УДК 531.391

О САМОСИНХРОНИЗАЦИИ ИНЕРЦИОННЫХ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЕЙ С ПОДВИЖНЫМ ЦЕНТРОМ МАСС

©Мария Александровна Потапенко

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт Проблем Машиноведения РАН (ИПМаш РАН)
Санкт-Петербург

m.potap@mail.ru , Россия

Аннотация. *Рассмотрена модель поведения двух соосных дебалансных вибровозбудителей с внутренней степенью свободы, обеспечивающих подвижность их центров масс, установленных на твёрдом теле и три условия, обеспечивающие временную устойчивость синфазного режима. Найдено аналитическое выражение для радиуса подвижной массы, а условия устойчивости Блехмана-Шперлинга выражены через параметры системы; установлены области изменения параметров, при которых все условия выполняются.*

Ключевые слова: *дебалансный вибровозбудитель, устойчивость, самосинхронизация, подвижный центр масс.*

THE SELFSYNCHRONIZATION OF INERTIAL VIBROEXCITERS WITH MOVABLE CENTERS OF MASS

©M.Potapenko

Institute of Problems of Mechanical Engineering, Saint-Petersburg, Russia

Abstract. The model of two coaxial unbalanced exciters with inner degrees of freedom that installed on a solid body and three conditions of stability are presented. An analytic expression for the radius of the moving masses and the conditions of stability Blekhman - Sperling expressed through the parameters of the system; established range of parameters for which all the conditions are met.

Keywords: *unbalanced vibroexciter, stability, selfsynchronization, the mobile center of mass*

К настоящему времени теория синхронизации вращающихся объектов без внутренних степеней свободы достаточно хорошо развита. С другой стороны, роторы с внутренней степенью свободы, впервые упомянутые Р. Ф. Нагаевым и П.С.Гольдманом в [1] рассматривались в простейшей системе. Позднее в работе И.И.Блехмана и Л. Шперлинга [2] была поставлена задача для общего случая синхронизации вращающихся тел с внутренними степенями свободы. В этой работе были получены уравнения движения системы, состоящей из двух одинаковых соосных вибровозбудителей, центрально установленных на плоскоколеблющемся твердом теле и имеющих по 2 дополнительных степени свободы. Особенностью этого случая является возможность получения точного решения для стационарного синхронного режима и исследования его устойчивости в малом. Было установлено, что при помощи дополнительных степеней свободы роторов синфазный режим вращения, неустойчивый в послерезонансной области, может стать устойчивым в малом при выполнении трех условий, ограничивающих параметры системы. Однако устойчивость при этом является временной. Полученные условия содержали промежуточную величину - радиус подвижной массы в установившемся режиме.

Целью настоящей работы является анализ результатов работы [2], в частности, полученных в ней условий устойчивости синхронного и синфазного вращения роторов ("условий Блехмана-Шперлинга"). Показано, что выполнение двух условий, при обычных значениях параметров, гарантирует удовлетворение третьего, а все три условия выполняются в узком диапазоне изменения частоты вращения роторов.

Конкретными устройствами, соответствующими рассматриваемой модели, являются, например, вибрационная мельница и устройство для вибрационной обработки деталей [3].

Описание системы. Схема установки представлена на Рис.1, на котором обозначено: 1 - носитель - твердое тело, установленное на пружинах с известными характеристиками и совершающее плоское движение. На нем жёстко закреплены два соосных дебаланса - 2. Внутри каждого дебаланса закреплена на пружине дополнительная масса - 3, способная совершать колебательные движения в радиальном направлении. В отличие от работы [2] предполагается конечность величин жесткостей опорных пружин (Cx и Cy). Система считается симметричной, так что поворотные колебания тела 1 отсутствуют.

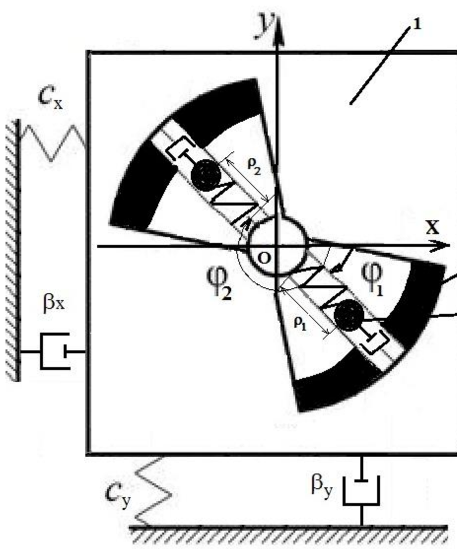

Рис.1 Виброустройство с роторами, имеющими внутренние степени свободы

Таким образом, положение носителя определяется координатами x и y, каждого – того дебаланса - по одной вращательной φ_i и одной поступательной координате, определяющей расстояние ρ_i дополнительной массы от оси ротора. **Система уравнений, описывающих поведение виброустановки с внутренними степенями свободы неуравновешенных роторов**. В работе [2] были получены уравнения движения описанной системы. Для случая, когда дополнительные массы могут двигаться только в радиальном направлении, как это представлено на Рис.1, уравнения имеют вид:

$$[I + m_o\varepsilon^2 + m(r+\rho_s)^2]\ddot{\varphi}_s + K_s(\dot{\varphi}_s - \omega) + 2m(r+\rho_s)\dot{\rho}_s\dot{\varphi}_s -$$
$$-[m_o\varepsilon^2 + +m(r+\rho_s)^2](\ddot{x}\sin\varphi_s + \ddot{y}\cos\varphi_s) = K_s(\omega_s - \omega) \qquad (s=1,2)$$

$$M\ddot{x} = \sum_{i=1}^{2}[m_o\varepsilon + m(r+\rho_i)](\ddot{\varphi}_i\sin\varphi_i + \dot{\varphi}_i^2\cos\varphi_i) -$$
$$-m\sum_{i=1}^{2}\ddot{\rho}_i\cos\varphi_i + 2m\sum_{i=1}^{2}\dot{\rho}_i\dot{\varphi}_i\sin\varphi_i - \beta_x\dot{x} - C_x x \qquad (1)$$
$$M\ddot{y} = \sum_{i=1}^{2}[m_o\varepsilon + m(r+\rho_i)](\ddot{\varphi}_i\cos\varphi_i - \dot{\varphi}_i^2\sin\varphi_i) + +m\sum_{i=1}^{2}\ddot{\rho}_i\sin\varphi_i + 2m\sum_{i=1}^{2}\dot{\rho}_i\dot{\varphi}_i\cos\varphi_i$$
$$-\beta_y\dot{y} - C_y y$$
$$\ddot{\rho}_s + \beta_\rho\dot{\rho}_s + \omega_\rho^2\rho_s = (r+\rho_s)\dot{\varphi}_s^2 - (\ddot{x}\cos\varphi_s - \ddot{y}\sin\varphi_s),$$

где $M = M^o + 2m_o + 2m,\ \ \omega_\rho^2 = \frac{C_\rho}{m}$.

Здесь, в отличие от работы [2], учтены слагаемые $\beta_x\dot{x}$ и $\beta_y\dot{y}$, учитывающие сопротивление колебаниям твердого тела, вследствие чего синхронная частота ω отлична от парциальных частот $\omega_1 = \omega_2 = \omega_*$. С физической точки зрения $\omega < \omega_*$, т.к. в этом случае часть энергии, потребляемой электродвигателями, расходуется на преодоление потерь при колебаниях тела - 3.

В уравнениях (1) M^o – масса носителя, m_o - дополнительная подвижная масса внутри дебаланса; m - масса дебаланса ; M - масса всей установки; ε – эксцентри-ситет или величина смещения центра масс дебаланса от его оси вращения; I - момент инерции сплошной части дебаланса; r - длина ненапряженной пружины внутри ротора; ρ - радиальное смещение подвижной массы от состояния покоя в направлении возрастания радиуса; x – смещение центра масс носителя по горизонтали; y - смещение центра масс носителя по вертикали; ω – синхронная угловая скорость роторов в установившемся режиме; φ_i – угол поворота ротора, отсчитываемый по часовой стрелке от горизонтального направления; $\beta_x = \beta_y = \beta$ - коэффициенты затухания колебаний носителя вдоль соответствующих осей; $C_x = C_y = C$ - коэффициенты жесткости пружин, на которых установлена платформа, вдоль соответствующих осей; β_ρ - коэффициент линейного сопротивления колебаниям подвижной массы вдоль радиальной направляющей; C_ρ - коэффициент жесткости пружины внутри ротора; K - суммарный коэффициент демпфирования;ω_s - парциальная скорость возбудителя, т.е. угловая скорость, которую развивает каждый ротор, установленный на неподвижном основании; ω_ρ- парциальная частота внутренней массы.

Для стационарного синфазного режима движения системы с одинаковыми возбудителями $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \omega, \varphi_1 = \varphi_2 = \omega t, \rho_1 = \rho_2 = \rho^o = const$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_*$ из (1) получается следующая система уравнений для определения координат x, y, ρ и угловой скорости синхронного вращения ω:

$$[m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)](\ddot{x}\sin\omega t + \ddot{y}\cos\omega t) = K(\omega - \omega_*)$$
$$M\ddot{x} = 2[m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)]\,\omega^2\cos\omega t - \beta_x\dot{x} - C_x x \qquad (2)$$

$$M\ddot{y} = 2[m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)](-\omega^2 \sin\omega t) - \beta_y\dot{y} - C_y y$$
$$\omega_\rho^2\rho^o = (r+\rho^o)\,\omega_*^2 - (\ddot{x}\cos\omega t - \ddot{y}\sin\omega t)$$

Для стационарного режима колебаний второе и третье уравнения (2) дают выражения для координат x и y.

$$x = \frac{2\big(m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)\big)\,\omega^2(C - M\omega^2)}{(M\omega^2 - C)^2 + \beta^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{2\big(m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)\big)\,\omega^3\beta}{(M\omega^2 - C)^2 + \beta^2\omega^2}\sin\omega t \tag{3}$$

$$y = \frac{2\big(m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)\big)\,\omega^3\beta}{(M\omega^2 - C)^2 + \beta^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{2\big(m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)\big)\,\omega^2(M\omega^2 - C)}{(M\omega^2 - C)^2 + \beta^2\omega^2}\sin\omega t$$

После подстановки полученных выражений в (2) находим:

$$K(\omega - \omega_*)\,[(M\omega^2 - C)^2 + \beta^2\omega^2] + 2\omega^5\beta\big(m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)\big)^2 = 0 \tag{4}$$
$$\big[(r+\rho^o)\,\omega_*^2 - \omega_\rho^2\rho^o\big][(M\omega^2 - C)^2 + \beta^2\omega^2] - \\ -2\omega^4\big(m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)\big)(M\omega^2 - C) = 0$$

А из первого уравнения системы (4) получаем:

$$\omega - \omega_* = \left(-2\omega^5\beta\big(m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)\big)^2\right)\left(K[(M\omega^2 - C)^2 + \beta^2\omega^2]\right)^{-1}$$

При $\beta > 0$ всегда $\omega < \omega_*$, т.к. часть подведённой энергии затрачивается на преодоление сопротивления в колебательной части системы, а при $\beta = 0$ имеем $\omega = \omega_*$.

Проверка выполнимости и анализ условий временной устойчивости Блехмана-Шперлинга. В работе И.И.Блехмана и Л.Шперлинга [2] предполагалось, что $\beta = 0$ и $C \approx 0$ и, таким образом, $\omega = \omega_*$. Проведенная линеаризация исходных уравнений вблизи стационарного режима позволила сформулировать три условия временной устойчивости синхронного синфазного режима в послерезонансной области $\omega > \lambda$, т.е. режима, который при отсутствии дополнительных масс неустойчив.

Условия временной устойчивости для рассматриваемой здесь системы:

$$1.\ \omega > \omega_\rho \tag{5}$$
$$2.\ \omega < \frac{\omega_\rho}{\sqrt{e^*}} \tag{6}$$
$$3.\ \omega^2\left[1 + 2\frac{MA^{o2}}{I^o} - 4\,\frac{mR^{o2}}{I^o}\right] < \omega_\rho^2 \tag{7}$$

Здесь $e^* = 1 - 2\,\frac{m}{M}$; $R^o = r + \rho^o$; $I^o = I + m_o\varepsilon^2 + m(r+\rho^o)^2$, а

$$A^o = \frac{m_o\varepsilon + m(r+\rho^o)}{M} \tag{8}$$

Первые два условия представляют собой соотношения между параметрами системы. Рассмотрим третье условие, выразив в нём параметры установившегося режима I^o, A^o, R^o, зависящие от ρ^o, через исходные данные.

Покажем, что это условие всегда выполняется, если выполняются первые два условия. Поскольку параметр $q = \frac{m}{M}$ обычно мал, то в диапазоне значений ω,в котором справедливы условия (5), (6) можно считать:

$$\omega = \frac{\omega_\rho}{1 - \varepsilon_1} = \omega_\rho(1 + \varepsilon_1), \tag{9}$$

где $0 < \varepsilon_1 < q$ (10)

- малый параметр. Заметим, что

$$\frac{\omega^2}{\omega_\rho^2} = 1 + 2\varepsilon_1 \qquad (11)$$

И тогда можно проверить выполнение третьего условия, т.е. неравенства (7), только в диапазоне значений ω, определяемом соотношениями (9), (10). Из второго уравнения системы (4) можно получить выражение для координаты ρ^o дополнительной массы в стационарном синфазном режиме, а при $\beta = 0,\ C = 0$ и $\omega_* = \omega$, как и принято в работе [2], получится

$$\rho^o = \left(r - \frac{2(m_o\varepsilon + mr)}{M}\right)\left(\frac{\omega_\rho^2}{\omega^2} - 1 + 2\frac{m}{M}\right)^{-1}$$

Рассмотрим условия (9 -11) именно для этого случая. При малом ε_1 с точ-ностью до ε_1 включительно, имеем:

$$\frac{\omega}{\omega_\rho} = 1 + \varepsilon_{1,} \qquad \frac{\omega_\rho^2}{\omega^2} = 1 - 2\varepsilon_1$$

Тогда получаем:

$$\rho^o = \left(r - \frac{2m_o}{M}\varepsilon - 2qr\right)(2q - 2\varepsilon_1)^{-1}$$

Подчеркнем, что здесь $0 < \varepsilon_1 < q \ll 1.$

Покажем, что при практически интересных значениях параметров системы имеет место соотношение:

$$\frac{2m_o}{M}\varepsilon + 2qr \ll r$$

или, учитывая, что

$$\varepsilon_1 < q \ll 1 \qquad (12)$$

получаем

$$\frac{m_o}{M}\varepsilon \ll \frac{r}{2} \qquad (13)$$

Но величина $B = \frac{2m_o}{M}\varepsilon$ представляет собой амплитуду колебаний носителя в установившемся режиме при $\beta \approx 0$, C≈ 0, и $m = 0$, что видно из (3). Поэтому неравенство (13) сводится к условию: $B \ll r.$ Это условие практически всегда выполняется, поскольку обычно $\frac{B}{r} \ll \frac{1}{10}$. Тогда с той же точностью найдем:

$$\rho^o = \frac{r}{2(q - \varepsilon_1)}$$

Отбрасывая конечные величины по сравнению со слагаемыми, имеющими порядок $\frac{1}{\varepsilon_1}$ и $\frac{1}{q}$, получим:

$$R^o = r + \rho^o = r + r\frac{1}{2q - 2\varepsilon_1} \approx \frac{r}{2(q - \varepsilon_1)} = \rho^o$$

$$I^o = I + m_o\varepsilon^2 + m\mathrm{R}^{o2} = m\rho^{o2} \qquad (14)$$

Проверим выполнение третьего условия временной устойчивости Блехмана-Шперлинга .Согласно (11), по этому условию должно быть:

$$1 + 2\frac{MA^{o2}}{I^o} - 4\ \frac{mR^{o2}}{I^o} < 1 - 2\varepsilon_1$$

или, при учете (3), (8) и (14) это неравенство принимает вид:

$$(M(m_o\varepsilon + m(r + \rho^o))^2)M^{-2} + \varepsilon_1 m\rho^{o2} < 2m\rho^{o2}$$

а при учете того, что $m_o\varepsilon + mr \ll m\rho^o,$ получается:

$$m^2\rho^{o2} + Mm\rho^{o2}\varepsilon_1 < 2mM\rho^{o2}, \quad \text{или} \quad \frac{m}{M} + \varepsilon_1 < 2q + \varepsilon_1 < 2$$

Последнее соотношение в соответствии с (12) выполняется всегда. Поэтому третье условие временной устойчивости (12) при выполнении первого и второго условий и при малых q и $\frac{B}{r}$ всегда выполняется и, таким образом, условия Блехмана-Шперлинга сводятся к первому и второму условиям.

Другими словами, введение внутри каждого ротора дополнительной подвижной массы обеспечивает подвижность его центра масс и приводит к временной устойчивости синфазного режима в послерезонансной области $\omega > \lambda$, тогда как при отсутствии дополнительных масс этот режим неустойчив. Вместе с тем проведенное исследование показывает, что временная устойчивость синфазного режима при самосинхронизации или в случае использования дополнительных масс имеет место в сравнительно узком диапазоне изменения частоты ω: $\omega_\rho < \rho < \omega_\rho(1+q)$, а значение координаты подвижной массы ρ^oв этом режиме должно быть велико по сравнению с длиной ненапряженной пружины внутри ротора r.

Заключение. Рассмотрена система из двух соосных дебалансных вибровозбудителей с внутренней степенью свободы, установленных на упруго опертом твёрдом теле. Система описывается пятью существенно нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. При этом получены следующие результаты:

а) Проанализированы условия временной устойчивости в малом синхронно-синфазного режима движения возбудителей в случае мягко виброизолированной системы, полученные И.И.Блехманом и Л.Шперлингом;

б) Условия временной устойчивости Блехмана-Шперлинга выражены непосредственно через параметры системы;

в) Показана их непротиворечивость;

г) Доказано, что удовлетворение первых двух условий при обычных для практики значениях параметров гарантирует выполнение третьего.

Список литературы

1.Нагаев Р.Ф. Самосинхронизирующиеся системы. СПб.: Наука, 1996. 251с.

2. Blekhman I.I., Sperling L. The Setting up of the Self-Synchronization Problem of the Dynamic Objects with Inner Degrees of Freedom and Methods of its Solution//In "Selected Topics in Vibrational Mechanics " - Singapore et al: World Scientific Publishing Co.,2004. -409 p.; Chapter 13, P.209-234.

3. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. СПб.:ИД "Руда и Металлы ", 2013. 640с.

Дата поступления статьи: 31 марта 2016 года.