УДК 534.11

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

© Владислав Львович Литвинов, Валерий Николаевич Анисимов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Самарский государственный технический университет"

СамГТУ, Самара, Россия

vladlitvinov@rambler.ru, anisimov170159@mail.ru

Аннотация. *Разработан обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ механических систем законами, полученными из решения обратной задачи. Получены приближенные решения функционального уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами, при помощи метода наименьших квадратов и асимптотического метода в случае линейного закона движения границ. Произведена оценка погрешности приближенных методов путем сравнения с точным решением в частном случае.*

Ключевые слова: *функциональное уравнение, колебания систем с движущимися границами, законы движения границ.*

EXACT AND APPROXIMATE SOLUTION OF FUNCTIONAL EQUATIONS DESCRIBING THE OSCILLATIONS OF SYSTEMS WITH MOVING BOUNDARIES

© Vladislav L. Litvinov, Valeriy N. Anisimov

Samara State Technical University, Samara, Russia

Abstract*. A reverse method to approximate the laws of sufficient variety of mechanical systems boundaries laws of motion, obtained by solving the inverse problem. The approximate solution of the functional equation describing the oscillations of systems with moving boundaries, using the least squares method and asymptotic method in the case of linear motion of the boundaries of the law. The estimation error of approximate methods by comparison with the exact solution in the particular case.*

Key words: *functional equation, variations of systems with moving boundaries, laws of boundary moving.*

При решении задач о колебаниях механических объектов с движущимися границами возникает необходимость в решении следующего функционального уравнения [1,2]:

$$\varphi(\tau+l(\tau))-\varphi(\tau-l(\tau))=1, \tag{1}$$

где $\tau-$ безразмерное время, $l(\tau)-$ закон движения границы. Задача состоит в нахождении $\varphi(z)$ при различных значениях $l(\tau)$. В общем случае методика нахождения точного решения уравнения (1) неизвестна. Для решения используется обратный метод, т.е. по заданной функции $\varphi(z)$ находится $l(\tau)$. Например, для функции

$$\varphi(z)=\frac{\ln[(vz+1)/(1-v)]}{\ln[(1+v)/(1-v)]}-1 \tag{2}$$

закон движения границы имеет вид $l(\tau)=1+v\tau,$ где $v-$ скорость движения границы.

В настоящей работе получено точное решение уравнения (1) в частном случае, при неподвижной левой границе. Так же получены приближенные решения уравнения (1) в случае равномерного движения границы с помощью метода наименьших квадратов и асимптотического метода. Произведена оценка точности приближенных методов.

Пусть движение системы описывается волновым уравнением:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)-U_{\xi\xi}(\xi,\tau)=0 \tag{3}$$

при граничных условиях первого рода

$$U(\ell_1(\tau),\tau)=F_1(\tau);\ \ \ell_1(0)=0;$$

$$U(\ell_2(\tau),\tau)=F_2(\tau);\ \ell_2(0)=1;\ \ell_2(\tau)>\ell_1(\tau). \tag{4}$$

Здесь $\tau,\xi-$ безразмерное время и безразмерная пространственная координата; $\ell_1(\tau),\ell_2(\tau)$ – законы движения границ; $F_1(\tau),F_2(\tau)-$ заданные функции.

Для решения задачи (3) – (4) используем представление Даламбера. Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$U(\xi,\tau)=g(\tau+\xi)+G(\tau-\xi), \tag{5}$$

где $g(z)$ и $G(z)-$ произвольные функции, которые необходимо определить из граничных условий, $z-$произвольная независимая переменная.

Подставляя решение (5) в граничные условия (4), нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases} g(\tau+\ell_1(\tau))+G(\tau-\ell_1(\tau))=F_1(\tau); \\ g(\tau+\ell_2(\tau))+G(\tau-\ell_2(\tau))=F_2(\tau). \end{cases} \tag{6}$$

В отличие от метода А.И. Весницкого [2, 3], где в дифференциальном уравнении вводятся новые переменные останавливающие границы и оставляющие уравнение инвариантным, для упрощения задачи введем в систему (6) новые функции [4]:

$$g(z) = r(\varphi(z)); G(z) = R(\psi(z)), \tag{7}$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\tau + \ell_1(\tau)) = \psi(\tau - \ell_1(\tau)); \\ \varphi(\tau + \ell_2(\tau)) = \psi(\tau - \ell_2(\tau)) + 1. \end{cases} \tag{8}$$

Заметим, что возможность решения задачи (3) – (4) зависит от степени сложности граничных условий, а также от того, сможем ли мы решить систему (8). Для решения таких систем в [1] – [4] использован обратный метод. При задании функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в них вводится несколько произвольных постоянных. Зависимость найденных законов движения $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$ от величин этих констант позволяет аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

Совокупность обратных решений достаточно широка. Приводимые ниже решения удовлетворяют соотношениям:

$$\ell_1(0) = 0; \ell_2(0) = 1; \psi(-1) = -1.$$

Множество полученных законов движения границ разбито на классы. Решения, приведенные в таблице 1, относятся к классу А, когда левая граница неподвижна и $\varphi(z) = \psi(z)$.

Таблица 1

	$l_2(\tau)$	$\varphi(z) = \psi(z)$
1.	$v\tau + 1$	$\dfrac{Ln\left[(vz+1)/(1-v)\right]}{Ln\left[(1+v)/(1-v)\right]} - 1$
2.	$\sqrt{B\tau + B^2} / \lvert B \rvert$	$\sqrt{Bz + B + 0,25} -$ $-\sqrt{B^2 - B + 0,25} - 1$
3.	$1/(4B\tau + 1)$	$Bz^2 + 0,5z - B - 0,5$
4.	$\dfrac{1}{\alpha} arcsh\left[\dfrac{0,5}{B_1 e^{\alpha\tau} - B_2 e^{-\alpha\tau}}\right]$	$B_1(e^{\alpha z} - e^{-\alpha}) + B_2(e^{-\alpha z} - e^{\alpha}) - 1,$ $B_1 = B_2 + 1/(e^{\alpha} - e^{-\alpha}), \quad \alpha > 0$

5.	$\sqrt{(\tau+B)^2(\alpha^2-1)+1+2\alpha B+B^2}-\alpha(\tau+B)$	$\dfrac{Ln\left[(z+B)^2+1+2\alpha B+B^2\right]}{Ln\left[(1+\alpha)/(1-\alpha)\right]}-\dfrac{Ln\left[(B-1)^2+1+2\alpha B+B^2\right]}{Ln\left[(1+\alpha)/(1-\alpha)\right]}-1$
6.	$\dfrac{1}{\alpha}\left[-d+\sqrt{1+d^2+(\alpha\tau+B)^2}\right],$ $d=\dfrac{1+B^2-\alpha^2}{2\alpha}$	$\dfrac{arctg(\alpha z+B)}{arcctg\left[(1+B^2-\alpha^2)/(2\alpha)\right]}-\dfrac{arctg(B-\alpha)}{arcctg\left[(1+B^2-\alpha^2)/(2\alpha)\right]}-1$
7.	$\dfrac{1}{\alpha}\left(\ln\dfrac{1+\sqrt{1+4A^2e^{2\alpha\tau}}}{2A}\right)-\tau$	$Ae^{\alpha z}+B,\ \alpha=\ln\dfrac{1+\sqrt{1+4A^2}}{2A}$

Решения, приведенные в таблице 1 под номерами 1, 2, 3, 6, получены А.И. Весницким и А.И. Потаповым [2, 3], решения 4, 5, 7 получены впервые.

Следующий класс В определяется тем, что границы движутся по одинаковому закону:

$$\ell_1(\tau)=\ell(\tau);\ \ell_2(\tau)=1+\ell(\tau);\ \ell(0)=0.$$

Поскольку движение границ взаимосвязано, то между функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также существует взаимосвязь. Она выражается функциональным уравнением

$$\varphi(\bar{\varphi}(\psi(z))+1)-\psi(z-1)=1. \qquad (9)$$

Система (8) в данном случае может удовлетворяться только функциями, которые являются решениями уравнения (9). Приведем два ранее не известных решения класса В [4]:

1. Для заданных функций $\varphi(z)=B(e^{-\alpha z}-1)-C(e^{-\alpha}-1)-1;\ B=C+1/(e^{-\alpha}-1);$ $\psi(z)=C(e^{\alpha z}-1)-C(e^{-\alpha}-1)-1$ из системы (8) находим следующие законы движения границ: $\ell_1(\tau)=\dfrac{1}{\alpha}\ln[(Be^{-\alpha\tau}-Ce^{\alpha\tau})/(B-C)];\quad \ell_2(\tau)=1+\ell_1(\tau).$

2. Для функций $\varphi(z)=(1-\nu)z/2+(1+\nu)/2-1;\ \psi(z)=(1+\nu)z/2+(1+\nu)/2-1$ законы движения границ $\ell_1(\tau)=\nu\tau;\ \ell_2(\tau)=1+\nu\tau.$

Здесь α, B, C, ν – постоянные величины.

Для решений класса С границы движутся симметрично в разные стороны, т.е. $\ell_1(\tau)=-\ell(\tau);\ \ell_2(\tau)=\ell(\tau).$

Уравнение взаимосвязи функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ здесь имеет вид

$$\varphi(z) = \psi(z) + 0,5.$$

Решения класса С поучаются из решений класса А по следующим формулам:

$$\ell(\tau) = \ell_A(\tau);\ \psi(z) = \frac{1}{2}\psi_A(z);\ \varphi(z) = \psi(z) + 0,5,$$

где индексом *A* обозначены соответствующие функции решений класса А.

Новое решение класса D получено для случая, когда обе границы движутся равномерно:

$$\ell_1(\tau) = (B_2 - B_1)\tau / (B_2 + B_1);\ \ell_2(\tau) = (B_2 e^{1/c} - B_1)\tau / (B_2 e^{1/c} + B_1) + 1;$$

$$\varphi(z) = \psi(z) = C\ Ln(B_1 z + D) - C\ Ln(D - B_2) - 1;$$

$$D = (B_1 + B_2 e^{1/c}) / (e^{1/c} - 1).$$

Решение под номером один в таблице 1 может быть использовано при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске) [6, 7]. Приведенные решения класса В могут быть использованы при изучении колебаний гибких звеньев передач. Остальные решения являются модельными.

Класс обратных решений ограничен, например, не получено решение для равноускоренного движения границы $l(\tau) = 1 + v\tau^2$. Получение указанного решения актуально при описании продольных и поперечных колебаний канатов грузоподъемных установок на стадии разгона [5].

Для получения приближенного решения функционального уравнения (1) предлагается использовать метод наименьших квадратов. Функция $\varphi(z)$ находится в виде многочлена степени *n*:

$$\varphi(z) = p_1 z + p_2 z^2 + ... + p_n z^n. \tag{10}$$

Параметры $p_1, p_2, ..., p_n$ с помощью метода наименьших квадратов находятся таким образом, чтобы функция (10) удовлетворяла уравнению (1) при различных $\tau_i\ (i = \overline{1, m})$.

В целях оценки погрешности метода рассмотрена тестовая задача. Для линейного закона движения границы $l(\tau) = 1 + v\tau$ при различных значениях v находился многочлен пятой степени

$$\varphi(z) = p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + p_5 z^5 + p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - 1, \tag{11}$$

удовлетворяющий условию

$$\varphi(-1) = -1.$$

Значения многочлена, полученного по методу наименьших квадратов, сравнивались со значениями, полученными с помощью точного решения (2). Сравнение производилось за период времени, пока длина уменьшалась от 1 до 0,3. При меньших длинах многочлен (11) плохо описывает функцию $\varphi(z)$. При стремлении $l(\tau)$ к нулю уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(\tau+0)-\varphi(\tau-0)=1,$$

т.е. функция $\varphi(z)$ в точке τ терпит разрыв.

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ метода наименьших квадратов (разница между функциями (2) и (11)) в зависимости от скорости движения границы v приведены в таблице 2.

Таблица 2

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Δ	0,017	0,015	0,013	0,015	0,017	0,039	0,054	0,046	0,140

Для приближенного решения уравнения (1) предлагается также использовать асимптотический метод.

При неподвижных границах $\ell(\tau)=\ell$ решением (1) является линейная функция

$$\varphi_s(z)=\frac{1}{2\ell}z+const.$$

В случае медленного движения границы $\ell(\tau)$ «фаза» волны $\varphi(z)$ за время ее пробега через систему изменяется незначительно относительно $\varphi_s(z)$. Предполагается, что $\varphi(z)$ имеет производные любого порядка, и записывая $\varphi(\tau+\ell(\tau))$ в виде степенных рядов по $\ell(\tau)$, после их подстановки в (1) получим дифференциальное уравнение для медленно изменяющейся «фазы» $\varphi(\tau)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{d^{k+1}\varphi}{d\tau^{k+1}}=1. \qquad (12)$$

Так как $\varphi(\tau)$ мало отклоняется от линейного закона $\varphi_s(z=\tau)$ за время пробега волны, то каждый следующий член в левой части уравнения (12) много меньше предыдущего и его решение нужно искать в виде ряда

$$\varphi(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\tau). \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (12) и приравнивая члены одинакового порядка малости по отдельности к нулю, получим для нулевого приближения

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau} = \frac{1}{2\ell(\tau)}.$$

Отсюда

$$\varphi_0(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^{\tau} \frac{\partial t}{\ell(t)}.$$

В случае линейного закона движения границы $\ell(t) = 1 + v\tau$ фаза динамических собственных колебаний равна

$$\varphi(z) = \frac{\ln[(vz+1)/(1+v)]}{2v}. \tag{14}$$

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ асимптотического метода (разница между функциями (2) и (14)) в зависимости от скорости движения границы Δ приведены в таблице 3.

Таблица 3

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Δ	0,002	0,006	0,013	0,023	0,036	0,053	0,073	0,100	0,139

В интервале $v \in [0{,}1; 0{,}6]$ погрешности рассмотренных приближенных методов малы. Увеличение погрешности при приближении v к единице объясняется тем, что функция (2) при $v \to 1$ становится бесконечно большой.

Незначительные погрешности позволяют применять описанные методы для решения функционального уравнения (1) в случаях, когда его точное решение не известно.

Список литературы

1. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун–т, Самара, 2009, 131 стр.

2. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками // Физматлит, М., 2001, 320 стр.

3. *Весницкий А.И.* Обратная задача для одномерного резонатора изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофизика, 1971, (10), 1538–1542.

4. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания механических систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 3 (28) – 2012.

5. *Самарин Ю.П., Анисимов В.Н.* Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение, 1986, (12), 17–21.

6. *Горошко О.А., Савин Г.Н*. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины // Наук. думка, Киев, 1971, 270 стр.

7. *Савин Г.Н., Горошко О.А*. Динамика нити переменной длины // Наук.думка, Киев, 1962, 332 стр.

Дата поступления статьи: 16 апреля 2016 года.