

УДК 621.73

## МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИИ РАЗДЕЛА ТЕЧЕНИЯ МЕТАЛЛА В ПРОЦЕССАХ ОСАДКИ ПЛОСКИХ ЗАГОТОВОК

© Константин Николаевич Соломонов, Николай Иванович Федоринин,  
Людмила Ивановна Тищук

Московский государственный университет путей сообщения  
(Воронежский филиал)

[konssol@list.ru](mailto:konssol@list.ru), Россия

**Аннотация.** В процессахковки и объемнойштамповки плоскихзаготовок существенное влияние на качество получаемых изделий оказывает распределение потоков металла по плоскости контакта заготовки и зеркала гравюры штампа. Обычно такие процессы проходят при температуре деформируемого металла, близкой к температуре рекристаллизации. Поэтому упрочнением металла можно пренебречь. Картина течения металла по плоскости контакта определяется положением линии раздела течения металла и направлением линий тока. Следовательно, при моделировании процессов изготовления поковок ключевую роль играют форма и положение линии раздела течения металла.

**Ключевые слова:** обработка металлов давлением, моделирование, программный комплекс, картина течения металла, линия раздела течения металла, линия тока, плоские заготовки.

## THE TECHNIQUE OF DRAWING DIVIDING LINE OF METAL FLOW IN THE PROCESSES OF FREE FORGING OF PLANE WORKPIECES

© K.N. Solomonov, N.I. Fedorinin, L.I. Tischuk

Moscow State University of Railway Engineering (Voronezh branch), Voronezh, Russia

**Abstract.** In the processes of forging and forming plane workpieces significant impact on the quality of the product has a distribution of metal flow on the contact plane of workpiece and the mirror of engraving a stamp. Usually such processes run deformable metal temperature close to the temperature of recrystallization. Therefore, the metal hardening can be neglected. The metal flow picture on the contact plane defined by the position of the dividing line of metal flow and direction of the flow lines. Therefore, for simulation of manufacturing processes of the forgings play a key role of shape and position of the dividing line of metal flow.

**Key words:** metal forming, simulation, program software, metal flow picture, dividing line of metal flow, flow line, plane workpieces.

Существенное значение при получении качественных заготовок в процессах пластического деформирования металла имеет скорость формирования их отдельных частей. Неравномерность формоизменения поковок, в значительной степени зависящая от неоднородности граничных контактных давлений, в ряде случаев приводит к образованию дефектов (прострел, плохая завязка волокон и т.п.). В производственной практике используются технологические и конструкционные приемы, дающие возможность предотвратить образование дефектов без нарушения конструкции детали. Экспериментальные дорогостоящие методы на сегодня утратили свое значение, в основном благодаря резкому скачку в развитии компьютерных средств и программных продуктов. Поэтому создание программных комплексов, предназначенных для моделирования формообразования заготовок в процессах пластической деформации, позволяющих указать места возможного образования дефектов, в наше время играет первостепенную роль.

В последние годы для моделирования процессов обработки металлов давлением (ОМД) на металлургических и машиностроительных предприятиях широко применяются программные комплексы (ПК), способные прогнозировать положение линии раздела течения металла.

Все ПК, предназначенные для моделирования процессов ОМД, можно разделить на три группы [1]: широкоориентированные (Ansys, SuperForge, Forge, Abaqus, Deform), специальные (Qform, Splen) и специализированные.

Широкоориентированные ПК позволяют моделировать практически все процессы обработки металлов давлением, начиная от простой подгибки или осадки заготовки, заканчивая деформацией многослойных материалов или штамповкой взрывом, с учетом термической обработки, фазовых превращений и микроструктурного анализа сталей и цветных сплавов. Некоторые из них ориентированы на решение самых сложных и ответственных нелинейных задач, а также на проведение многодисциплинарного статического и динамического анализа в рамках единого алгоритма.

Специальные ПК позволяют моделировать весь технологический процесс, включая подготовительные и промежуточные операции: нагрев, охлаждение, обрезку облоя, пробивку отверстий и непосредственно саму деформацию металлов в горячем, холодном и теплом состоянии. Эти ПК, в отличие от широкоориентированных, имеют более узкое применение.

К достоинствам широкоориентированных и специальных ПК можно отнести: широту охвата решаемых задач; достаточно высокую точность получаемых результатов, которая обеспечивается, в основном, благодаря учету многих факторов (температуры, реологии, материала и т.п.); дружелюбный, удобный и простой, интерфейс. В качестве недостатков можно отметить: весьма высокие требования к параметрам компьютерной техники; значительное время расчета и моделирования одного варианта; сравнительно высокую сложность и низкую скорость создания файла входных данных; затратность обучения пользователей.

Специализированные ПК, ориентированные на моделирование одного-двух процессов ОМД (например, получения поковок в процессах объемной штамповки иковки), имеют следующие преимущества: низкие требования к характеристикам компьютерной техники; высокую скорость расчетов; ускоренный ввод исходной информации; быстрое и легкое обучения пользовательского персонала. При этом следует иметь в виду, что область приложения рассматриваемых моделей в последние годы ускоренно расширяется: к «традиционному» самолето- и ракетостроению присоединяются автомобилестроение [2], вагоностроение и др.

Конечной целью наших разработок является создание простого в освоении и оперативного в обращении ПК для моделирования процессов пластического формоизменения металлов в процессах объемной штамповки иковки, способного служить интеллектуальным помощником конструктора и технолога.

В связи с этим краеугольным, на наш взгляд, приходится считать вопрос о построении картины течения металла по плоскости контакта инструмента и деформируемой заготовки.

Одним из способов решения задачи моделирования картины течения металла и пространственной эпюры контактных давлений служит так называемая «эквилибрантная теория», основанная на трех известных [3] принципах:

1. Принцип наименьшего сопротивления, выдвинутый применительно к пластической деформации Г. Треска (1895 г.), сформулирован С. И. Губкиным [4] следующим образом. «В случае возможности перемещения точек деформируемого тела в различных направлениях, каждая его точка перемещается в направлении наименьшего сопротивления». Прямым следствием закона наименьшего сопротивления является, например, образование заусенца при штамповке в открытых штампах. Металл в начальный период штамповки начинает вытекать в стороны за пределы фигуры штампа в зазор между верхним и нижним штампами. Заполнение же элементов полости штампа возможно, если сопротивление течению металла в

заусенец становится больше сопротивления течению в те или иные участки полости. Сопротивление течению металла в заусенец увеличивается по мере уменьшения его толщины в процессе движения верхнего штампа, что и обеспечивает в конечном итоге заполнение всех элементов полости. Для практического применения закона наименьшего сопротивления необходимо знать направление траектории, по которой для точек, на ней расположенных, сопротивление течению будет наименьшим.

Принцип наименьшего сопротивления следует учитывать при теоретических исследованиях и при решении практических задач. Так, например, штамповка осадкой круглой в плане поковки во многих случаях может быть осуществлена из заготовки с квадратным поперечным сечением.

2. Для случая осадки (сжатия) призматических и цилиндрических тел между параллельными плитами (бойками) при наличии трения по плоскостям контакта эти траектории определяются по принципу кратчайшей нормали, сформулированному А. Ф. Головиным [5], заключающемуся в том, что перемещение любой точки тела в плоскости, перпендикулярной к действию внешней силы, происходит по кратчайшей нормали к периметру сечения. Аналогичный принцип выдвинул Э. Зибелем [6]. Следует добавить, что максимальную конечную деформацию тело получит в тех направлениях, по которым будет передвигаться наибольшее количество точек. Пусть, например, осаживается призма с прямоугольным основанием. Согласно принципу перемещения точек по кратчайшей нормали к периметру сечения прямоугольник можно разделить на два треугольника и две трапеции линиями, представляющими собой граничные линии или линии раздела течения, поскольку длина нормалей к периметру сечения по обе стороны из каждой точки, лежащей на этих линиях, будет одинаковой. Учитывая количество точек тела, расположенных на направлениях течения в данном сечении, можно предположить, что после некоторой осадки сечение примет вид многоугольника. Нетрудно представить, что при увеличении степени осадки тела, рассматриваемого в нашем примере, периметры его поперечных сечений стремятся к эллипсам, а эллипсы в дальнейшем преобразуются в круги, после чего движение точек происходит по радиусам.

3. Такая закономерность изменения формы поперечных сечений тела при осадке была замечена еще К. Зоббе (1908 г.) [7], который предложил принцип наименьшего периметра. Этот принцип можно сформулировать так: любая форма поперечного сечения призматического или цилиндрического тела при осадке его в пластическом состоянии с наличием контактного трения стремится принять форму, имеющую при данной площади наименьший периметр, т. е. в пределе стремится к кругу.

Принцип наименьшего периметра справедлив при перемещении точек деформируемого тела по кратчайшим нормальям к периметрам сечений, перпендикулярных к направлению действующей силы. В дальнейшем было установлено, что кратчайшая нормаль не всегда является направлением наименьшего сопротивления, а лишь при условиях: если трение на поверхностях контакта металла с инструментом изотропно, т. е. одинаково по всем направлениям; если величина контактного трения значительна.

При осадке, например, прямоугольного параллелепипеда между плоскими бойками без контактного трения схема перемещения точек отличается от описанной выше, когда прямоугольник превращается в многоугольник, а затем эллипс и круг. Движение частиц в плоскостях, нормальных к направлению внешней силы, носит радиальный характер, и поперечные сечения в процессе деформации будут оставаться подобными исходным. В. Г. Березкин [8] это показал весьма тонкими экспериментами по осадке прямоугольных свинцовых и алюминиевых образцов, при которых трение было практически исключено.

В соответствии с этими принципами можно считать, что:

1. Существует некая линия, вдоль которой скорости перемещения частиц металла равны нулю. Следовательно, ее можно считать линией раздела течения металла.

2. Линия раздела течения металла является геометрическим местом точек, равноудаленных

от контура детали (поковки) или границы контура вдоль ребер жесткости.

Зная положение линии раздела течения металла, мы сможем предсказать распределение потоков металла по плоскости контакта при его формоизменении (пластической деформации).

Заметим, между прочим, что рассмотренные выше принципы действительно для деталей, имеющих ярко выраженное полотно (т.е. плоскостные участки). Несмотря на кажущуюся ограниченность области применения данной теории из-за вышеприведенной оговорки, тем не менее, детали с признаком «плоскостности» составляют обширный класс, охватывающий, например, ракетно- и самолетостроение, да и вообще транспортное машиностроение.

Процессы ОМД весьма сложны в создании математической модели, описывающей напряженно-деформированное состояние пластического формоизменения металла. Полная система дифференциальных уравнений, описывающая поведение нагретого металла при пластическом деформировании, содержащая множество параметров (температуру, время, реологию, напряжения, деформации, плотность и т.д.), благодаря чему модель процесса максимально приближена к реальным условиям, может быть решена лишь численными методами, да и то с существенными допущениями. Ярким примером такого подхода служит метод конечных элементов, реализованный практически во всех современных широкоориентированных и специальных ПК и содержащий вышеупомянутые недостатки.

Другой принципиально отличный подход заключается в упрощении математической модели еще на стадии ее разработки, а, следовательно, и облегчении решения системы дифференциальных уравнений и сведении ее в ряде вариантов к аналитическим зависимостям. В таких случаях приходится отказываться от всеобщности математической модели и ограничиваться описанием всего нескольких процессов ОМД, пренебрегая зачастую температурными и реологическими параметрами. Некоторые процессы ОМД (например, те из них, которые проходят при температуре рекристаллизации, благодаря чему упрочнением металла можно пренебречь) позволяют это делать без больших погрешностей.

В процессах ОМД значительную долю составляют плоские поковки, при формообразовании которых пространственная эпюра контактных давлений (ПЭКД) представляет собой поверхность одинакового ската [9]. В механике сплошных сред такое описание процесса формоизменения материала известно, как «песчаная аналогия» [10]. В таком случае ПЭКД представляет собой поверхность одинакового ската, все образующие которой наклонены к плоскости контакта под одинаковым углом [11].

Проецируя ПЭКД на плоскость контакта инструмента и заготовки, получаем картину течения металла (КТМ), которая состоит из линий раздела течения металла (ЛРТМ) и линий тока (ЛТ). При этом ЛРТМ – проекция гребней ПЭКД, а ЛТ – проекции образующих поверхности ПЭКД. Эти понятия, характеризующие пластическое течение металла по плоскости, имеют физический смысл:

ПЭКД – поверхность, каждая точка которой определяет величину контактного давления инструмента на плоскую заготовку;

КТМ – визуальная характеристика распределения потоков металла по плоскости контакта инструмента и заготовки с указанием направлений движения частиц металла;

ЛРТМ – линия, вдоль которой скорости течения частиц металла принимаются равными нулю;

ЛТ – касательные к траекториям движения частиц металла, характеризующие поле скоростей, указывающие направление движения частиц металла.

Если перевести представленные понятия на язык геометрии, то:

ПЭКД – поверхность одинакового ската (предельная «песчаная насыпь»);

гребни ПЭКД – ребра поверхности одинакового ската (ПОС);

образующие ПЭКД – линии ската;

ЛТ – нормали (перпендикуляры) к контуру;

ЛРТМ – геометрическое место точек, равноудаленных от контура (эквидистанта);

КТМ – схема, содержащая граничную линию (контур), эквидистантную линию, состоящую, как правило, из нескольких участков отрезков прямых и кривых, а также нормали к контуру со стрелками, указывающими направление движения частиц металла (рис. 1);

контур заготовки (линия, ограничивающая область пластического течения на плоскости контакта) – гладкая кривая, которую можно аппроксимировать отрезками прямой и дугами окружности.

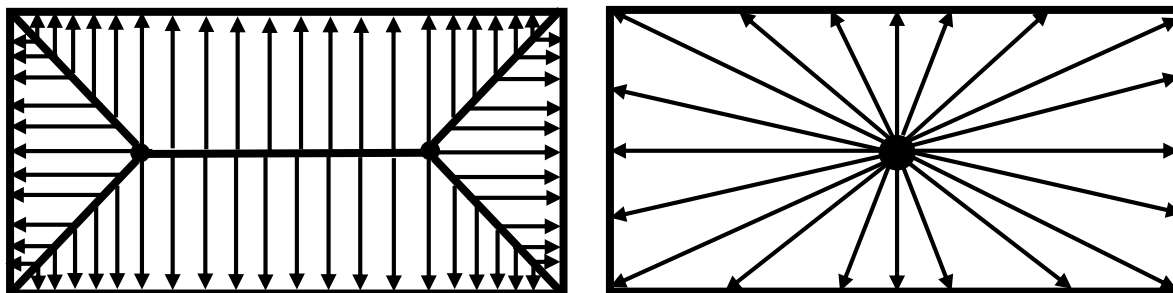


Рис. 1. Картины течения металла: нормальная и радиальная

Тогда задача сводится к чисто геометрической, а именно нахождению эквидистанты некоторой замкнутой плоской гладкой (или кусочно-гладкой) линии (контура).

Несмотря на кажущуюся простоту постановки указанной задачи, попытки ее решения натолкнулись на трудности, связанные с разработкой алгоритма построения ЛРТМ и его программной реализацией [12]. Оказалось, что для сложных многосвязных контуров решение находится достаточно точно и быстро, в то время как для простых вызывает элементарные ошибки.

Рассмотрим постановку задачи в скалярной форме. Пусть контур состоит из двух участков, заданных произвольными гладкими функциями  $y_1(x_1)$  и  $y_2(x_2)$ . Требуется найти геометрическое место точек, равноудаленных от этих кривых (рис. 2). Эти точки лежат на кривой  $y(x)$ .

Положение линии раздела течения металла определяется двумя условиями:

- 1) равноудаленности:  $L_{T1} = L_{T2}$ ;
- 2) нормальности:  $L_{T1} \perp y_1(x_1)$ ,  $L_{T2} \perp y_2(x_2)$ .

Из совместного рассмотрения этих условий, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $x$ ,  $y$ ,  $x_2$ :

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2, \\ \frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x - x_1}{y - y_1}, \\ \frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{x - x_2}{y - y_2}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $(x_1, y_1)$  — координаты точки, заданной на кривой  $y_1(x_1)$ .

В общем виде аналитическое решение этой системы представляет большие трудности, не оправданные их практической полезностью, т.к. любую гладкую кривую можно аппроксимировать дугами кривых второго порядка (окружности, гиперболы, параболы, в вырожденном виде – прямой), что упрощает решение задачи и сводит его к частным случаям.

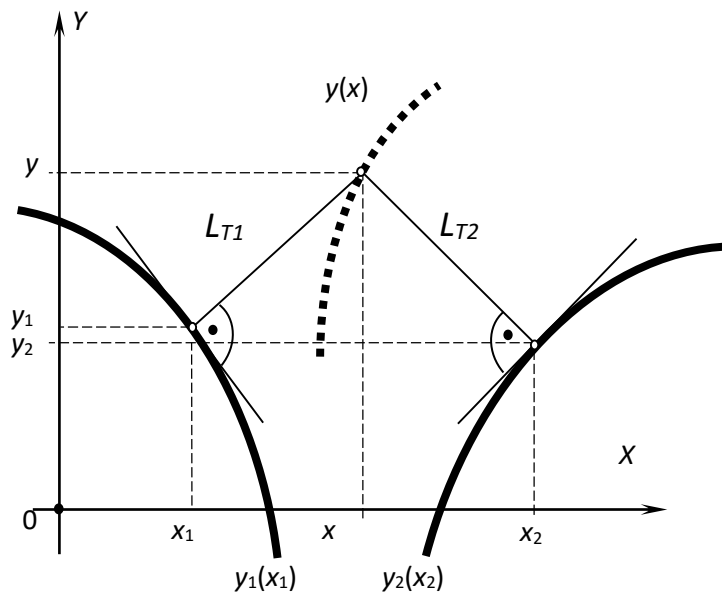


Рис. 2. Линия раздела течения металла между гладкими контурами

Рассмотрим задачу о сжатии прямоугольной пластины с круглыми вырезами (рис. 3).

Исследуем последовательно форму ЛРТМ на трех характерных участках:

- 1 – прямая-прямая;
- 2 – окружность-окружность;
- 3 – прямая-окружность.

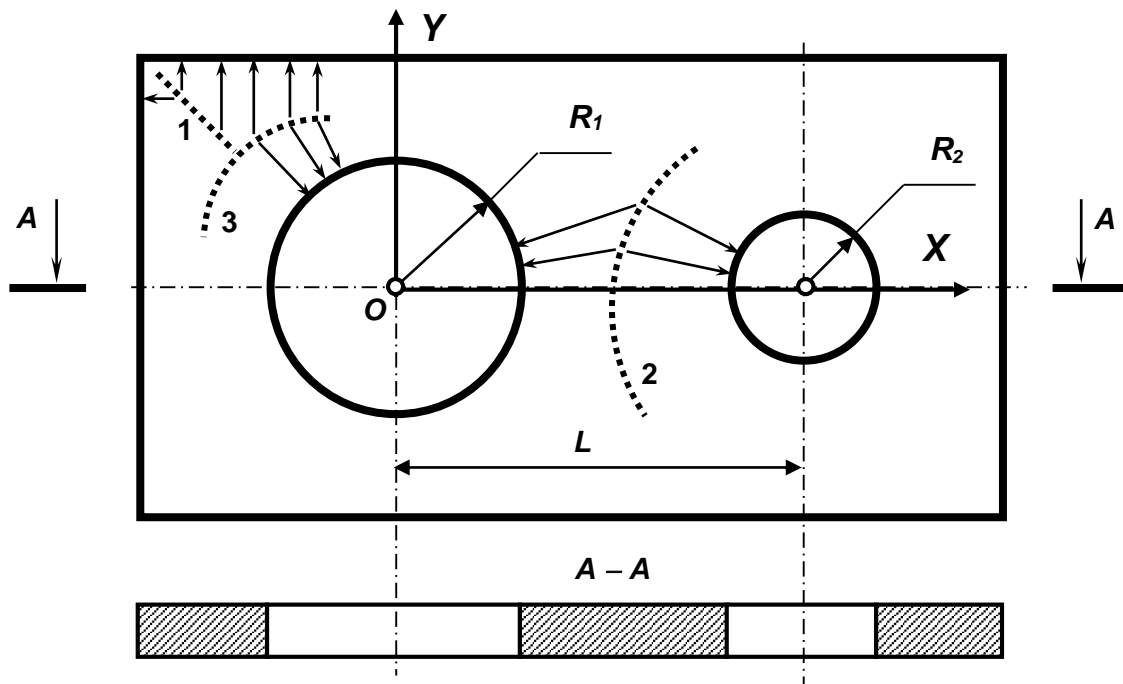


Рис. 3. Линия раздела течения металла на пластине с вырезами

На участке 1, очевидно ЛРТМ представляет собой биссектрису прямого угла.

На участке 2, как показано в [9], ЛРТМ может быть описана уравнением кривой второго порядка в каноническом виде:

$$\frac{(x - L/2)^2}{\left(\frac{R_1 - R_2}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{L^2 - (R_1 - R_2)^2}{4}} = 1. \quad (2)$$

Тип кривой зависит от знака разности:  $D = L^2 - (R_1 - R_2)^2$ .

А. Если  $D > 0$ , соотношение (2) представляет собой уравнение гиперболы. В этом случае  $L > \pm (R_1 - R_2)$ .

Б. Если  $D < 0$ , соотношение (2) описывает уравнение эллипса. Тогда получаем неравенство  $L < \pm (R_1 - R_2)$ .

Этому соответствует практическая задача (не показанная на рисунке) построения ЛРТМ при осадке круглой пластины с круглым вырезом. Очевидно, что в том случае, когда центр окружности, ограничивающей вырез, совпадает с центром пластины, расстояние между ними  $L = 0$ , и тогда эллипс преобразуется в окружность, что следует также из преобразований уравнения (2).

Таким образом, уравнение (2) охватывает все основные варианты взаимного расположения круглых многосвязных контуров поковки, каждый из которых представляет собой либо внешний контур, либо технологический вырез.

Исследования типа кривой на участке 3 показывают, что ЛРТМ представляет собой параболу [9].

Можно сказать, что все частные случаи решения системы (1) этим и исчерпываются, поскольку контур поковки можно аппроксимировать дугами окружности и отрезками прямой. Тогда ЛРТМ при указанных допущениях представляет собой кривую второго порядка.

Экспериментальное подтверждение вышеприведенных принципов и решений находим в работах И.Я. Тарновского [13] и В.В. Свирина [14].

Под руководством профессора И.Я. Тарновского – представителя уральской научной школы – в 50-ые годы прошлого века велись интенсивные исследования закономерностей течения металла при осадке плоских заготовок из стали и алюминиевых сплавов, которые дают схожее (рис. 4, слева) изображение линий раздела течения металла.

Аналогичные картины (рис. 4, справа) получены в наше время В.В. Свириным – представителем школы МИСиС, – который с помощью известного и хорошо себя зарекомендовавшего пакета программ DEFORM проводил виртуальные эксперименты по осадке прямоугольных пластин разной толщины и размеров в плане при изменяющихся значениях коэффициента трения. Преимущество компьютерного эксперимента (кроме экономии средств) заключалось еще и в том, что можно было отследить весь процесс постадийной осадки. При этом скорость получения результата не сопоставима с натурным экспериментом.

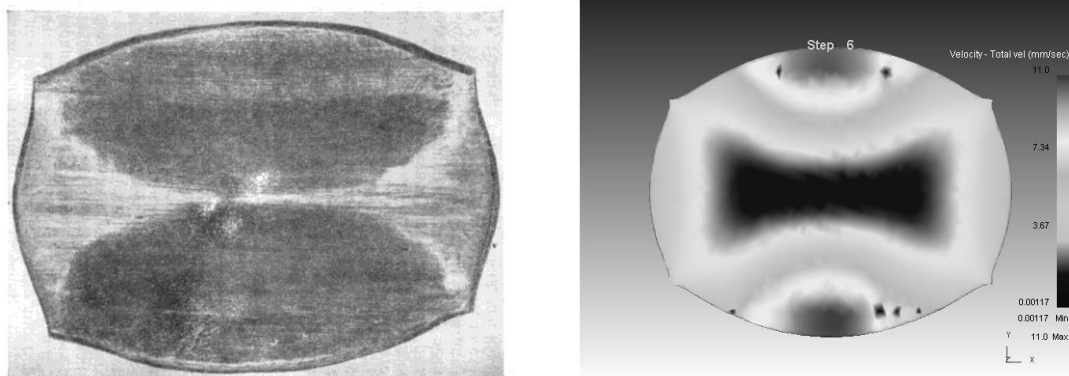


Рис. 4. Результаты экспериментов по осадке плоских заготовок:  
слева – И.Я. Тарновского, справа – В.В. Свирина

Поскольку картины течения металла, полученные указанными авторами и нами, нельзя считать полностью идентичными, можно говорить лишь о косвенном подтверждении предложенного нами подхода.

Разработанный нами специализированный программный комплекс PARSHTAMP, предназначенный для расчета параметров процессов объемной штамповки иковки и моделирования пластического формоизменения плоских заготовок, обладает следующими достоинствами: невысокими требованиями к характеристикам компьютерной техники; значительной скоростью расчетов; быстрым и нетрудоемким заданием и вводом исходной информации; легким обучением пользователей. Обеспечение указанных достоинств ПК достигнуто благодаря упрощению математической модели и приведению исходной системы дифференциальных уравнений к аналитическим зависимостям. Как следствие, значительное облегчение программной реализации расчетного алгоритма. Там, где требуются экспресс-анализ и быстрая (пусть и приближенная) оценка пластического формоизменения заготовки, такая программа может стать незаменимым помощником.

Программный комплекс PARSHTAMP состоит из трех основных программ, реализующих решение статической, кинематической и динамической задач.

Решение статической задачи хорошо согласуется с принципом кратчайшей нормали, в соответствии с которым металл по плоскости контакта течет вдоль линий тока, направленных ортогонально контуру поковки. В этом случае линия раздела течения металла является геометрическим местом точек, равноудаленных от контура детали, или эквидистантой.

Решение кинематической задачи базируется на принципе наименьшего периметра, благодаря которому может быть принята радиальная схема течения металла, характеризующаяся тем, что линии тока направлены ортогонально к некоторой условной кривой, являющейся линией уровня на поверхности контактных давлений. Тогда металл течет вдоль радиусов некоторой окружности, называемой условным контуром.

Динамическая задача, исходя из вышесказанного, сводится к построению поверхности контактных давлений, которая представляет собой сочетание конических и гранных поверхностей. Причем в проекции на плоскость контакта ребра этой поверхности являются линиями раздела течения металла, а линии ската – линиями тока.

На основании полученных соотношений в среде визуального программирования DELPHI разработан программный комплекс, позволяющий осуществлять функции и процедуры, направленные на решение указанных задач.



При создании программного комплекса выбор среды DELPHI не случаен, так как DELPHI позволяет наглядно (графически) отобразить результаты решения прикладных задач, что и требуется в нашем случае.

Одним из базовых блоков в специализированном ПК PARSHTAMP является алгоритм вычисления положения ЛРТМ, в основании которого лежит предложенная нами методика построения эквидистанты некоторой замкнутой линии, состоящей из отрезков прямой и дуг окружности.

Для компьютерной реализации поставленной задачи требуется численное решение.

Пусть контур задан ломаной линией, состоящей из отрезков прямых. Допустимое количество отрезков устанавливается при начальной инициализации программы построения эквидистантных линий EQUILINE.EXE и ограничивается только возможностями компьютера.

Контур должен быть выпуклым, т.е. каждый внутренний угол многоугольника, образованного заданным контуром, должен быть меньше  $180^\circ$ . EQUILINE контролирует выпуклость контура и в случае нарушения этого положения прекращает работу с выдачей соответствующего сообщения.

Координаты точек излома контура должны быть заданы в текстовом файле EQUILINE.TXT. Этот файл может быть создан (или отредактирован) при помощи блокнота NOTEPAD или любой другой программы редактирования и сохранен в формате «текстовый файл».

Каждая строка файла EQUILINE.TXT должна содержать два числа, разделенных как минимум одним пробелом. Первое число – это координата по оси абсцисс, вторая – по оси ординат. Если отсутствует одно число или оба (пустая строка), выдается сообщение об ошибке и выполнение программы останавливается. Если координаты действительные числа, дробная часть от целой должна отделяться десятичной точкой. Допустимо вводить координаты точек в нормализованном виде, например,  $-1e2(-100)$  или  $1.2E-2(0.012)$ . Пример фрагмента файла EQUILINE.TXT:

```
.....  
15 -12  
-8.16 7.3  
1E1 8  
.....
```

Количество строк в файле EQUILINE.TXT определяет количество точек излома контура (и, соответственно, количество отрезков). Если это количество окажется больше допустимого, установленного при инициализации программы, работа программы будет остановлена и выдано соответствующее сообщение об ошибке.

При формировании координат точек излома контура следует учитывать следующее. Система координат – декартова. Начало координат может находиться где угодно. Точки должны располагаться последовательно и так, чтобы получался обход контура против часовой стрелки. Начинать можно с любой точки контура. Программа EQUILINE не контролирует ошибки положений, указанных в данном абзаце, она просто работает неправильно.

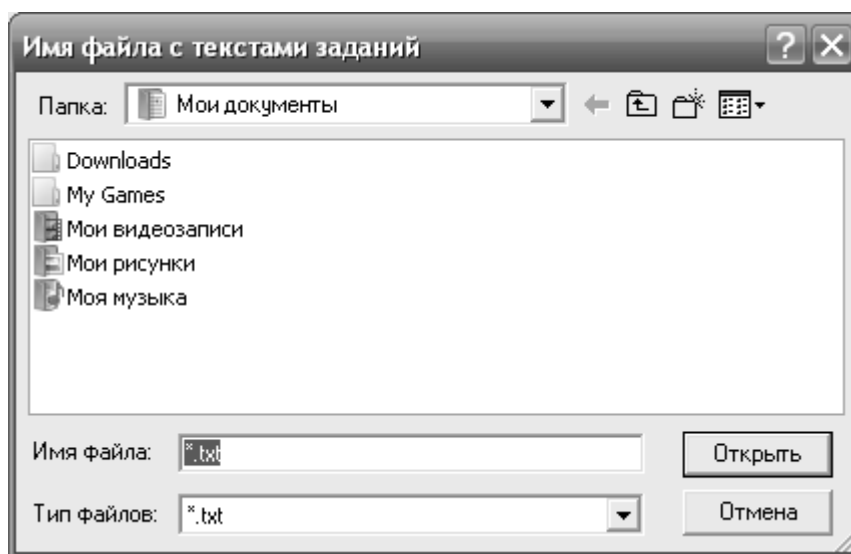


Рис. 5.

При запуске программы EQUILINE появляется стандартное диалоговое окно, в котором пользователь должен указать путь к файлу данных EQUILINE.TXT (пример такого окна показан на рис. 5).

Если исходные данные контура сформированы правильно, начинаем построение эквидистантных линий. Параллельно будем рассматривать пример построения эквидистантных линий для контура, показанного на рис. 6.

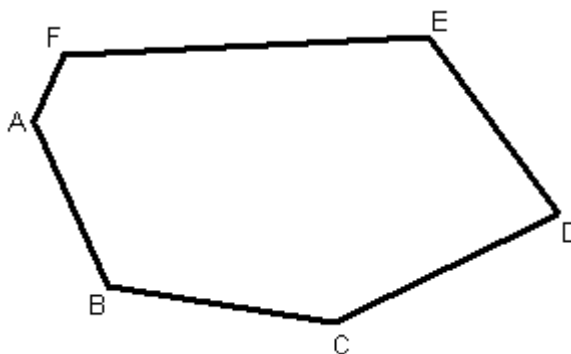


Рис. 6.

Сначала EQUILINE находит самый малый внутренний угол контура (в примере – это угол D). Эквидистантой двух прямых, образующих угол, является биссектриса этого угла. Поэтому самой первой эквидистантной линией контура является биссектриса самого малого угла (D). Далее проводим биссектрисы двух соседних углов (C и E) до пересечения с биссектрисой самого малого угла (в примере – это точки G и H на рис. 7). Заканчиваются первые эквидистантные линии в ближайшей точке пересечения с биссектрисами соседних углов (в точке G). Первые линии DG и EG получены.

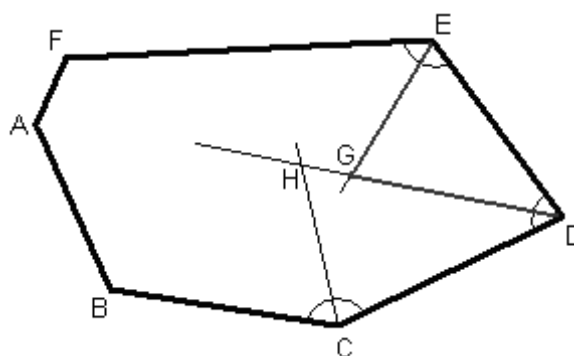


Рис. 7.

Далее убираем из рассмотрения сторону контура, биссектрисы прилежащих углов к которой образовали эквидистантные линии (DE на рис. 7). Продолжаем до пересечения стороны контура, соседние с отброшенной линией (FE и CD на рис. 7). Получаем точку I (рис. 8).

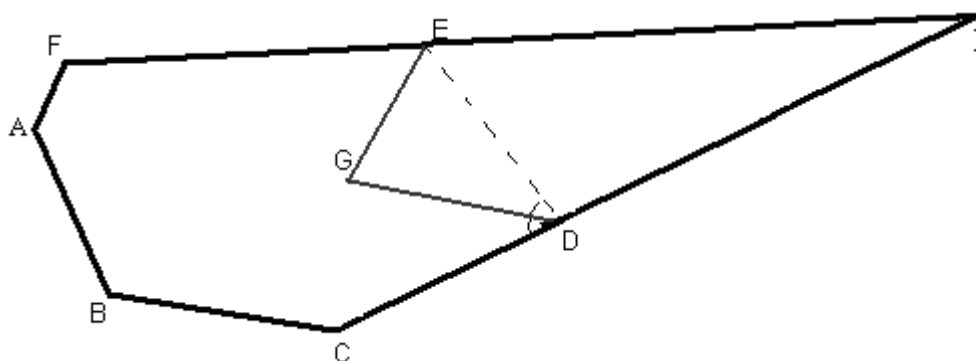


Рис. 8.

Размерность контура уменьшилась на единицу (вместо шестиугольника ABCDEF теперь будет рассматриваться пятиугольник ABCIF). Очевидно, что теперь наименьшим углом в многоугольнике контура будет вновь полученный угол (в примере – I, так как  $\angle D = \angle I + \angle DEI \Rightarrow \angle I < \angle D$ ). Процедура повторяется, только новая эквидистантная линия строится не от угла контура, а от точки окончания последней эквидистантной линии (в примере – G). Получим новые эквидистантные линии (GJ и CJ на рис. 9).

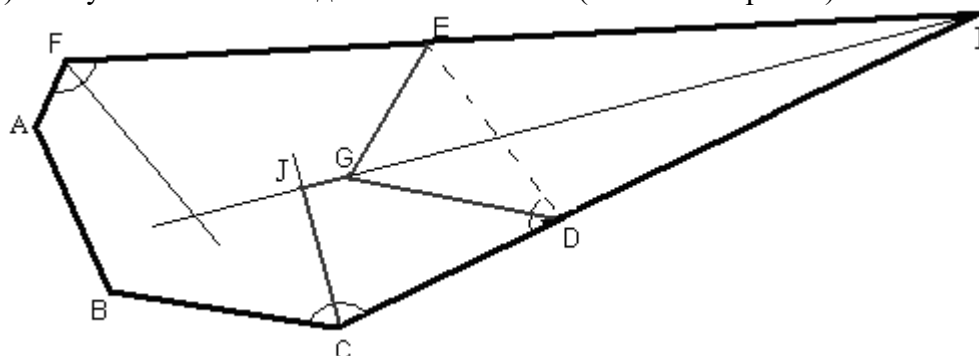


Рис. 9.

Теперь следует выбросить очередную сторону (в примере – CI) и повторять последовательность указанных действий, пока не возникнет ситуация, как в рассматриваемом примере, когда соседние с отбрасываемой стороны образуют угол совсем в другой стороне (в примере стороны BC и FI, соседние с отбрасываемой стороной CI, образуют угол не справа, а

слева). В случае параллельности прямых построение ветви эквидистантных линий также прекращается. Заметим, что, в силу особенностей численного моделирования, параллельными будем считать любые прямые, образующие угол меньше наперед заданного малого числа, устанавливаемого при инициализации программы.

Далее вновь ищем наименьший угол контура среди оставшихся (в примере это угол F из имеющихся F, A и B) и повторяем вышеописанный алгоритм действий, пока многоугольник контура не будет сведен фактически к треугольнику (в примере это треугольник KIC на рис. 10; точка K на рисунке не поместилась).

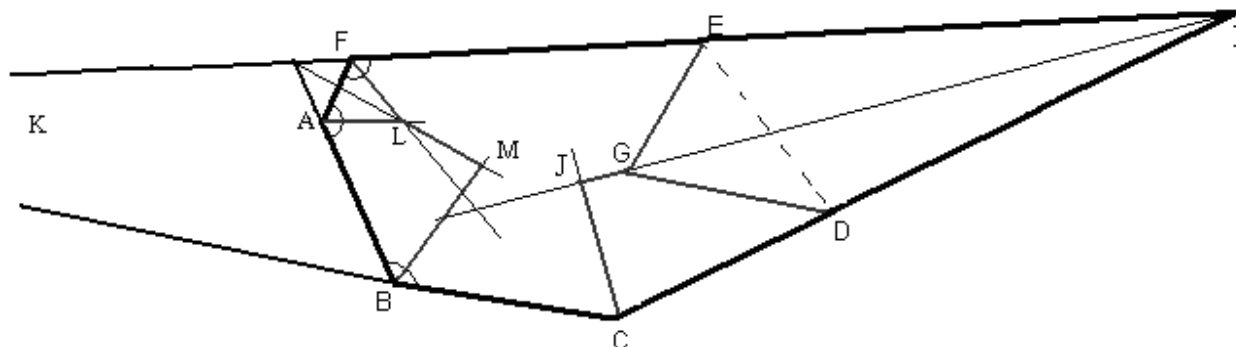


Рис. 10.

Как известно из геометрии, в треугольнике биссектрисы всегда пересекаются в одной точке (для треугольника KIC это точка J), поэтому для завершения построения эквидистантных линий достаточно соединить точки, в которых происходила остановка последовательных действий (в примере это точки M и J). Построение завершено (результат примера показан на рис. 11).

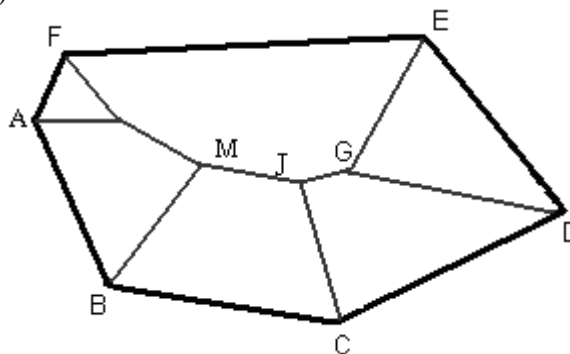


Рис. 11.

Результаты работы программы EQUILINE будут представлены на экране (картинка аналогичная показанной на рис. 11) и сохранены в файле RESULTATLINE.TXT, который будет находиться в той же папке, что и файл EQUILINE.TXT. Каждая строка файла RESULTATLINE.TXT определяет одну эквидистантную линию, задаваемую крайними точками. Поэтому каждая строка файла RESULTATLINE.TXT содержит четыре числа: координата X 1-й точки; координата Y 1-й точки; координата X 2-й точки; координата Y 2-й точки. Применительно к рассмотренному примеру первая строка файла результатов будет содержать: координата X точки D; координата Y точки D; координата X точки G; координата Y точки G. Вторая строка – координаты точек E и G и т.д.

Пусть контур состоит из фрагментов прямых и дуг окружностей. При необходимости возможна реализация фрагментов контура в виде любых кривых. Допустимое количество фрагментов задается при инициализации программы EQUICOURVE.EXE (в настоящее время 100). Следует учитывать, что в пределах одного фрагмента контура зависимость между

координатами Y и X должна быть однозначна. Например, недопустимо указывать в качестве фрагмента дугу окружности более  $180^\circ$ . В этом случае дугу следует разбить минимум на два фрагмента.

Любой контур должен состоять как минимум из двух фрагментов.

Исходные данные для работы программы EQUICOURVE должны содержаться в текстовом файле EQUICOURVE.TXT. Все величины должны быть выражены в одних и тех же единицах. Данные в этом файле можно сопровождать комментариями, взятыми в фигурные скобки. Комментарии на работу программы не влияют, они используются для удобства пользователя.

В первой строке файла EQUICOURVE.TXT задается точность расчетов, т.е. программа считает два вещественных числа равными, если их разница по модулю меньше заданного положительного числа. Также EQUICOURVE считает число, обратное заданной точности, бесконечно большой величиной. Точность может быть задана в нормализованном виде. Чем меньше заданное число, тем выше точность расчетов и больше время работы программы.

Во второй строке файла EQUICOURVE.TXT должен быть задан шаг разбивки контура, т.е. весь контур будет разбит на точки так, что расстояние между любыми соседними точками будет не больше заданной величины. Чем меньше заданное число, тем выше точность расчетов и больше время работы программы. Кроме того, следует учитывать, что количество точек, на которое может быть разбит контур, ограничено. Допустимое количество точек задается при начальной инициализации программы (в настоящее время 1.000.000).

Каждая следующая строка (или пара строк) содержит информацию об одном фрагменте контура.

Первые два поля строки (поле – это набор информационных символов, отделенных пробелами или табуляцией) должны содержать координаты начала фрагмента. Следующее поле определяет тип линии фрагмента и должно содержать служебные слова «прямая» или «окружность». На этом строка должна закончиться. Если фрагмент является дугой окружности, то следующая строка должна иметь четыре поля: в первых двух должны быть заданы координаты центра этой окружности, в третьем – радиус окружности, а в четвертом – «1» или «-1». Последний параметр необходим только в том случае, если фрагмент представляет собой полуокружность: «1» означает, что полуокружность располагается выпуклостью вниз, «-1» – выпуклостью вверх. В случае если дуга окружности меньше  $180^\circ$ , этот параметр программой игнорируется, а соответствующее поле может отсутствовать.

Конечной точкой текущего фрагмента является начальная точка следующего фрагмента. Конечной точкой последнего фрагмента является начальная точка самого первого фрагмента. Начинать можно с любого фрагмента, но необходимо делать это последовательно, обходя контур против часовой стрелки. Количество строк с информацией о фрагментах контура определяет фактическое количество фрагментов контура, которое должно быть меньше допустимого.

Пример файла EQUICOURVE.TXT:

```
1e-6 { точность расчетов }
0.005 { шаг разбивки контура }
0 0 прямая { координаты начала 1-го участка }
4 0 окружность { 2-й участок }
6 0 2 1
8 0 окружность
4 0 4 -1
```

В рассматриваемом примере расчеты выполняются с точностью в одну миллионную, каждая единица длины контура разбивается не менее, чем на 200 точек, контур состоит из 3-х фрагментов: прямая от точки (0; 0) до точки (4; 0), полуокружность от точки (4; 0) до точки (8; 0) выпуклостью вниз и полуокружность от точки (8; 0) до точки (0; 0) выпуклостью вверх.

Пользователь сам должен побеспокоиться о корректности исходных данных: обход контура против часовой стрелки, в узловых точках контура может пересекаться только два фрагмента, фрагменты контура пересекаются только в узловых точках, дуги окружностей не должны превосходить  $180^\circ$ . В случае несоблюдения этих требований программа будет работать некорректно.

При запуске программы EQUICOURVE.EXE появляется окно, показанное на рис. 12.



Рис. 12.

Если пользователь не желает, чтобы на рисунке с построенными эквидистантными линиями присутствовали номера узловых точек контура, соответствующий флажок на панели нужно убрать. Далее следует кликнуть по кнопке «Начать», после чего появится стандартное диалоговое окно (как на рис. 5), в котором пользователь должен указать путь к файлу данных EQUICOURVE.TXT. После выбора файла и нажатия кнопки «Открыть» программа выполнит свою работу. Так для примера, рассмотренного выше, результат будет выглядеть так, как показано на рис. 13.

Размеры окна, в котором осуществляется построение, фиксированы, а показываемый контур всегда масштабируется так, чтобы занимать максимально полно все пространство окна.

Из-за того, что расчеты выполняются приблизительно с заданной точностью, в предельных случаях возможно появление точек на рисунке, явно отклоняющихся от эквидистантной линии (например, на рис. 13 у правого конца эквидистантной линии виден короткий шлейф). Повышение точности и уменьшение шага разбивки улучшает общую картину, но не решает эту проблему. Такие точки следует игнорировать или удалять вручную.

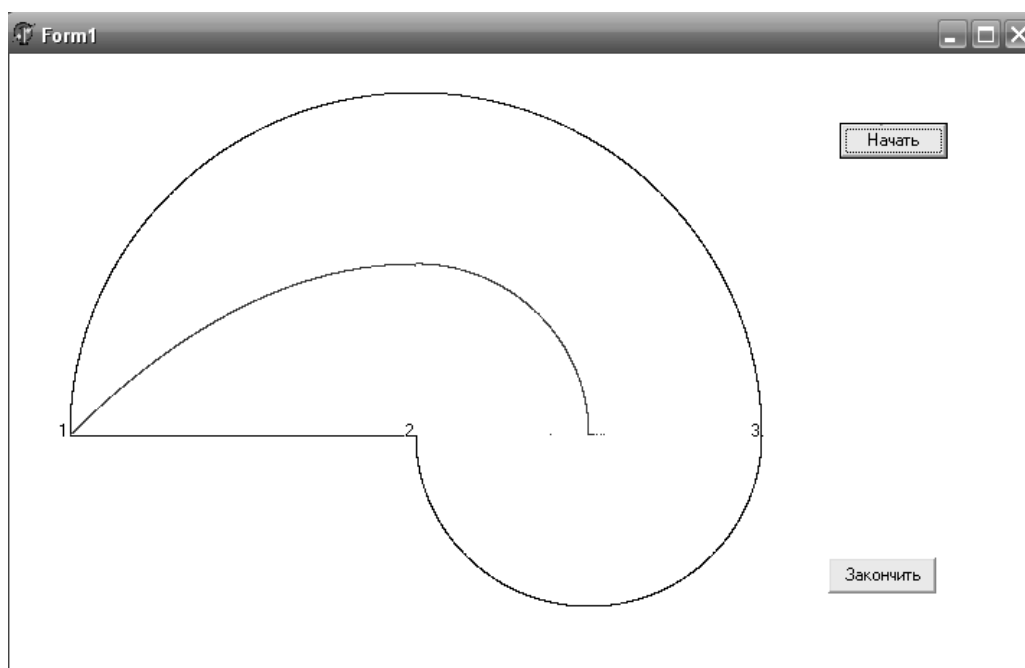


Рис. 13.

Одновременно с построением на экране программа создает в той же папке, где находится файл EQUICOURVE.TXT, файл выходных данных RESULTATCOURVE.TXT, содержащий координаты найденных точек эквидистантных линий, а также координаты ближайших к ним точек контура, что позволяет строить линии тока. Начальный фрагмент такого файла показан на рис. 14.

1	Координаты эквиточек		Координаты точек тока			
	X	Y	X1	Y1	X2	Y2
3	0.0050	0.0052	0.0050	0.0000	0.0000	0.0040
4	0.0100	0.0101	0.0100	0.0000	0.0000	0.0084
5	0.0150	0.0151	0.0150	0.0000	0.0000	0.0139

Рис. 14.

Нажав на кнопку «Начать», можно инициировать построение для другого контура.

Завершается работа программы нажатием на кнопку «Закончить».

Алгоритм действия программы EQUICOURVE основан на следующем.

После чтения исходных данных программа проверяет необходимость коррекции введенных данных. Если в какой-либо точке контура производная стремится к бесконечности, то происходит переполнение ячейки и процессор аварийно прекращает выполнение программы. Чтобы избежать этого, программа предварительно корректирует исходные данные: если фрагмент контура – вертикальная прямая, то начальная точка этого фрагмента смещается по линии предыдущего фрагмента, руководствуясь следующим.

Если предыдущий фрагмент тоже прямая линия, то новые координаты узловой точки  $(x; y)$  будут определены так:

$$x = x_0 - \text{sign}(x_0 - x_p) \cdot \delta$$

$$y = \gamma(x_0 - x_p) + y_p$$

где  $\gamma = \frac{y_0 - y_p}{x_0 - x_p}$  – тангенс угла наклона предыдущего фрагмента;

$x_0, y_0$  – заданные координаты начала модифицируемого фрагмента;

$x_p, y_p$  – координаты начала предыдущего фрагмента;

$\delta$  – заданная точность вычислений;

$sign(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$  – единичная функция.

Если предыдущий фрагмент – окружность, то координаты  $(x; y)$  точки этой окружности, отстоящей на расстояние  $\delta$  от другой точки этой же окружности с координатами  $(x_0; y_0)$ , можно определить так. Имеем два уравнения:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R_c^2 \quad (3)$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2$$

где  $x_c, y_c$  – координаты центра окружности;

$R_c$  – радиус окружности.

Раскрыв скобки и вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$-2x_c x + x_c^2 - 2y_c y + y_c^2 + 2x_0 x - x_0^2 + 2y_0 y - y_0^2 = R_c^2 - \delta^2.$$

Перегруппировав, можем выразить (при условии, что  $y_0 \neq y_c$ )

$$y = \frac{-2(x_0 - x_c)x + R_c^2 - \delta^2 + x_0^2 + y_0^2 - x_c^2 - y_c^2}{2(y_0 - y_c)} = kx + \lambda, \quad (4)$$

где  $k = -\frac{x_0 - x_c}{y_0 - y_c},$

$$\lambda = \frac{R_c^2 - \delta^2 + x_0^2 + y_0^2 - x_c^2 - y_c^2}{2(y_0 - y_c)}.$$

Подставляя (4) в первое выражение (3), получим квадратное уравнение

$$(x - x_c)^2 + (kx + \lambda - y_c)^2 = R_c^2,$$

$$x^2 - 2x_c x + x_c^2 + k^2 x^2 + 2k(\lambda - y_c)x + (\lambda - y_c)^2 = R_c^2,$$

$$(1 + k^2)x^2 - 2(x_c - k(\lambda - y_c))x + x_c^2 + (\lambda - y_c)^2 - R_c^2 = 0. \quad (5)$$

Отметим, что при выполнении условия  $\delta < 2R$  решение уравнения (5) всегда существует, причем корней – два. Дискриминант квадратного уравнения (5)

$$\begin{aligned} D &= (x_c - k(\lambda - y_c))^2 - (1 + k^2)(x_c^2 + (\lambda - y_c)^2 - R_c^2) = \\ &= x_c^2 - 2kx_c(\lambda - y_c) + k^2(\lambda - y_c)^2 - x_c^2 - (\lambda - y_c)^2 + R_c^2 - k^2x_c^2 - \\ &- k^2(\lambda - y_c)^2 + k^2R_c^2 = -(\lambda - y_c)^2 - 2kx_c(\lambda - y_c) - k^2x_c^2 + (1 + k^2)R_c^2 = \\ &= (1 + k^2)R_c^2 - (kx_c + \lambda - y_c)^2 \end{aligned}$$

Корни уравнения (5)

$$x_{1,2} = x_c - k(\lambda - y_c) \pm \sqrt{D}. \quad (6)$$

Если  $x_0 > x_c$ , то используется корень  $x_2 = x_c - k(\lambda - y_c) - \sqrt{D}$ , а если  $x_0 < x_c$ , то корень  $x_1 = x_c - k(\lambda - y_c) + \sqrt{D}$ .



Если фрагмент контура – полуокружность на участке от  $x_i$  до  $x_{\hat{e}}$ , в крайних точках производная стремится к бесконечности. Поэтому заменяем данную окружность другой, у которой радиус будет больше на величину  $\delta$ . Соответственно координата центра окружности будет смещена по оси ординат на величину

$$\Delta y = \mp \sqrt{\left(\frac{x_{\hat{e}} - x_i}{2} + \delta\right)^2 - \left(\frac{x_{\hat{e}} - x_i}{2}\right)^2} = \mp \sqrt{\delta(x_{\hat{e}} - x_i + \delta)}. \quad (7)$$

В выражении (7) знак выбирается противоположно тому, который был задан в файле EQUICOURVE.TXT (параметр, определяющий положение полуокружности выпуклостью вверх или вниз).

Далее EQUICOURVE приступает к разбивке контура с соблюдением заданного максимального шага. Простой итерационный процесс: начиная с начальной точки контура, делается шаг по оси абсцисс, равный величине максимального шага, определяется значение по оси ординат, вычисляется расстояние от полученной точки до предыдущей. Если это расстояние больше величины максимального шага, процедура повторяется, только с шагом, уменьшенным вдвое. Координаты полученной точки сохраняются вместе со значениями производной в этой точке контура. Производная вычисляется соответственно

$$\text{для прямой} \quad y' = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \text{для окружности} \quad y' = -\frac{x - x_c}{y - y_c},$$

где  $x, y$  – координаты текущей точки контура;

$x_{i-1}, y_{i-1}$  – координаты начальной точки текущего фрагмента контура;

$x_i, y_i$  – координаты конечной точки текущего фрагмента контура;

$x_c, y_c$  – координаты центра кривизны текущего фрагмента контура.

При разбивке контура учитываются особенности его формы. В узловых точках контура проверяется условие его выпуклости

$$(y_{i+1} - y_{i-1}) \cos \beta - (x_{i+1} - x_{i-1}) \sin \beta > 0,$$

где  $x_{i-1}, y_{i-1}$  – координаты любой точки, находящейся на луче, выходящем из рассматриваемого узла контура и имеющем направление, совпадающее с касательной к фрагменту, заканчивающемуся в этом узле;

$x_{i+1}, y_{i+1}$  – координаты любой точки, находящейся на луче, выходящем из рассматриваемого узла контура и имеющем направление, совпадающее с касательной к фрагменту, начинающемуся в этом узле;

$$\beta = \arctg \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \text{угол положения рассматриваемой вершины контура относительно}$$

$i-1$ -й точки ( $\beta \in [0; 2\pi)$ );

$x_i, y_i$  – координаты рассматриваемой вершины контура.

Если внутренний угол контура более  $180^\circ$  (контур не выпуклый), то возникает ситуация, когда линии тока с определенной части внутренней поверхности рассматриваемой заготовки будут сходиться именно в вершине этого угла. Поэтому при разбивке контура программа считает, что в таких узловых точках сосредоточено множество бесконечно малых отрезков прямых, последовательно осуществляющих поворот от направления угла наклона предыдущего фрагмента к последующему на величину избыточного угла (избыточный угол – это величина внутреннего угла контура минус  $180^\circ$ ). Другими словами, программа генерирует последовательность точек (псевдоточек), имеющих одни и те же координаты, но имеющих

производные, отличающиеся на определенную величину. Величина шага угла наклона определяется соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{2h}{x_i - x_{i-1}},$$

где  $h$  – величина заданного максимального шага разбивки.

Далее начинается главное – поиск эквидистантных точек. Схематично последовательность действий такова. Последовательно в каждой  $i$ -й точке контура восстанавливается перпендикуляр к касательной, а затем по очереди перпендикуляры к касательным во всех остальных  $j$ -х точках контура до пересечения с первым перпендикуляром. Первым делом проверяется – находится ли полученная точка пересечения внутри контура. Если нет – переходим к следующей  $j+1$ -й точке. Если да, то сравниваем расстояния от точки пересечения перпендикуляров до  $i$ -й и  $j$ -й точек. Если эти расстояния оказываются близки друг к другу, то координаты такой точки запоминаются. Когда все  $j$ -е точки будут пройдены, то из всех запомненных точек выбирается одна, у которой расстояние до  $i$ -й точки минимально. Это и есть эквидистантная точка. Далее можно переходить к следующей  $i+1$ -й точке.

Теперь уточним детали поиска эквиточек. При нахождении точки пересечения двух перпендикуляров к касательным руководствуемся следующим. Знаем, что через точку с координатами  $(x_1; y_1)$  проходит прямая с тангенсом угла наклона  $k_1$ , а через точку  $(x_2; y_2)$  – прямая с тангенсом угла наклона  $k_2$  ( $|k_1| < \Omega$  и  $|k_2| < \Omega$ , где  $\Omega$  – бесконечно большое число, определяемое точностью расчетов). Координаты точки пересечения перпендикуляров к этим прямым определяются из решения системы

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{k_1}(x - x_1) + y_1 \\ -\frac{1}{k_1}(x - x_1) + y_1 = -\frac{1}{k_2}(x - x_2) + y_2 \end{cases}$$

Если обе прямые горизонтальны ( $k_1 = k_2 = 0$ ), то координаты точки пересечения

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \Omega.$$

$$\text{Если } k_1 = 0, \text{ а } k_2 \neq 0, \text{ то} \quad x = x_1, \quad y = -\frac{1}{k_2}(x - x_2) + y_2.$$

$$\text{Если } k_1 \neq 0, \text{ а } k_2 = 0, \text{ то} \quad x = x_2, \quad y = -\frac{1}{k_1}(x - x_1) + y_1.$$

$$\text{Если } k_1 = k_2 \neq 0, \text{ то} \quad x = \text{sign}(k_1) \cdot \Omega, \quad y = \Omega.$$

$$\text{Если } k_1 \neq 0, k_2 \neq 0 \text{ и } k_1 \neq k_2, \text{ то} \quad x = \frac{k_1 x_2 - k_2 x_1 + k_1 k_2 (y_2 - y_1)}{k_1 - k_2}, \quad y = -\frac{1}{k_1}(x - x_1) + y_1.$$

Проверка нахождения точки внутри контура основана на следующем принципе. Подсчитываем количество точек контура, имеющих такую же абсциссу и расположенных выше рассматриваемой точки. Если это количество нечетно – точка внутри контура, если четно – вне его.

Определение координат точки, равноотстоящей от точек с номерами  $i$  и  $j$  соответственно, организовано следующим образом. Как только соответствующая точка пересечения перпендикуляров к касательным для  $i$ -й и  $j$ -й пары точек контура оказывается

внутри контура, определяется знак величины  $d_i - d_j$  ( $d_i$  – расстояние от найденной точки пересечения перпендикуляров до  $i$ -й точки контура;  $d_j$  – расстояние до  $j$ -й точки). Затем процедура повторяется для пары  $i$ -й и  $j+1$ -й точек. Если точка пересечения оказалась вне контура, то процесс прекращается, т.е. кандидата на эквидистантную точку пока нет. Если точка осталась внутри контура, сравниваем знак выражения  $d_i - d_{j+1}$  со знаком  $d_i - d_j$ . Если знак не изменился, берем следующую  $j+2$ -ю точку и т.д. до тех пор, пока не найдем такую  $j+k$ -ю точку, чтобы знаки выражений  $d_i - d_{j+k}$  и  $d_i - d_{j+k+1}$  были различны. Линейной аппроксимацией находим координату по оси абсцисс промежуточной точки

$x = x_{j+k} + \mu(x_{j+k+1} - x_{j+k})$ , где  $x_{j+k}, x_{j+k+1}$  – координаты  $j+k$ -й и  $j+k+1$ -й точек;

$$\mu = \left| \frac{d_i - d_{j+k}}{d_{j+k+1} - d_{j+k}} \right| - \text{коэффициент.}$$

Далее определяется координата по оси ординат промежуточной точки, строится перпендикуляр к касательной в этой точке и точка пересечения этого перпендикуляра с перпендикуляром к касательной в  $i$ -й точке регистрируется в качестве кандидата на эквидистантную точку.

Если  $i$ -я или  $j+k$ -я точки окажутся псевдоточками, то тогда аппроксимируется не координата по оси абсцисс, а производная в этой точке. Например, для  $j+k$ -й псевдоточки

$$y' = y'_{j+k} + \mu(y'_{j+k+1} - y'_{j+k}),$$

где  $y'_{j+k}, y'_{j+k+1}$  – производные в  $j+k$ -й и  $j+k+1$ -й точках контура.

И в качестве искомой точки берется точка пересечения перпендикуляра к касательной в  $i$ -й точке и прямой, проведенной через  $j+k$ -ю псевдоточку с тангенсом угла наклона  $y'$ .

В частном случае, когда  $i$ -я точка является псевдоточкой, а  $j$ -я точка находится на дуге окружности, координаты центра которой совпадают (точнее, находятся вблизи) с координатами  $i$ -й псевдоточки (или наоборот), возникает коллизия, когда вышеописанный алгоритм практически не работает, потому что приходится искать точку пересечения почти параллельных прямых. Но выход очевиден: точка, претендующая на звание эквиточки, находится на середине отрезка, соединяющего  $i$ -ю и  $j$ -ю точки.

Выводы:

1. Проблемы создания математической модели для расчета формообразования поковок из плоских заготовок устранимы благодаря учету основных принципов теории течения металла по жестким поверхностям и созданию алгоритма построения ЛРТМ.

2. Возможность аппроксимации контура поковки отрезками прямой и дугами окружности позволяет исчерпать все многообразие эквидистантных линий кривыми второго порядка.

3. Экспериментальные данные косвенно подтверждают правильный выбор расчетных схем для отображения картины течения металла.

4. Предложенный алгоритм построения эквидистантных линий позволяет автоматизировать методику решения поставленной задачи.

### Список литературы

1. Тишук Л.И., Соломонов К.Н. *Анализ рынка программных продуктов, предназначенных для моделирования технологических процессов* // Вестник Карагандинского государственного индустриального университета, 2013, № 2, с. 50-55.

2. Лисуец Н.Л., Соломонов К.Н., Цепин М.А. *Объемная штамповка алюминиевых заготовок*. – М.: Машиностроение, 2009.

3. Сторожев М.В., Попов Е.А. *Теория обработки металлов давлением*. – М.: Машиностроение, 1971.
4. Губкин С.И. *Теория обработки металлов давлением*. – М.: Metallurgizdat, 1947.
5. Головин А.Ф. *Прокатка*. – М.: Metallurgizdat, 1933.
6. Зибель Э. *Обработка металлов в пластическом состоянии*. – М.: ОНТИ, 1934.
7. Sobbe C. *Beiträge zur Technologie des Schmiedepressens* // *Werkstattstechnik*, 1908, No 9, s. 457-471.
8. Березкин В.Г. *Кузнечная вытяжка под плоскими бойками* // Сборник «Машины и технологии обработки металлов давлением». – М.: Машгиз, 1955.
9. Соломонов К. *Моделирование формообразования поковок: исследования, гипотезы, разработки*. – Saarbrücken (Germany): LAMBERT Academic Publishing, 2011.
10. Надаи А. *Пластичность и разрушение твердых тел*. – М.: Иностран. лит., 1954.
11. Ильюшин А.А. *Пластичность*. – М.: Гостехиздат, 1948.
12. Корзо В.Н., Чумаченко Е.Н., Соломонов К.Н. *Расчет технологических параметров объемной штамповки протяженных в плане поковок* // Труды седьмой Международной научно-технической конференции «АКТ-2006». — Воронеж: ВГТУ, 2006, с. 53-59.
13. Тарновский И.Я., Поздеев А.А., Ганаго О.А. *Деформации и усилия при обработке металлов давлением*. – М.: Машгиз, 1959.
14. Соломонов К.Н., Свиринов В.В. *Анализ кинематических схем течения металла с помощью виртуального эксперимента* // *Технология легких сплавов*, 2010, № 3, с. 58-64.

Дата поступления статьи: 3 марта 2016 года.