УДК 534.11

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАНАТА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ С ГРУЗОМ НА КОНЦЕ

© Владислав Львович Литвинов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Самарский государственный технический университет"

СамГТУ, Самара, Россия

vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. *С помощью приближенного метода Канторовича - Галеркина находится решение задачи о продольных колебаниях каната переменной длины с грузом на конце для наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на подвижных границах. Решение получено с точностью до величин второго порядка малости относительно малого параметра, характеризующего медленный характер движения границы. Получены выражения для амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде, а также для амплитуд колебаний при установившемся резонансе и прохождении через резонанс.*

Ключевые слова: *колебания механических систем, движущиеся границы, амплитуда колебаний, установившийся резонанс, прохождение через резонанс.*

LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF THE ROPE OF VARIABLE LENGTH WITH A LOAD AT THE END

© Vladislav L. Litvinov

Samara State Technical University, Samara, Russia

vladlitvinov@rambler.ru

Abstract. *Using the approximate method of Kantorovich - Galerkin is solution of the longitudinal vibrations of the rope of variable length with a load at the end for the most common case in practice when external disturbances act on the moving boundary. The solution is obtained up to the second order in the small parameter characterizing the slow of the movement of the border. Found the expressions for the amplitudes of the oscillations corresponding to the n-th dynamic mode, as well as the oscillation amplitudes at steady resonance and the passage through resonance.*

Key words: *oscillations of mechanical systems, moving borders, the amplitude of oscillation, set the resonance, steady resonance, passage through resonance.*

Механизмы горной промышленности работают в условиях быстрого износа, поэтому издержки только на капитальный ремонт основного горного оборудования достигают ежегодно до 50% его первоначальной стоимости. К вопросам разработки научных основ прочности горных машин и механизмов относятся, главным образом, исследования динамики шахтных подъемных канатов – наиболее ответственного и важного элемента подъемной установки. С переходом к разработкам полезных ископаемых на более низких горизонтах, т.е. с увеличением глубин подъемов до 1200-1500 м., с увеличением скорости подъемов до 18-20 м/с и увеличением веса концевых грузов до 20-60 т. на первый план выступают динамические явления как в самом канате, так и во всей подъемной установке [1-4].

Исследуем возможность возникновения продольных колебаний большой амплитуды в канате грузоподъемного механизма, один конец которого наматывается на барабан, а на втором жёстко закреплён груз.

Задачу по описанию продольных колебаний каната можно поставить следующим образом. Найти решение волнового уравнения:

$$Z_{tt}(x,t)-a^2 Z_{xx}(x,t)=0\,, \tag{1}$$

при граничных условиях:

$$Z_{xx}(0,t)-\frac{ES}{ma^2}Z_x(0,t)=-\frac{g}{a^2}; \tag{2}$$

$$Z_t(l_0(v_0t),t)=F_0'(\omega_0 t). \tag{3}$$

Проинтегрировав условие (3) по времени, получим:

$$Z(l_0(v_0t),t)-v_0\int_0^t Z_x(l_0(v_0\zeta),\zeta)l_0'(v_0\zeta)d\zeta=F_0(\omega_0 t). \tag{4}$$

В задаче (1) - (4) обозначено: $Z(x,t)$ – продольное смещение точки с координатой x в момент времени *t*; $a=\sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в канате, *E* – модуль упругости материала каната, ρ – линейная плотность массы; $S-$ площадь поперечного сечения каната; $m-$ масса груза; $g-$ ускорение свободного падения; ω_0 – постоянная величина (в случае действия гармонического возмущения ω_0 является частотой этого возмущения); $l_0(v_0t)=L_0-v_0t$ – закон движения границы; $F_0(\omega_0t)-$ функция, характеризующая внешнее возмущение.

Исходя из физических основ модели, в дальнейшем вместо функции $Z(x,t)$ будем использовать функцию $u(x,t)$, причем

$$Z(x,t)=u(x,t)+v_0t+\frac{mg}{ES}x.$$

В результате задача (1) – (4) примет вид

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=0; \tag{5}$$

$$u_{xx}(0,t)-\frac{ES}{m\,a^2}u_x(0,t)=0; \tag{6}$$

$$u(l_0(v_0t),t)-v_0\int_0^t u_x(l_0(v_0\zeta),\zeta)l_0'(v_0\zeta)d\zeta=F_0(\omega_0 t). \tag{7}$$

Введем в задачу (5) - (7) безразмерные переменные:

$$\xi=\frac{\omega_0}{a}x;\ \ \tau=\omega_0t+\frac{\omega_0L-a}{-v_0};\ \ u(x,t)=U(\xi,\tau).$$

После преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)-U_{\xi\xi}(\xi,\tau)=0;$$

$$U_{\xi\xi}(0,\tau)-kU_{\xi}(0,\tau)=0;$$

$$U(l(\varepsilon_0\tau),\tau)-\varepsilon_0\int\limits_{\gamma_0}^{\tau}U_{\xi}(l(\varepsilon_0\zeta),\zeta)l'(\varepsilon_0\zeta)d\zeta=F(\tau),$$

где

$$k=\frac{ES}{ma\omega_0};\ \varepsilon_0=-v_0/a;\ l(\varepsilon_0\tau)=1+\varepsilon_0\tau;$$

$$F(\tau)=F_0(\tau-\gamma_0);\ \gamma_0=(a-\omega_0L_0)/v_0.$$

В большинстве технических приложений, имеющих дело с упругими объектами переменной длины, как правило, отношение скорости изменения длины к скорости упругой волны в нем мало. Например, в шахтных подъемниках скорость подъема лежит в пределах 10-20 м/с, а скорость упругой волны в стальном канате составляет около 4200 м/с. Даже в задачах о вытягивании стального каната баллистическим телом это отношение скоростей обычно не превышает 0,1 и может считаться малым [2]. Поэтому, членами, содержащими коэффициенты вида ε_0^2 и членами вида $\varepsilon F'(\tau)$, которые на резонансные свойства системы влияют, как члены порядка ε_0^2, будем пренебрегать.

Чтобы применить метод Канторовича-Галеркина [5], необходимо преобразовать граничные условия. Для этого введём новую функцию

$$U(\xi,\tau)=V(\xi,\tau)+H(\xi,\tau),$$

где $V(\xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению:

$$[V(\xi,\tau)+H(\xi,\tau)]_{\tau\tau}-V_{\xi\xi}(\xi,\tau)=0 \tag{8}$$

и граничным условиям

$$V_{\xi\xi}(0,\tau)-kV_{\xi}(0,\tau)=0;\ V(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=0, \tag{9}$$

а $H(\xi,\tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$H_{\xi\xi}(\xi,\tau)=0; \tag{10}$$

$$H_{\xi}(0,\tau)=0; \tag{11}$$

$$H(l(\varepsilon_0\tau),\tau)=F(\tau)+\varepsilon_0\int\limits_{\gamma_0}^{\tau}H_{\xi}(l(\varepsilon_0\zeta),\zeta)l'(\varepsilon_0\zeta)d\zeta+\varepsilon_0\int\limits_{\gamma_0}^{\tau}V_{\xi}(l(\varepsilon_0\zeta),\zeta)l'(\varepsilon_0\zeta)d\zeta. \tag{12}$$

Из уравнения (10) и условия (11) нетрудно получить, что:

$$H(\xi,\tau)=C_1(\tau)\frac{\xi}{l(\varepsilon_0\tau)}+C_2(\tau). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), получим

$$C_1(\tau)=0. \tag{14}$$

Таким образом

$$H(\xi,\tau)=C_2(\tau); \tag{15}$$

$$H_{\xi}(\xi,\tau)=0. \tag{16}$$

Подставляя (13) в (12), с учетом (14), получим следующее уравнение для определения $C_2(\tau)$:

$$C_2(\tau) = F(\tau) + \varepsilon_0 \int\limits_{\gamma_0}^{\tau} V_{\xi}(l(\varepsilon_0 \zeta), \zeta) l'(\zeta) d\zeta. \tag{17}$$

После пренебрежения членами порядка ε^2 уравнение (8) с учетом (15), (17) будет выглядеть следующим образом:

$$\left[V(\xi,\tau) + F(\tau)\right]_{\tau\tau} + \varepsilon_0 V_{\xi\tau}(l(\varepsilon_0\tau),\tau) l'(\tau) - V_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0. \tag{18}$$

Для решения задачи (18), (9) воспользуемся методом Канторовича-Галеркина. Решение будем искать в виде

$$V(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau). \tag{19}$$

Здесь $X_n(\xi,\varepsilon\tau) = \sin\left(\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\xi\right) - \dfrac{k}{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)} \cos\left(\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\xi\right),\ \omega_{0n}(\varepsilon\tau) \approx \dfrac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)} + \dfrac{k}{\pi n}$ – собственные функции и собственные частоты задачи:

$$X_{n\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi,\varepsilon\tau) = 0;$$
$$X_n(l(\varepsilon_0\tau),\varepsilon_0\tau) = 0;\ X_{n\xi\xi}(0,\varepsilon_0\tau) - kX_{n\xi}(0,\varepsilon_0\tau) = 0.$$

Рассмотрим случай, когда масса груза представляет собой большую величину. При этом $k \to 0$, следовательно $\omega_{0n}(\varepsilon\tau) \to \dfrac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)}$.

Подставляя *n*-ный член ряда (19) в уравнение (18), с точностью до величин порядка ε^2 получим:

$$\left[f_n(\tau) X_n(\xi,\varepsilon_0\tau) + F(\tau)\right]_{\tau\tau} + \varepsilon_0 f_n'(\tau) X_{n\xi}(\xi,\varepsilon_0\tau) l'(\varepsilon_0\tau) +$$
$$+\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau) f_n(\tau) X_n(\xi,\varepsilon_0\tau) = 0. \tag{20}$$

Как и в [6], функцию $f_n(\tau)$ будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (20) с функцией $X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)$ на интервале $[0, l(\varepsilon_0\tau)]$. В этом случае будем иметь:

$$\int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} \left[f_n(\tau) X_n(\xi,\varepsilon_0\tau) + F(\tau)\right]_{\tau\tau} X_n(\xi,\varepsilon_0\tau) d\xi + A_{1n}(\varepsilon_0\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau) f_n(\tau) = 0, \tag{21}$$

где $A_{1n}(\varepsilon_0\tau) = \displaystyle\int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon_0\tau) d\xi = \dfrac{l(\varepsilon_0\tau)}{2}$.

При выводе уравнения (21) учтено, что

$$\int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_{n\xi}(\xi,\varepsilon_0\tau) X_n(\xi,\varepsilon_0\tau) d\xi = 0.$$

Для того, чтобы избавиться в (21) от второй производной функции $F(\tau)$, сделаем замену

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + Q_n(\varepsilon_0\tau)F_n(\tau), \tag{22}$$

где

$$Q_n(\varepsilon_0\tau) = -\frac{\int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)d\xi}{A_{1n}(\varepsilon_0\tau)} = -\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n}.$$

Тогда уравнение (21) с точностью до величин порядка малости ε^2 будет иметь вид

$$\mu_n''(\tau) + 2A_n(\varepsilon_0\tau)\mu_n'(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)\mu_n(\tau) = -\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)Q_n(\varepsilon_0\tau)F_n(\tau)\,, \tag{23}$$

где

$$A_n(\varepsilon_0\tau) = \frac{\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\tau)}{A_{1n}(\varepsilon_0\tau)} = \frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0\tau)}{2l(\varepsilon_0\tau)};$$

$$\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\tau) = \int\limits_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon_0\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau)d\xi = \frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0\tau)}{4}.$$

Второй член ряда (22) слабо влияет на точность (как величина порядка ε^2) [6], поэтому можно записать:

$$U(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon_0\tau).$$

Отсюда следует, что колебания системы можно рассматривать как суперпозицию колебаний, соответствующих отдельным динамическим модам.

Если ввести в уравнение (23) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon_0\tau) = \exp\left[-\int\limits_0^{\tau}\frac{\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\zeta)}{A_{1n}(\varepsilon_0\zeta)}d\zeta\right] = \frac{1}{\sqrt{l(\varepsilon_0\tau)}},$$

то уравнение можно преобразовать так, что оно не будет содержать члена с $y_n'(\tau)$:

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)Q_n(\varepsilon_0\tau)}{A_{0n}(\varepsilon_0\tau)}F_n(\tau).$$

Примем $F_n(\tau) = B\cos W_n(\tau),$ где $W_n(\tau)$ – монотонно возрастающая функция.

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям [5], а также применяя метод малого параметра [7], получим следующее выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau)\left\{\left[\int\limits_0^{\tau}F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int\limits_0^{\tau}F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\},$$

где

$$E_n^2(\tau)=\frac{1}{4\pi n};\ F_n(\tau)=-\frac{2B((-1)^n-1)\sqrt{\pi n}}{l(\varepsilon_0\zeta)};$$

$$\Phi_n(\zeta)=w_n(\zeta)-W_n(\zeta);\ w_n(\zeta)=\int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon_0\zeta)d\zeta=\frac{\pi n}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\zeta).$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равна нулю, т.е.:

$$W_n(\tau)=w_n(\zeta)+\gamma,$$

где γ - постоянная величина.

Амплитуда при этом имеет вид:

$$A_n(\tau)=B\int_0^\tau \frac{(1-(-1)^n)}{1+\varepsilon_0\zeta}d\zeta.$$

Если $W_n(\tau)=\tau,$ то в области, содержащей точку $\tau_0=\frac{1}{\varepsilon_0}(\pi n-1)$ наблюдается явление прохождения через резонанс. Максимально возможная амплитуда определяется по формуле

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2)=E_n^2(\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2}F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}.$$

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, колебания которых описывает задача (1) - (3).

Список литературы

1. *Савин Г.Н., Горошко О.А.* Динамика нити переменной длины // Наук.думка, Киев, 1962, 332 стр.
2. *Горошко О.А., Савин Г.Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. – Киев: Изд-во АН УССР, 1971. – 290 с.
3. *Весницкий А.И., Потапов А.И.* Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. Горьковский университет. – 1975. – №7. – С. 84-89.
4. *Колосов, Л.В.* Исследование совместных продольно-поперечных колебаний шахтного подъемного каната // Горная электромеханика и автоматика. – 1977. – В. 31. – С. 110-116.
5. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2009, 1 (18), 149-158.
6. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 стр.
7. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Дата поступления статьи: 6 декабря 2015 года.