon_\phi = \upsilon_\phi(\omega)$ и частотно-зависимому затуханию $K^{11} = K^{11}(\omega)$.

В низкочастотном диапазоне ($\omega \to 0$) скорость волны принимает значение $\upsilon_\phi(0) \approx \sqrt{C_0^2 + \frac{E\beta_1\beta_2}{\alpha}}$. Затухание волны при этом пропорционально квадрату частоты:

$$K^{11}(0) \approx \frac{E\beta_1\beta_2\omega^2}{\alpha^2\sqrt{C_0^2 + \frac{E\beta_1\beta_2}{\alpha}}}.$$

В высокочастотном диапазоне ($\omega \to \infty$) фазовая скорость стремится к C_0: $\upsilon_\phi(\infty) \approx C_0$, и затухание волны пропорционально первой степени частоты: $K^{11}(\infty) \approx \frac{E\beta_1\beta_2\omega}{\alpha C_0}$.

В низкочастотном диапазоне $\frac{K^1(0)}{K^{11}(0)} = \frac{\alpha^2}{E\beta_1\beta_2\omega} \to \infty$ т.е. волна распространяется практически без затухания. В высокочастотном же диапазоне $\frac{K^1(\infty)}{K^{11}(\infty)} = \frac{\alpha}{E\beta_1\beta_2}$ т.е. постоянная распространения и параметр, характеризующий затухание, становятся величинами одного порядка.

Частотные зависимости, рассчитанные по формулам (6)-(8), характерны для многих конструкционных материалов[18].

В ряде экспериментальных работ, например, в [19], в частотных зависимостях затухания, наряду с монотонным ростом, наблюдаются и экстремальные (локальные максимумы) зависимости. Математическая модель (4), (5) не позволяет описать такие экстремумы, для их описания необходимо дополнительно наделить поврежденность инерционными свойствами. Это возможно, если поврежденность отождествить с ансамблем дислокаций, обладающим собственными частотами [20-22].

Заметим, что мнимая часть волнового числа K^{11} может быть измерена как в низкочастотном, так и в высокочастотном диапазонах, следовательно, введенные в (4),(5) константы α, β_1, β_2 могут быть вычислены через измеряемые параметры:

$$\alpha = \frac{K^{11}(\infty)\omega}{K^{11}(0)\sqrt{1+\dfrac{K^{11}(\infty)}{C_0\omega}}}\,, \tag{9}$$

$$\beta_1\beta_2 = \frac{C_0(K^{11}(\infty))^2}{EK^{11}(0)\sqrt{1+\dfrac{K^{11}(\infty)}{C_0\omega}}}\,. \tag{10}$$

Система (4),(5) может быть сведена к одному уравнению относительно функции ψ, характеризующей поврежденность:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(c_0^2 + \frac{E\beta_1\beta_2}{\alpha}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^3\psi}{\partial t^3} - \frac{C_0^2}{\alpha}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial t} = 0 \,. \tag{11}$$

Уравнение (11) представляет собой кинетическое уравнение накопления повреждений. Его анализ показывает, что нарастание поврежденности имеет экспоненциальный характер. Показатель экспоненты определяется соотношением (8) и лишь при некоторых значениях параметров этот процесс можно аппроксимировать линейной функцией.

Предлагаемый вниманию подход позволил сформулировать новые зависимости, связывающие уравнения динамики материала и кинетику его поврежденности. Это позволяет рассматривать задачу о деформировании конструкционного материала и его поврежденность как единый самосогласованный процесс.

Волна деформации в нелинейно-упругом поврежденном материале

Учтем далее геометрическую и физическую упругие нелинейности. В этом случае динамика стержня с учетом поврежденности его материала описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\left(1+\frac{\alpha_0}{E}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta_1\frac{\partial\psi}{\partial x}\,, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\psi = \beta_2 E\frac{\partial u}{\partial x}\,. \tag{13}$$

Или эквивалентным этой системе уравнением относительно продольного перемещения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(c_0^2 + \frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{c_0^2}{\alpha}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t} - \tag{14}$$

$$- \frac{c_o^2\alpha_o}{E}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c_o^2\alpha_o}{\alpha\, E}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$$

Через $\alpha_0 = 3E + \nu_1(1-6\nu) + 6\nu_2(1-2\nu) + 2\nu_2$ обозначен коэффициент, характеризующий геометрическую и физическую упругие нелинейности стержня; $\nu_{1,2,3}$ – упругие модули Ламе третьего порядка; ν – коэффициент Пуассона.

Будем предполагать, что затухание волны, обусловленное поврежденностью и нелинейность, являются величинами одного порядка малости $\varepsilon = {a|\alpha_0|}/{E\Lambda}$, ($a$ – амплитуда волны, Λ – длина волны).

Решение уравнения (14) ищем в виде асимптотического разложения перемещения по малому параметру:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + ... \tag{15}$$

Введем при этом новые переменные:

$$\xi = x - ct\,;\ \eta = \varepsilon x \tag{16}$$

Такой выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси x, медленно эволюционирует в пространстве из-за нелинейности и диссипации.

После подстановки (15) и (16) в (14) в нулевом приближении по ε получим выражение для скорости

$$c = c_0\sqrt{1 + \frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha_0 c_0^2}}$$

Первое приближение по ε приводит к эволюционному уравнению относительно осевой деформации $\upsilon = {\partial u_0}/{\partial\xi}$:

$$\begin{aligned} & -2\varepsilon\left(c_0^2 + \frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha}\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta} + \left(\frac{c_0^2 c - c^3}{\alpha}\right)\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\xi^2} - \\ & -\frac{c_0^2\alpha_0}{E}\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi} + \frac{c_0^2\alpha_0 c}{\alpha E}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\right) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

В длинноволновом диапазоне вторым нелинейным слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым и (17) преобразуется в уравнение Бюргерса [23]

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta} + 2g\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi} + \delta\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\xi^2} = 0, \tag{18}$$

где $g = \dfrac{\alpha_0}{4\varepsilon E\left(1 + \dfrac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_0^2}\right)}$, $\qquad \delta = \dfrac{\beta_1\beta_2 E}{2\varepsilon\alpha^2 c_0\sqrt{1 + \dfrac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_0^2}}}$.

Уравнение (18) позволяет описать баланс между нелинейностью и диссипацией, приводящий к формированию локализованной слабой ударной волны (кинка):

$$\upsilon = Am\, th\left[m(\xi - V\eta) + B\right], \tag{19}$$

где m – свободный параметр, $A = \dfrac{\delta}{g}$, $B = \dfrac{V}{2g}$.

Если граничные условия таковы, что $\upsilon \to h_1$ при $\xi \to \infty$ и $\upsilon \to h_2$ при $\xi \to -\infty$, то ширина ударной волны:

$$\Delta = \frac{1}{m} = \left| \frac{2\delta}{g(h_1 - h_2)} \right| = \left| \frac{4\beta_1\beta_2 E^2 \sqrt{1 + \frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_0^2}}}{\alpha^2 c_0 \alpha_0 (h_1 - h_2)} \right|, \tag{20}$$

а ее скорость:

$$V = |g(h_1 + h_2)| = \left| \frac{\alpha_0 (h_1 + h_2)}{4\varepsilon E(1 + \frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_0^2})} \right|. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что ширина ударной волны растет, а ее скорость уменьшается с увеличением параметра $\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}$ – характеризующего поврежденность материала.

Акустоупругость поврежденных материалов

Обычно влияние напряженного состояния на параметры акустической волны рассматривается отдельно от влияния на них поврежденности материала. Иными словами, методы измерения напряжений, основанные на эффекте акустоупругости, как правило, не учитывают поврежденность материала [29,30]. Попробуем оценить влияние поврежденности.

Рассмотрим образец материала (имеющего начальные напряжения), выполненный в виде стержня, по которому может распространяться продольная упругая волна. Динамика стержня с учетом напряжений и поврежденности его материала описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_o^2 \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha\psi = \beta_2 E \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{23}$$

Напряжение определяется соотношением $\sigma = 6g\frac{\partial u}{\partial x}$, где через $g = \frac{E}{2} + \frac{\nu_1}{6}(1 - 2\nu) + \nu_2(1 - 2\nu) + \frac{4}{3}\nu_3$ обозначен коэффициент, характеризующий геометрическую и физическую упругие нелинейности стержня; $\nu_{1,2,3}$ – упругие модули Ламе третьего порядка; ν – коэффициент Пуассона. Для большинства металлов и их сплавов g < 0.

В низкочастотном диапазоне ($\omega \to 0$) скорость волны принимает значение

$$\upsilon_\Phi(0) \approx \sqrt{C_0^2 \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) + \frac{E\beta_1\beta_2}{\alpha}}. \tag{24}$$

Затухание волны при этом пропорционально квадрату частоты:

$$K^{11}(0) \approx \frac{E\beta_1\beta_2\omega^2}{\alpha^2 \sqrt{C_o^2 \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right) + \frac{E\beta_1\beta_2}{\alpha}}} \tag{25}$$

В высокочастотном диапазоне ($\omega \to \infty$) фазовая скорость стремится к значению

$$\upsilon_\Phi(\infty) \approx C_0 \sqrt{1 + \frac{\sigma}{E}}, \tag{26}$$

а затухание волны пропорционально первой степени частоты:

$$K^{11}(\infty) \approx \frac{E\beta_1\beta_2\omega}{\alpha C_0\sqrt{1+\dfrac{\sigma}{E}}}. \qquad (27)$$

При $\sigma < 0$ фазовая скорость волны уменьшается, а затухание растет с ростом напряжения, это происходит, как в низкочастотном, так и в высокочастотном диапазонах.

В книге [31] приведены экспериментальные зависимости затухания, скорости изменения продольной волны и напряжения от деформации для монокристалла алюминия (частота упругих волн 10 МГц). Качественно эти зависимости совпадают с теми, которые могут быть рассчитаны по формулам (24)-(27).

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-08-01836).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неразрушающий контроль: Справочник: В 7 т. Под общ. ред. В.В. Клюева. Т.3: Ультразвуковой контроль / И.Н. Ермолов, Ю.В. Ланге. М.: Машиностроение, 2004. 864 с.
2. Качанов Л.М.Основы механики разрушения, М.: Наука,1974.-311с.
3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука,1966.-752 с.
4. Maugin G.A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge University Press, UK. 1992. 350 p.
5. Зуев Л.Б., Муравьев В.В., Данилова Ю.С. О признаке усталостного разрушения сталей // Письма в ЖТФ. 1999. Т.25, № 9. С.31-34.
6. Hirao M., Ogi H., Suzuki N., Ohtani T. Ultrasonic Attenuation Peak During Fatigue of Polycristalline Copper // Acta Mater. 2000. Vol. 48. P. 517-524.
7. Wang J., Fang Q.F., Zhu Z.G. Sensitivity of Ultrasonic Attenuation and Velocity Change to Ciclic Deformation in Pure Aluminum // Phys. Stat. Sol. (a). 1998. Vol. 169. P.43-48.
8. Клепко В.В., Колупаев Б.Б., Колупаев Б.С., Лебедев Е.В. Диссипация энергии и дефект модуля в гетерогенных системах на основе гибкоцепных линейных полимеров // Высокомолекулярные соединения. 2007. Т.49, № 1. С.139-143.
9. Волков В.М. Разрыхление металлов и разрушение конструкций машин // Вестник ВГАВТ. Сер. «Надежность и ресурс конструкций». Нижний Новгород: Изд-во ВГАВТ. 2003. Вып. 4. С.50-69.
10.Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
11.Шкарлет Ю.М. О теоретических основах электромагнитных и электромагнитоакустических методов неразрушающего контроля // Дефектоскопия. 1974, № 4. С.12-20.
12. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.
13. Романов А.Н. Разрушение при малоцикловом нагружении. М.: Наука. 1988. 278 с.
14. Березина Т. Г., Минц И. И. Влияние структуры на развитие третьей стадии ползучести хромомолибденованадиевых сталей // Жаропрочность и жаростойкость металлических материалов. М.: Наука, 1976. С. 149–152.
15. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / отв.ред. академик РАН Ф.М. Митенков. М.: Наука, 2009. – 280 с.
16. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008.- 424с.

17. Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С. Численное моделирование накопления повреждений при сложном пластическом деформировании // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т.2, № 1. С.5-18.
18. Кондратьев А.И. Прецизионные измерения скорости и затухания ультразвука в твердых телах // Акустический журнал. 1990. Т.36, № 3. С.470-476.
19. Мишакин В.В., Наумов М.Ю., Мишакин С.В., Кассина Н.В. Разработка акустического метода оценки поврежденности металлических сплавов до образования макротрещины // Дефектоскопия. 2007, № 10. С.49-57.
20. Ерофеев В.И., Ромашов В.П. Влияние дислокаций на дисперсию и затухание ультразвука в твердом теле // Письма в ЖТФ. 2002. Т.28, №6. С.6-11.
21. Ерофеев В.И., Ромашов В.П. Влияние циклического нагружения и деформации материала на характеристики распространения в нем продольной акустической волны // Дефектоскопия. 2004, №1. С.59-64.
22. Ерофеев В.И., Ромашов В.П., Смирнов С.И. Экспериментальные исследования характеристик ультразвука в стальных образцах, вырезанных из трубопровода, долгое время находящегося в эксплуатации // Контроль. Диагностика. 2007. № 10. С.46-48.
23. Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации. М.:Физматлит,2009.-208 с.
24. Ерофеев В.И., Никитина Е.А. Самосогласованная динамическая задача оценки поврежденности материала акустическим методом // Акустический журнал. 2010. Т.56. № 4. С.554-557.
25. Ерофеев В.И., Никитина Е.А. Локализация волны деформации, распространяющейся в поврежденном материале // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 6. С.60-62.
26. Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Никитина Е.А. Учет влияния поврежденности материала на скорость распространения в нем упругой волны // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. Вып.40. www.mai.ru/science/trudy/
27. Erofeyev V.I., Nikitina E.A., Sharabanova A.V. Wave propagation in damaged materials using a new generalized continuum // Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Yea After the Cosserats. Springer. New York. USA, 2010. P.143-148.
28. Ерофеев В.И., Никитина Е.А., Смирнов С.И. Акустоупругость поврежденных материалов // Контроль. Диагностика. 2012. № 3. С.24-26.
29. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями (в двух томах). Киев: Наукова думка. 1986.
30. Никитина Н.Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. Н.Новгород: ТАЛАМ, 2005. 208 с.
31. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир. 1972. 307 с.

Дата поступления статьи: 5 июня 2016 года.