

УДК 534

К АНАЛИЗУ СЛУЧАЙНЫХ НЕНЬТОНОВСКИХ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ УДАРНЫМИ ПАРАМИ

© **Виталий Львович Крупенин**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
им. А.А. Благонравова РАН, Россия, Москва

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Предлагаются методики анализа случайных виброударных процессов в системах с большим числом параллельных ударных пар при отказе от предположения о мгновенности соударений. Используются два метода. Во-первых, метод сингуляризации, который позволяет отказаться от представлений о мгновенном ударе и учесть более реалистические, нежели ньютоновская, гипотезы взаимодействия. Даны оценки продолжительности синхронного квазирезонансного случайного виброударного процесса. Во-вторых, исследуются точные представления для соответствующих многомерных плотностей вероятности в приближении диффузионных марковских процессов. Определяются характеристики процессов и оценены вероятности возникновения различных случайных конфигураций системы.

Ключевые слова: случайные колебания, немгновенный удар, сингуляризация, большое число степеней свободы, импульс взаимодействия, время взаимодействия, жёсткий запуск, квазирезонансный случайный процесс, время существования режимов, многомерная функция распределения, многомерная плотность вероятностей, распределение Гиббса, случайные конфигурации.

TO THE ANALYSIS OF RANDOM NON-NEWTONIAN VIBROIMPACT PROCESSES IN SYSTEMS WITH PARALLEL IMPACT PAIRS

© **V.L. Krupenin**

IMASH RAS, Russia, Moscow

Abstract. The methods of analysis of random vibro-impact processes in systems with a large number of parallel impact pairs in case of refusal of the momentary collisions are proposed. Firstly, the method of singularization, which eliminates the concepts of momentary impact and allow for more realistic than Newton hypotheses interaction. Estimates of the length of the synchronous quasi-resonant random vibro-impact process. Secondly, we study the exact representation of the respective multi-dimensional probability densities in the approximation of diffusion Markov processes. Defines the characteristics of the processes and the estimated probability of occurrence of different random system configurations.

Keywords: random vibrations, momentary impact, singularization, a large number of freedom degrees, the impact impulse, impact time, hard run, quasi-resonant random process, the existence of modes, multi-dimensional distribution function, Gibbs distribution, multivariate probability density, random configuration.

1. Описание проблемы. Проблема моделирования и анализа неньютоновских виброударных систем, в которых силы ударного взаимодействия описываются посредством пороговых нелинейностей, а силы возбуждения – детерминированы, обсуждалась в работах

[1-6]. Случайные виброударные системы с ньютоновским ударом и многими степенями свободы рассматривались в работах [4, 5, 7-11]. В работе [3] был предложен метод сингуляризации, позволяющий, используя гипотезу о мгновенном ударном взаимодействии, строить приближенные решения задач, для которых необходимо рассмотрение конечной продолжительности удара. Метод сингуляризации, развитый в работах [4 - 6] состоит в том, что при наличии немгновенного взаимодействия концепция удара в первом приближении все равно остается ньютоновской (удар упругий), но при этом ограничители полагаются не фиксированными, а «плавающими» в зависимости от времени взаимодействия, определяемого выбранной гипотезой неньютоновского удара. Так появляется возможность привлечь во внимание разнообразные особенности характеристик упругого нагружения взаимодействующих при соударениях подсистем и оказывается возможным учесть более реалистические модели рассеяния энергии при взаимодействии.

Некоторые аспекты этой проблемы и обсуждаются ниже на примерах расчета случайных колебаний в протяженных конструкциях с произвольным конечным числом ударных пар. В данной работе существенно используются построения данные в [12].

2. Операторное уравнение движения. Ниже, в модифицированном виде используем методы частотно-временного анализа виброударных процессов [1, 3-11], основанные на записи искомых законов движения через периодические функции Грина взаимодействующих линейных механических подсистем.

Рассмотрим линейную склерономую, стационарную механическую систему с произвольным конечным числом (N_1) степеней свободы (рис.1). Ограничимся, для простоты, вообще говоря, несущественным предположением о том, что каждая точка системы совершает одномерное движение вдоль некоторой оси. Предположим, что известно семейство операторов динамической податливости данной системы $L(u, y; p)$, где u и y — ее произвольные точки. Каждый такой оператор ставит в соответствие силе, приложенной в точке u , перемещение точки y ; $p = d/dt$.

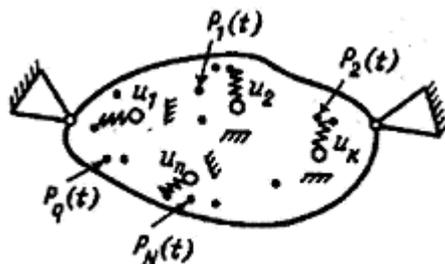


Рис. 1

Пусть в $N \leq N_1$ точках $\{u_k\}$: $L(u_k, u_k) = O(p^{-2})$ ($p \rightarrow \infty$). Это предположение означает, в частности, что в точках $\{u_k\}$ сосредоточены некоторые тела с массами m_k . Пусть далее в каждой такой точке помещена ударная пара, предполагаемая для определенности несимметричной и односторонней, т. е. имеется упорядоченный набор чисел $\{\Delta_k\}$, таких, что $u_k \leq \Delta_k$ и при $u_k = \Delta_k$ происходит прямое и центральное неньютоновское ударное взаимодействие. Обозначим силу удара в k -й паре $\Phi_k(u_k; \dot{u}_k)$. Обычно полагают, что

$$\Phi_k(u_k; \dot{u}_k) = \Phi_{1k}(u_k) + \Phi_{2k}(u_k; \dot{u}_k),$$

где $\Phi_{1k}(u_k)$ - упругая, а $\Phi_{2k}(u_k; \dot{u}_k)$ - диссипативная составляющие.

Предположим, наконец, что в некоторых выделенных $H \leq N_1$ точках $\{u_h\}$ приложены силы возбуждения (рис.1) $P_h(t)$. В работе [12] задача динамического анализа такой системы

рассматривалась в детерминированной поставке. Далее будут рассмотрены некоторые аспекты анализа при случайном возбуждении колебаний. Пусть, $P_h(t) = \xi_h(t)$, причем силы $\xi_h(t)$ предполагаются некоррелированными случайными нормальными центрированными эргодическими стационарными случайными процессами. В результате уравнения движения можно записать в виде

$$u_k(t) = \sum_{h=1}^H L(u_k, u_h; p) \xi_h(t) - \sum_{n=1}^N L(u_k, u_n; p) \Phi_k(u_k; \dot{u}_k; s) \quad (1)$$

Отметим также, что совершенно аналогично может рассматриваться случай, когда принадлежащие изучаемой системе сосредоточенные тела соударяются между собой. В этом случае соотношение (1) записывается для относительных координат $u_{ok} = u_{ik} - u_{1k}$, где u_{ik}, u_{1k} — абсолютные координаты контактирующих тел.

Построение решения уравнения движения (1) в общем случае затруднительно. Далее рассматриваются два метода анализа задачи на примере системы с параллельными ударными парами. В первом случае будет несколько сужена цель анализа, во-втором — ограничена общность постановки задачи.

Вначале сделаем существенное замечание о выборе гипотезы удара ([12]).

3. Гипотезы удара. Будем вначале предполагать, что удар — абсолютно упругий и прямой. Рассмотрим так называемые пороговые функции из класса $\{\Phi\}_\Delta$ [1, 5, 6]. Порогом называется координата, по прохождению которой начинается ударное взаимодействие двух тел или тела и неподвижного ограничителя. Указанная координата отсчитывается вдоль оси удара. В случае, если удар абсолютно жесткий и деформацией соударяющихся тел можно пренебречь, то время его продолжительности равно нулю (мгновенный удар).

В случае мгновенного удара применяется известная гипотеза Ньютона. Сила удара в этом случае записывается при помощи сингулярной обобщенной функции [1, 5, 6]. Однако, например, если нам важен учет конечной продолжительности силы удара или при учете потерь энергии во время взаимодействия необходимо принять во внимание какие-либо гипотезы контактного демпфирования, основанные, например, на свойствах материалов взаимодействующих тел, необходимо отказаться от предположения о мгновенности взаимодействия.

Рассмотрим упругое взаимодействие. Вообще говоря, выбор гипотезы удара — это задание (получение) представления соответствующей силы взаимодействия. Если ударная пара — односторонняя несимметричная как и показано на рис. 2, то несимметричной

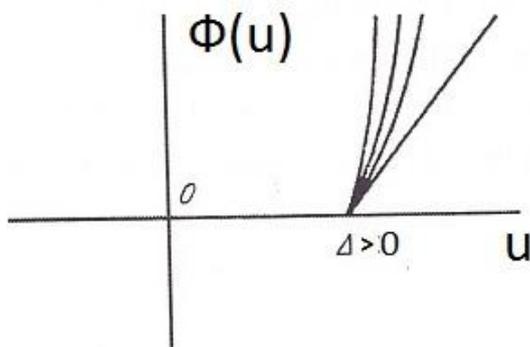


Рис. 2

будет и, отвечающая ей, пороговая функция $\Phi_1(u_k) = \lambda \Phi_k(u_k)$, при посредстве которой, собственно, и устанавливается гипотеза удара в данной ударной паре. Здесь $\lambda \gg 1$ – большой параметр. Класс пороговых функций для данной задачи определяется так:

$$\Phi_k(u_k) \in \{\Phi\}_{\Delta} \equiv \{\Phi_k(u_k); \Phi(u_k) = \psi_k(u_k - \Delta) \eta(u_k - \Delta) \Delta \geq 0; \psi_k(u_k - \Delta) \equiv 0; u_k \geq 0\}. \quad (2)$$

Предполагается, что функция $\psi_k(u_k)$ непрерывно дифференцируема на всей числовой оси, монотонно возрастает и является выпуклой при $x \geq 0$ (рис. 2); $\eta(x)$ – единичная функция. Если взаимодействие – двустороннее, то функция взаимодействия будет двухпороговой.

После первых работ такой подход был позже развит в книгах [4, 5], а для систем со многими ударными парами – в [6, 12].

4. Режимы консервативной системы. Зафиксируем гипотезу упругого взаимодействия в каждой ударной паре. Пусть в уравнении (1) все $\xi_i(t) = 0$. И, кроме того, все $\Phi_{2k} = 0$; $\text{Im}L(i\omega) = 0$, то есть система – консервативна. В соответствии с методом сингуляризации Т-периодическое решение задачи имеет вид [12]:

$$u_k(t) = - \sum_{n=1}^N J_{\lambda n} \chi_{kn}(t - t_n - 0,5t_{\lambda n}), \quad k = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Здесь обозначено: $J_{\lambda n}$ – импульс взаимодействия l -й ударной пары:

$$J_{\lambda n} = \left| \int_0^{t_{\lambda n}} \lambda \Phi_n[u_n(s)] ds \right|, \quad k = 1, \dots, N; \quad (4)$$

Т-периодические функции Грина (ПФГ), отвечают операторам динамической податливости $L(u_k, u_n; p)$ [см. (8)]; время взаимодействия $t_{\lambda n}$ определяется выбранной гипотезой удара [1, 6].

$2N$ -параметрическое представление (3) определяет решение через $2N$ параметров движения – импульсы взаимодействия и моменты начала взаимодействия. Для нахождения первых N неизвестных параметров движения воспользуемся условиями начала (или окончания) взаимодействия:

$$u_k(t_n) \equiv u_k(t_n + t_{\lambda n}) = \Delta_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (5)$$

где Δ_k – значения установочных зазоров (натягов).

$$\Delta_k = \sum_{n=1}^N J_{\lambda n} \chi_{kn}(t_n + \tau_{\lambda n}); \quad \tau_{\lambda n} = \frac{1}{2} t_{\lambda n}; \quad k = 1, \dots, N \quad (6)$$

Для распространенной гипотезы линейности функции взаимодействия при $u_k > \Delta$ в наиболее интересном случае больших импульсов взаимодействия верна простая формула:

$$\tau_{\lambda n} = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}. \quad (7)$$

Соотношения (6) представляют собой систему N линейных алгебраических уравнений. Другие N условий для величин t_n могут быть получены исходя из дополнительных соотношений [12]. При рассмотрении консервативной задачи целесообразно привлечение соображений симметрии.

Имея в виду получить легко интерпретируемые аналитические расчетные формулы положим далее для всех $k: \Delta_k \equiv \Delta$.

Отметим, наконец, что по определению:

$$\chi(u_k, u_h; t) = T^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} L(u_k, u_h; iq\omega t) \exp(iq\omega t). \quad (8)$$

Свойства ПФГ подробно описаны в [5, 6]; они представляют собой реакции линейных систем на периодическую последовательность δ -функций Дирака (дираковскую гребенку):

$$\delta^T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = T^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp(iq\omega t). \quad (9)$$

Рассмотрим систему с параллельными ударными парами [12-17]. Её модель дана на рис. 3, где отмечено, что взаимодействие может происходить в упруго-диссипативных буферах с различными характеристиками диссипации. Наиболее интенсивными режимами, реализующимися в такой системе, оказываются хлопки [13, 15]. Они характеризуются синхронностью взаимодействия, отдаленных друг от друга взаимодействующих точек.

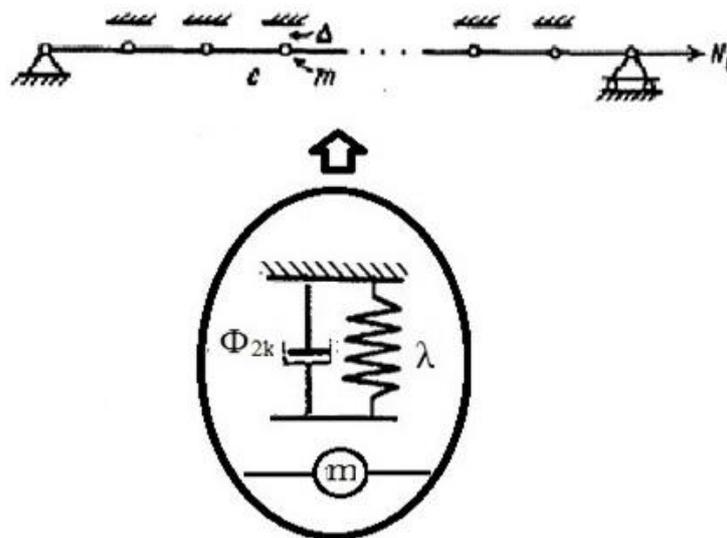


Рис. 3

Вначале рассматривается упругая модель. Не ограничивая общности рассуждений, для простоты будем считать, что $m=c=1$. Кроме того, вполне естественно предположить, что во всех ударных парах зафиксирована одна и та же гипотеза взаимодействия.

Для консервативной системы уравнения движения при $k=1, \dots, N$ и граничные условия примут вид

$$\ddot{u}_{kq} + 2u_k - u_{k-1} - u_{k+1} + \lambda \Phi(u_k) = 0, \quad u_0 = u_{N+1} = 0, \quad u_k \leq \Delta. \quad (10)$$

Пусть в системе осуществляется хлопок, в котором участвуют все частицы. Тогда $2N$ -параметрическое представление (3) и определяющие соотношения (4) - (6) при всех $k=1, \dots, N, u_k=0$ как раз и описывают хлопок, в котором начало взаимодействия совмещено с началом отсчёта времени. ПФГ системы в данном случае определяется рядом (8), который, учитывая представления операторов динамической податливости, данные в [4, 5] может быть записан в конечной форме на отрезке периодичности при $t \in [0, T]$:

$$\chi_{kn}(t) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{N+1} \sin \frac{\pi j q}{N+1} \sin \frac{\pi k q}{N+1} \frac{\cos \Omega_q (t - T/2)}{\Omega_q \sin \frac{1}{2} \Omega_q T}. \quad (11)$$

Собственные частоты линейной цепочки

$$\Omega_q = 2 \sin \left[\frac{\pi q}{2(n+1)} \right]. \quad (12)$$

Для получения конечного представления для ПФГ $\chi_{kn}(t)$ вне отрезка $[0, T]$ функцию (11) необходимо продолжить по периодичности: $\chi_{kn}(t) = \chi_{kn}(t+T)$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

5. Пример: трехпролётная цепочка. Рассмотрим трехпролётную цепочку с двумя телами ($N=2$). В работе [12] найдено представление хлопка, следующее из (3) – (7):

$$u_1(t) = u_2(t) \equiv u(t) = J [\chi_{11}(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}) + \chi_{12}(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}})]. \quad (13)$$

Для больших значений импульс взаимодействия:

$$J = \Delta [\chi_{11}(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}) + \chi_{12}(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}})]^{-1}. \quad (14)$$

Учитывая свойства ПФГ [4, 5] внутри интервала периодичности запишем, пользуясь формулой Тейлора: $\chi_{kq}(\tau_\lambda) \approx \chi_{kq,nj}(0) + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} \dots$. Тогда (14) можно переписать так:

$$J \approx \Delta [\chi_{11}(0) + \chi_{12}(0) + \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda}}]^{-1} \approx J_0 - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}, \quad (15)$$

где J_0 – импульс взаимодействия при реализации синхронного хлопка в предположении выполнения гипотезы о мгновенном ударе ($\lambda \rightarrow \infty$):

$$J_0 = -2\Delta \text{tg} \frac{1}{2} T = -2\Delta \text{tg} \frac{\pi}{\omega} \quad (16)$$

Эта формула в точности отвечает представлению для традиционного «ударного осциллятора» [4, 5]. Из условия $J \geq 0$ следует, что хлопки возможны в частотном диапазоне $1 < 1 + \Omega_\lambda \leq \omega < 2$, причем $\Omega_\lambda = O(\lambda^{-1/2})$. Для искомых законов движения показано:

$$u(t) = \Delta \frac{\cos(t - \pi/2\sqrt{\lambda} - \pi\omega^{-1})}{\cos \pi\omega^{-1}}; \quad -\pi/2\sqrt{\lambda} < t < T - \pi/2\sqrt{\lambda}, \quad (17)$$

т.е. движение каждого тела аналогично движению сингуляризованного ударного осциллятора. При больших N картина усложняется, поскольку хлопки сопровождаются неодинаковыми импульсами в ударных парах, однако, и качественная сторона вопроса, и определяющие соотношения принципиально не изменяются.

6. Квазирезонансные режимы в трехпролётной цепочке. Вернемся к исходным уравнениям движения (10), применительно к цепочке с параллельными ударными парами, полагая, что при взаимодействии в зоне контакта на все тела действуют одинаковые силы $\Phi_2(u_k; \dot{u}_k) = g(\dot{u}_k) \eta(u_k - \Delta)$, где $g(\dot{u}_k)$ – контактная сила диссипации, а действующие случайные силы даются случайными процессами: $\xi_k(t) = \xi(t)$ для всех k . Пусть во время движения на взаимодействующие тела действует сила вязкого трения, зависящая от их абсолютных скоростей. Тогда вместо (10) получаем:

$$\ddot{u}_k + 2u_k - u_{k-1} - u_{k+1} + \lambda \Phi(u_k) = -g(\dot{u}_k) \eta(u_k - \Delta) - 2\epsilon b \dot{u}_k + \xi(t), \quad u_0 = u_{N+1} = 0. \quad (18)$$

В изучаемом здесь случае выберем $N=2$.

Когда в системах отыскиваются периодические режимы, тонаибольший интерес представляют синфазные резонансными режимы, под которыми понимаются движения близкие к описанным выше периодическим режимам соответствующей консервативной системы. Предполагается, что уровни сил возбуждения и диссипации малы, так что при реализации резонансных режимов происходит взаимная компенсация их работ. Такое понимание резонанса было принято, в частности, в [4, 5, 13].

Допустим теперь, что в результате случайных причин произошел жесткий запуск колебаний и в системе возник режим, сопровождаемый взаимодействиями. Если уровни диссипации и постоянно действующего возбуждения достаточно малы, то можно предположить, что указанному режим отвечает резонансный закон движения. В нашем случае этот закон движения дается формулой (17), но если в данной системе в консервативных моделях возможны другие формы резонансных движений, которым отвечают достаточно широкие интервалы собственных частот, то возможны скачкообразные переходы и на другие типы подобных движений.

Такие движения были названы *квазирезонансными* [4, 5].

Ограничиваясь здесь только движениями (17) и, следуя М.З. Коловскому [18], найдем условия поддержания резонансных режимов из условия доминирования мощности силы возбуждения на движении (17) [(13)] над мощностью сил диссипации на этом же движении за время наблюдения T_N . Пусть соответствующая мощность силы $\xi(t)$ на синфазном движении (17) есть:

$$N_I = \frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} \xi(t) \dot{u}(t) dt, \quad (19)$$

где интегрирование понимается в смысле случайных процессов [19]. Случайная величина N_I – центрированная, как и случайная сила $\xi(t)$; её дисперсия выражается через корреляционную функцию $K_\xi(\tau)$ следующим образом:

$$\sigma_N^2 \equiv \langle N_I^2 \rangle = \frac{1}{T_N^2} \int_0^{T_N} dt \int_0^{T_N} \dot{u}(t) \dot{u}(t + \tau) K_\xi(\tau) d\tau. \quad (20)$$

При этом угловые скобки обозначают операцию статистического усреднения. Кроме того, здесь учтена периодичность резонансного процесса и сделано предположение о кратности времени наблюдения T_N периоду $T = 2\pi\omega^{-1}$.

Закон распределения величины N_I - нормальный:

$$W(N_I) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{N_I^2}{2\sigma_N^2}\right).$$

Мощность сил диссипации при условии осуществления синхронных хлопков $u(t)$

$$N_2(\omega) = \frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} [g(\dot{u})\eta(u - \Delta) + 2\varepsilon b \dot{u}] du(t) = N_{2c}(\omega) + N_{2v}(\omega), \quad (21)$$

где $N_{2c}(\omega)$ и $N_{2v}(\omega)$ – соответственно мощности контактных и вязких диссипативных сил.

Квазирезонансные режимы могут существовать только при превалировании мощности возбуждения над мощностью диссипации. Поэтому вероятность срыва такого режима:

$$\mathbf{P}\{N_1 < N_2(\omega)\} = \int_{-\infty}^{N_2(\omega)} W(N_1) dN_1.$$

Если $\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_\xi(\tau) = 0$, то при $T_N \rightarrow \infty$ дисперсия σ_N^2 убывает и тогда с наперед заданной вероятностью можно указать время в течении которого мощность сил диссипации будет превалировать и квазирезонансный режим перестанет существовать. Возобновиться он сможет только в результате возникновения следующего случайного жесткого запуска. Из сказанного следует, что появляется возможность оценить время T^* -продолжительность существования квазирезонансного режима.

Пусть в уравнениях (18) $\xi(t)$ – нормальный белый шум. В этом случае $K_\xi(\tau) = S_0 \delta(\tau)$ и из формулы (20) следует, что

$$\sigma_N^2 \equiv \langle N_1^2 \rangle = \frac{S_0}{T_N} \langle \dot{u}^2(t) \rangle. \quad (22)$$

Зададимся вероятностью $\mathbf{P}\{N_1 < N_2(\omega)\} = w_0$. Принимая во внимание нормальность процесса N_1 , выразим эту вероятность через функцию Лапласа и получим [20]:

$$N_2(\omega) > k_0(w_0) \sigma_N, \quad (23)$$

где $k_0(w_0)$ – число, определяемое свойствами функции Лапласа и заданной вероятностью w_0 : $k_0(w_0) = 2, w_0 \approx 0,98$; $k_0(w_0) = 4, w_0 \approx 0,99$ и так далее.

После внесения (22) в (23) получим искомую оценку:

$$T^* > \frac{S_0 k_0^2(w_0) \langle \dot{u}^2(t) \rangle}{N_2^2(\omega)}. \quad (24)$$

Аналогично рассматриваются другие типы широкополосных сил возбуждения, а также строятся оценки для других возможных типов квазирезонансных процессов. Условие стремления корреляционной функции к нулю на бесконечности – существенно. В противном случае подход изменится.

7. Расчётный пример. Конкретизируем вид формулы (24). Вначале определим отношения порядков входящих сюда величин. Пусть ε – малый параметр. Установим:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = O(\varepsilon); \quad \beta = O(1), \text{ так как силы взаимодействия действуют время } \tau_\lambda = O(\varepsilon); \quad b = O(\varepsilon);$$

$$S_0 = \varepsilon S (S = O(1)); \quad \Delta = O(1).$$

После ряда преобразований получаем, учитывая (13) – (17):

$$\langle \dot{u}^2(t) \rangle = \left[\frac{\Delta^2}{2 \cos^2(\pi/\omega)} + \Delta \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\omega} \right] \left[1 - \frac{\omega}{2\pi} \sin 2\pi/\omega \right] + o(1/\sqrt{\lambda}) \quad (25)$$

Для «контактной» и «вязкой» составляющих мощностей сил диссипации [см. (21)] находим соответственно:

$$N_{2c}(\omega) = \left[\frac{8\Delta\omega\beta}{\pi} + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \right] \operatorname{tg} \frac{\pi}{\omega} [\chi_{11}(\tau_\lambda) - \chi_{11}(0)]; \quad (26)$$

$$N_{2v}(\omega) = \left[\frac{b\Delta^2}{2\cos^2(\pi/\omega)} + \Delta \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\omega} \right] \left[1 - \frac{\omega}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\omega} \right] + o(1/\sqrt{\lambda}) \quad (27)$$

И таким образом определены все члены неравенства (24). С его помощью мы можем оценить минимальное время срыва T^* , либо зафиксировав вероятность срыва, варьировать значения зазоров, либо зафиксировав значение зазора, посмотреть величины T^* при различных значениях вероятностей срыва w_0 . На рис. 4 показаны зависимости $T^*(\omega)$ в области резонансных частот реализации хлопков при различных значениях установочных

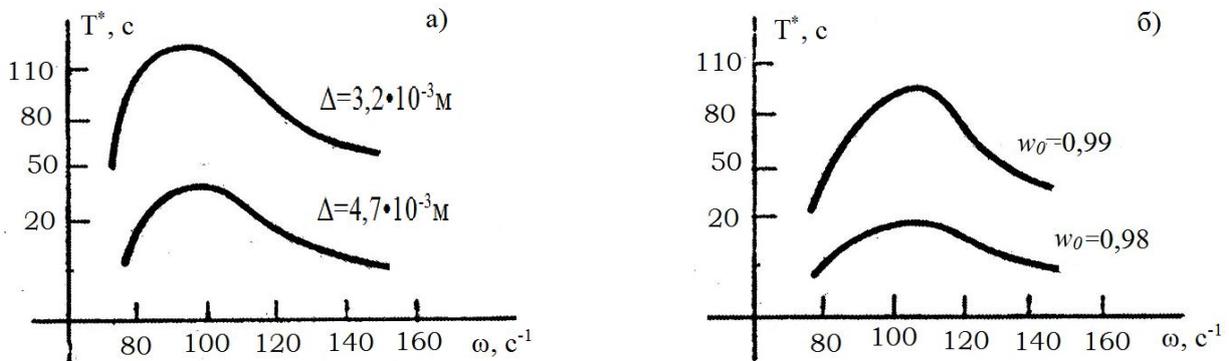


Рис.4

зазоров – рис. 4, а и б - при различных заданных вероятностях срыва квазирезонансного процесса. Расчеты сделаны при некоторых выбранных значениях параметров, включая время взаимодействия, однозначно определяющего значение λ .

Сделаем необходимые комментирующие замечания:

А. Параметр ω , фигурирующий в соотношениях (24)-(27) – частота квазирезонансного режима – необходимо принадлежит интервалу собственных частот соответствующего режима в консервативной системе. В рассматриваемом случае одностороннего ограничителя хода и реализации хлопка при выбранных единицах измерений, этот интервал лежит внутриинтервала]1, 2[(п. 5.). Частота ω заранее неизвестна, ибо её значение зависит от случайных факторов.

Б. При рассмотрении двусторонних ограничителей, например, при рассмотрении симметричных, ограничителей все предыдущие рассуждения остаются в силе. Определяющие соотношения, получаются, исходя из записи ПФГ для симметричных режимов движения [4, 5, 12].

В. Указанная методика имеет смысл только, если установочные зазоры в системе достаточно велики. То есть предполагается, что

$$|\Delta| \gg \sigma_0, \quad (28)$$

где σ_0^2 - дисперсия процесса в линейном случае. Таким образом предположение, что квазирезонансные режимы при посредстве жесткого запуска – существенно.

Г.Приведенные на рис.4 – кривые показывают, что, например, при проектировании систем виброизоляции стремление конструкторов к увеличению зазоров может привести к случайному возникновению достаточно продолжительных интенсивныхвиброударных процессов, которые, несмотря на неизбежные срывы могут, тем не менее нанести вред конструкции. Проведеннаяметодика дает возможность оценить время пребывания системы в максимально неблагоприятных условиях.

8. Использование методов диффузионных марковских процессов.Вернемся к системе (18), которую перепишем в виде:

$$\ddot{u}_k + c(2u_k - u_{k-1} - u_{k+1}) + \lambda \Phi(u_k) = -2b \dot{u}_k + \xi_k(t), \quad u_0 = u_{N+1} = 0, \quad (29)$$

то есть снова будем считать взаимодействие упругим.

Силы возбуждения $\xi_k(t)$, приложенные к каждому из тел, предполагаются некоррелированными случайными процессами типа белых шумов с одинаковыми интенсивностями S . Таким образом $\langle \xi_k \xi_r \rangle = S \delta_{kr} \delta(\tau)$; δ_{kr} - символ Кронекера.

Задачи подобного рода в постановке типа (29) достаточно подробно рассматривались в работах [7-11], когда удар предполагался мгновенным. Здесь, как и ранее, рассматривается немгновенное взаимодействие.

Функция Гамильтона для системы (29) имеет вид

$$H(\mathbf{u}; \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} y_k^2 + \frac{1}{2} c [u_1^2 + u_N^2 + \sum_{q=2}^{N-1} (u_q - u_{Nq})^2] + \lambda U_{kc}(\mathbf{u}), \quad (30)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$; $\mathbf{y} = (y_1, y_1, \dots, y_N)$ – векторы фазовых координат ($y_k = \dot{u}_k$), являющиеся здесь гамильтоновыми переменными. Члены, входящие с параметрами λ - выражения потенциальной энергии взаимодействия:

$$U_{kc}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N U_{kc}(u_k) = \sum_{k=1}^N \int_0^{u_k} \Phi(z) dz. \quad (31)$$

Для описания искомого случайного процесса $\{u_k(t); y_k(t)\}$ воспользуемся методами диффузионных марковских процессов. Предполагая процесс стационарным, будем искать $2N$ – мерную стационарную совместную плотность вероятностей $p(u_1, u_2, \dots, u_N; y_1, y_1, \dots, y_N) \equiv p(\mathbf{u}; \mathbf{y})$. Запишем стационарное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для уравнений движения (29) и гамильтониана (30) в виде [19]:

$$\sum_{k=1}^N [\{H, p\}_k - 2b \partial(y_k p) / \partial y_k - \frac{1}{2} S \partial^2 p / \partial y_k^2] = 0, \quad (32)$$

причем $\{H, p\}_k \equiv (\partial H / \partial y_k)(\partial p / \partial u_k) - (\partial H / \partial u_k)(\partial p / \partial y_k)$ – скобка Пуассона для k -го точечного тела.

Граничные условия к уравнению (32) сводятся к требованиям стремления к нулю плотности вероятности p при $u_k, y_k \rightarrow \pm \infty$ хотя бы для одного k , а также стандартным условиям нормировки.

Решение уравнения (31) дает известное в статистической физике каноническое распределение Гиббса:

$$p(\mathbf{u}; \mathbf{y}) = C \exp\{-4bS^{-1}H(u_1, u_2, \dots, u_N; y_1, y_1, \dots, y_N)\}; \quad (33)$$

Постоянная нормировки Соответствует условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{u}; \mathbf{y}) d\mathbf{u} d\mathbf{y} = 1,$$

где интегрирование ведется по всем фазовым переменным, а $d\mathbf{z} = dz_1 dz_2 \dots dz_N$.

Нельзя не отметить, что задачу можно существенно расширить, отказавшись от предположения об одномерности движения u_{ki} , вводя в рассмотрение более сложные типы соударяющихся объектов. Для случая мгновенного удара это было проделано в работах [7 - 11].

Распределение Гиббса полностью определяет динамику рассматриваемой системы в рамках данной модели (29), так как оказывается точным решением определяющего уравнения ФПК. Его анализ дает всё необходимую информацию о процессе.

В частности, хорошо известно, что это распределение приводит к статистической независимости скоростей и координат. Проинтегрировав, далее, распределение (33) по пространственным координатам, получим нормальное распределение Максвелла по скоростям:

$$p(\mathbf{y}) \equiv p(y_1, y_1, \dots, y_N) = C_1 \exp\left\{-2bS^{-1} \sum_{k=1}^N y_k^2\right\}. \quad (34)$$

Это распределение весьма подробно изучено [7-11, 19]. Для виброударных систем наиболее важным является совместное N -мерное распределение импульсов взаимодействия; в данном случае речь идет о распределении величин $J_k = 2|y_k|$. После простых вычислений находим усеченное нормальное распределение (\mathbf{J} – вектор импульсов)

$$p(\mathbf{J}) = [2b/\pi S]^{0,5N} \exp\left[-b/2S \sum_{k=1}^N J_k^2\right], J_k \geq 0, \quad (35)$$

При посредстве этой формулы можно получить всю необходимую информацию об импульсах и силовых воздействиях в системе [4, 5, 7-11]. Например, для нечетных и четных начальных моментов одномерных величин J_j после ряда вычислений имеют место формулы:

$$m^{(2N+1)}(J_j) = \sqrt{\frac{2b}{\pi S}} \frac{N!}{2(b/2S)^{N+1}}; \quad m^{(2N)}(J_j) = Sb^{-1}(2N-1)!!$$

9. Анализ конфигураций. Обратимся, после интегрирования распределения (33) по всем скоростям, к распределению Больцмана по координатам:

$$p(\mathbf{u}) = p(u_1, u_2, \dots, u_N) = C_2 \exp\left\{-2bcS^{-1}[u_1^2 + u_N^2 + \sum_{q=2}^{N-1} (u_q - u_{q-1})^2] + \lambda \sum_{k=1}^N \int_0^{u_k} \Phi(z) dz\right\} \quad (36)$$

Для получения плотностей низших измерений необходимо провести необходимое число интегрирований (36) по неинтересующим координатам.

Если, как и всегда в этой работе, предположить, что характеристика нагружения в зоне взаимодействия – линейна, то, можно записать:

$$p(\mathbf{u}) = C_1 \exp\left\{-2bcS^{-1}[u_1^2 + u_N^2 + \sum_{q=2}^{N-1} (u_q - u_{q-1})^2] + 0,5\lambda \sum_{k=1}^N (u_k - \Delta)^2 \eta(u_k - \Delta)\right\} \quad (37)$$

Функция распределения

$$W(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_N} p(\mathbf{u}_0) d\mathbf{u}_0 = \mathbf{P}\{u_1 < y_1; u_2 < y_2; \dots; u_N < y_N\}, \quad (38)$$

где смысл обозначений, очевидно, понятен из предыдущего. Отсюда вероятность существования конфигурации с превышением порога $\{u_k > \Delta\}$ (для всех k) есть:

$$\mathbf{P}\{u_1 > \Delta; u_2 > \Delta; \dots; u_N > \Delta\} = 1 - W(\Delta), \quad (39)$$

где вектор Δ – отвечает достижением всеми точками системы порогового уровня. Теперь, внося (37) в (38), и далее, внося результат в (39) находим:

$$\mathbf{P}\{u_1 > \Delta; u_2 > \Delta; \dots; u_N > \Delta\} = 1 - C_1 \int_{-\infty}^{\Delta} \dots \int_{-\infty}^{\Delta} \exp\{-2bcS^{-1}[u_1^2 + u_N^2 + \sum_{q=2}^{N-1} (u_q - u_{q-1})^2] + 0,5\lambda \sum_{k=1}^N (u_k - \Delta)^2 \eta(u_k - \Delta)\} \quad (40)$$

При больших λ асимптотическая оценка выписанной вероятности (40) есть [20]:

$$\mathbf{P}\{u_1 > \Delta; u_2 > \Delta; \dots; u_N > \Delta\} = O(\lambda^{-\frac{N}{2}}), \lambda \rightarrow \infty. \quad (41)$$

В тоже время, можно показать, что для каждого k вероятность

$$\mathbf{P}\{u_k > \Delta\} = O(\lambda^{-\frac{1}{2}}), \lambda \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Для пар, троек, «энок» соответственно при любых допустимых значениях индексов получается при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{P}\{u_q > \Delta; u_k > \Delta\} = O(\lambda^{-1}); \mathbf{P}\{u_q > \Delta; u_k > \Delta; u_j > \Delta\} = O(\lambda^{-\frac{3}{2}}); \mathbf{P}\{u_1 > \Delta; u_2 > \Delta; \dots; u_n > \Delta\} = O(\lambda^{-\frac{n}{2}}). \quad (43)$$

Таким образом конфигурации, сопровождающиеся пребыванием точечных тел за пороговыми значениями маловероятны. Скорость убывания таких вероятностей образует арифметическую прогрессию. Указанные в (41) – (43) асимптотики могут быть уточнены и переписаны в размерных формах.

Если $\lambda \rightarrow \infty$, то высокие при конечных λ потенциальные $U_{kc}(\mathbf{u})$ барьеры приобретают высоты равные кинетическим энергиям каждого из тел и становятся непроницаемыми [1], одновременно времена взаимодействий обращаются в пределе в нуль и гипотеза удара переходит в ньютоновскую.

В работах [9-11] показано, что при рассмотрении профилей систем с мгновенным упругим ударом одна из основных проблем состоит в определении относительно часто встречающихся конфигураций, сопровождаемых взаимодействием системы с ограничителями.

Вуказанном случае в представлении (33) из формулы распределения исчезает член с большим параметром и возникают граничные условия. В данном случае [9-11]:

$$p(\mathbf{u}; \mathbf{y}) = C \exp\{-4bS^{-1}H(\mathbf{u}, \mathbf{y})\}; u_k \leq \Delta.$$

Приведем решение сформулированной выше задачи, исходя из определения среднего числа пересечений равновесного уровня $u_k = 0$; $k=1, 2, \dots, N$ с положительной скоростью, то есть при $y_k > 0$. Обозначим эту среднюю частоту $\bar{\omega}_0$. Имеем:

$$\bar{\omega}_0 = \int_0^{\infty} y_1 y_2 \dots y_N p(0,0, \dots, 0, y_1 y_2 \dots y_N) dy, \quad (44)$$

что можно, используя вид определяющего распределения Гиббса для случая мгновенного удара записать как

$$\bar{\omega}_0 = C \int_0^{\infty} y_1 y_2 \dots y_N \exp\{-2bS^{-1} \sum_{k=1}^N y_k^2\} dy \quad (45)$$

После интегрирования получается:

$$\bar{\omega}_0 = C \left(\frac{S}{4b} \right)^N \quad (46)$$

Пусть $u_a = (u_{1a}, u_{2a}, \dots, u_{Na})$ - какая-либо из конфигураций с ударами. Такая конфигурация содержит какое-то число тел, взаимодействующих с ограничителем $u_{ka} = \Delta$ и еще какое-то число тел, не взаимодействующих.

Пусть $U(u_a)$ - потенциальная энергия системы при реализации конфигурации u_a . Средняя частота регистрации такой конфигурации определяется как

$$\bar{\omega}_{0a} = C \int_0^{\infty} y_1 y_2 \dots y_N \exp\{-2bS^{-1} [U(u_a) + \sum_{k=1}^N y_k^2]\} dy. \quad (47)$$

Сравнив (45) и (47), найдем

$$\bar{\omega}_{0a} = \exp\{-4b/S U(u_a)\} \omega_0.$$

Тогда A_a - относительная частота появления конфигурации u_a :

$$A_a \equiv \omega_0^{-1} \bar{\omega}_{0a} = \exp\{-4b S^{-1} U(u_a)\}. \quad (48)$$

Отсюда видно, что в случае мгновенных соударений относительно часто будут появляться "ударные" конфигурации с меньшими потенциальными энергиями. Такие конфигурации, естественно, обладают минимальным числом изломов профилей: удар происходит только в одной паре или несколько ударов происходят синфазно.

Таким образом в случае немгновенного удара синфазные профили достижения ограничителей будут регистрироваться среди прочих относительно часто, но в соответствии с полученными соотношениями (40 – (43), чем больше тел в среднем вовлекается в процесс, тем более вероятен их выход из зоны взаимодействия.

Аналогично проводятся и другие исследования, вытекающие из найденных распределений. Данная задача может быть существенно обобщена [9-11].

11. Благодарность и поддержка. Автор благодарен В.К. Асташеву, за обсуждение.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-19-30026).

Список литературы

1. Крупенин В. Л. О колебаниях систем с большими упругими силами порогового типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №4. С. 76-84

2. Асташев В. К. Периодические движения упругого стержня с ограничителем. – В кн.: Динамика машин с учетом упругости и переменности масс. М.: Наука, 1965, с. 128 – 134.
3. Крупенин В. Л. Расчет механизмов с пороговыми нелинейностями методом сингуляризации // Машиноведение. 1984. № 1. С. 6-12.
4. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin. Heidelberg. New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.p.
5. Бабицкий В. И., Крупенин В. Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 320 с.
6. Крупенин В.Л. Виброударные процессы в семействе упругих систем с взаимодействующими граничными элементами посредством неньютоновских ударов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 4. С. 10 -20.
7. Крупенин В.Л. К расчету виброударных систем с регулярной структурой при случайном возбуждении // Машиноведение. 1984. № 6. С. 22–29.
8. Крупенин В.Л. Случайные соударения решетчатой конструкции с периодической структурой и плоским ограничителем хода // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 4. С. 105–109.
9. Крупенин В.Л. Об исследованиях одномерных и многомерных виброударных процессов при случайном широкополосном возбуждении // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 6. С. 25–31.
10. Крупенин В.Л. Обзор динамики одномерных и многомерных виброударных режимов движения многомерных виброударных систем при случайном широкополосном возбуждении // Интернет-журнал “Вестник научно-технического развития” (www.vntr.ru). 2010. № 9(37). С. 25–36.
11. Крупенин В.Л. Случайные вибрационные поля в оснащенных многомерных виброударных 2D-системах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 6. С. 21-28.
12. В.Л. Крупенин. К анализу неньютоновских виброударных процессов в трубных конструкциях и системах с параллельными ударными парами Интернет-журнал “Вестник научно-технического развития” (www.vntr.ru). 2015. № 11(99). С. 44-59.
13. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 5 С.13-30.
14. Krupenin V.L. Vibro-Impact Processes in Systems with Large Number Impact Pairs and Distributed Impact Elements // Dynamics of vibro-impact systems. Euromech Colloquium 386. September, 1998. Loughborough University, England, 1998.
15. Бабицкий В.Л., Веприк А.М., Крупенин В.Л. Виброударные эффекты при ограниченных колебаниях одномерной цепочки, упруго соединенных бусинок. // ДАН СССР. 1988. Т.3. № 3. 1988. С. 562-566.
16. Асташев В.К., Крупенин В.Л., Тресвятский А.Н. Экспериментальное исследование синхронизации ударов в распределенных системах с параллельными ударными парами // ДАН. 1996. т. 351. №1. С. 44 – 47.
17. Асташев В.К., Крупенин В.Л., Тресвятский А.Н. Экспериментальное исследование синхронизации ударов в распределенных системах с варьируемым числом ударных пар // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1996. № 2. С. 96 – 101.
18. Коловский М.З. О расчете нелинейных упругих амортизаторов с одной степенью свободы. // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. 1960. №4. С. 116-124.
19. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. - М.: Наука, 1980. -336 с.

20. Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: URSS. 2009. 544с.