

УДК 621.01:534.1

СКРЫТЫЙ ИСТОЧНИК ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛБАНИЙ В МЕХАНИЗМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ И УПРУГОДИССИПАТИВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна
Санкт-Петербург, Россия.
jvulf@yandex.ru

Аннотация. Применительно к задачам динамики механизмов с нелинейной функцией положения исследован класс колебательных систем с нелинейными упругодиссипативными характеристиками, в которых в явном виде отсутствуют источники параметрического возбуждения колебаний. Установлены скрытые источники параметрического возбуждения таких систем при силовом или кинематическом возбуждении, многочастотный спектр которых содержит медленные и быстрые компоненты. Для типовых колебательных режимов приведены результаты компьютерного моделирования.

Ключевые слова: колебания, механизмы, упругодиссипативные характеристики, динамическая устойчивость, параметрический резонанс, биения.

HIDDEN SOURCE OF PARAMETRIC EXCITATION OF VIBRATIONS IN MECHANISMS WITH NONLINEAR KINEMATICAL AND ELASTO-DISSIPATIVE CHARACTERISTICS

Iosif I. Vulfson

Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design
Russia, Saint-Petersburg.

Abstract. In the paper the class of vibration systems with nonlinear elasto-dissipative characteristics, which in an explicit form are free from sources of parametric excitation, are investigated in relation to the problems of dynamics in mechanisms with nonlinear position function. For such systems it was determined hidden sources of parametric excitation when exists the forced or kinematic excitation with multi-frequency spectrum that contains slow and fast components. For typical vibrational modes the results of computer simulation are considered.

Key words: vibrations, mechanisms, nonlinear elasto-dissipative characteristics, dynamic stability, parametric resonance, beats.

1. Вводные замечания.

В различных отраслях промышленности широко распространены машины, автоматические линии, робототехнические устройства и другое оборудование, включающие механизмы, трансформирующие исходное квазиравномерное вращение приводного двигателя в неравномерное (чаще всего периодическое) движение рабочих органов. В подобных случаях обычно используют так называемые цикловые механизмы, в которых реализуется нелинейная функция положения $\varphi_1 = \Pi(\varphi_0)$, осуществляющая преобразование «входной» координаты φ_0 в «выходную» координату φ_1 . Для идеального механизма, в котором отсутствуют зазоры и все звенья принимаются абсолютно жёсткими, $\varphi_0 = \varphi_* = \omega t$, где t – время;

$\omega = \text{const}$ – угловая скорость входного звена. Пусть $\varphi = \varphi_* + q$, где q – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях. Принимая во внимание, что функция положения идеального механизма непрерывна и дифференцируема, произведём линейризацию этой функции в окрестности программного движения: $\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)q$; здесь $\Pi' = d\Pi / d\varphi$ – первая геометрическая передаточная функция механизма (аналог скорости). Таким образом, практически без ущерба для точности нелинейная связь трансформирована в нестационарную.

Влияние нестационарных связей на виброактивность машин отражено в ряде монографий автора [1–4]. В работах [5 – 8] эта проблема получила дальнейшее развитие. В частности, с помощью метода условного осциллятора были установлены условия возбуждения параметрического резонанса для динамической модели циклового механизма, описываемой системой дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{a}(\varphi_*)\mathbf{q}'' + \mathbf{b}(\varphi_*)\mathbf{q}' + \mathbf{c}(\varphi_*)\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\varphi_*), \quad (1)$$

где $\mathbf{a}(\varphi_*)$, $\mathbf{b}(\varphi_*)$, $\mathbf{c}(\varphi_*)$ – матрицы инерционных, диссипативных и упругих коэффициентов, \mathbf{q} , \mathbf{Q} – векторы обобщённых координат и обобщённых сил, $(\quad)' = d / d\varphi_*$.

Сначала для облегчения дальнейшего изложения приведём краткий обзор полученных результатов по данной проблеме. Для большей наглядности уравнение (1) ниже конкретизировано на примере динамической модели механизма с одной степенью свободы:

$$J_1(1 + \mu\Pi_*'^2)\ddot{q} + R(q, \dot{q}) + 2\mu J_1\Pi_*'\Pi_*''\omega\dot{q} + c_1(1 + \zeta\Pi_*'^2)q = M(t)\Pi_*' - \mu J_1\Pi_*'\Pi_*''\omega^2. \quad (2)$$

Здесь $a(\varphi) = J_1(1 + \mu\Pi_*'^2)$, $c(\varphi) = c_1(1 + \zeta\Pi_*'^2)$ – приведенные к входному звену моменты инерции и коэффициенты жёсткости, где μ , ζ – коэффициенты приведения. (В частном случае $\mu = J_2 / J_1$, $\zeta = c_2 / c_1$; J_i, c_i – моменты инерции и коэффициенты жёсткости входного и выходного звеньев); $R(q, \dot{q}) \approx -b\dot{q}$ – диссипативная сила, соответствующая коэффициенту рассеяния ψ (подробнее см. ниже); $M(\varphi_*)$ – внешний момент, приложенный к выходному звену; $\Pi_*' = \Pi'(\varphi_*)$; $\Pi_*'' = \Pi''(\varphi_*)$.

Параметрические эффекты в рассматриваемой системе выявляются на основании однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + p^2(t)q = 0; \quad (3)$$

Здесь $p(t) = k\sqrt{(1 + \zeta\Pi_*'^2) / (1 + \mu\Pi_*'^2)}$; $n(t) = n_0(t) + n_h(t)$, где $k = \sqrt{c_1 / J_1}$; $n_0(t) = \delta p(t)$;

$\delta \approx \psi / (4\pi)$; $n_h(t) = \omega(da / d\varphi) / (2a)$; $a(\varphi) = J_1(1 + \mu\Pi_*'^2)$.

Функции n_0 и n_h описывают диссипативную и гироскопическую составляющие, а функция $p(t)$ – переменную «собственную» частоту.

Пусть $\Pi' = \Pi'_\omega + \Pi'_\nu$, где слагаемые соответствуют медленным и быстрым движениям. Для определённости примем $\Pi'(\varphi) = h[\sin\varphi + \varepsilon\sin(\nu\varphi + \gamma)]$; первое слагаемое отвечает «медленной», а второе – «быстрой» гармонике с частотой ν и глубиной пульсации ε . (Здесь и ниже звездочка при φ опускается.)

Структуре функции Π' соответствуют «медленные» и «быстрые» компоненты собственных частот. Как показано в работах [5 – 8] с помощью метода условного осциллятора, подавление параметрического возбуждения может быть достигнуто при

$$\vartheta = 2\pi\delta > \vartheta^* = \pi p_0^{-1} |a'/a + p'/p - p'_0/p_0|, \quad (4)$$

где ϑ – логарифмический декремент; p_0 – медленная составляющая переменной «собственной» частоты.

Поскольку $a(\varphi) = a(2\pi)$, работа этой составляющей за период $2\pi/\omega$ равна нулю, что свойственно гироскопическим силам. Следовательно, эта функция не влияет на пороговые условия возбуждения параметрического резонанса. Однако в пределах цикла возможны зоны, в которых амплитуда колебаний возрастает, т.е. $dA/d\varphi > 0$, что нередко приводит к существенным динамическим ошибкам при реализации программного движения.

На рис. 1,а для ряда типовых случаев приведены графики $p(\varphi)$ при $h = 1$; $\varepsilon = 0, 2$; $\nu = 7$. (Здесь и ниже использованы нормированные безразмерные частоты, отнесённые к ω , что соответствует переходу к безразмерному времени $\varphi = \omega t$. Практически это легко достигается заменой коэффициентов жесткости c_i на c_i/ω^2).

Отметим, что неравенство (4) совпадает с результатами, полученными на основании прямого метода Ляпунова, устанавливающего достаточное условие динамической устойчивости [1]. Весьма эффективным способом устранения возможности возбуждения параметрических резонансов является выполнение условия квазистационарности [6 – 8]. При реализации этого условия, «собственные» частоты в первом приближении, несмотря на переменность параметров системы, сохраняют постоянное значение и отсутствует рост амплитуд на интервале кинематического цикла. Для рассматриваемой системы условия квазистационарности удовлетворяются при $\mu = \zeta$ и $p = k = \text{const}$ (см. выше)

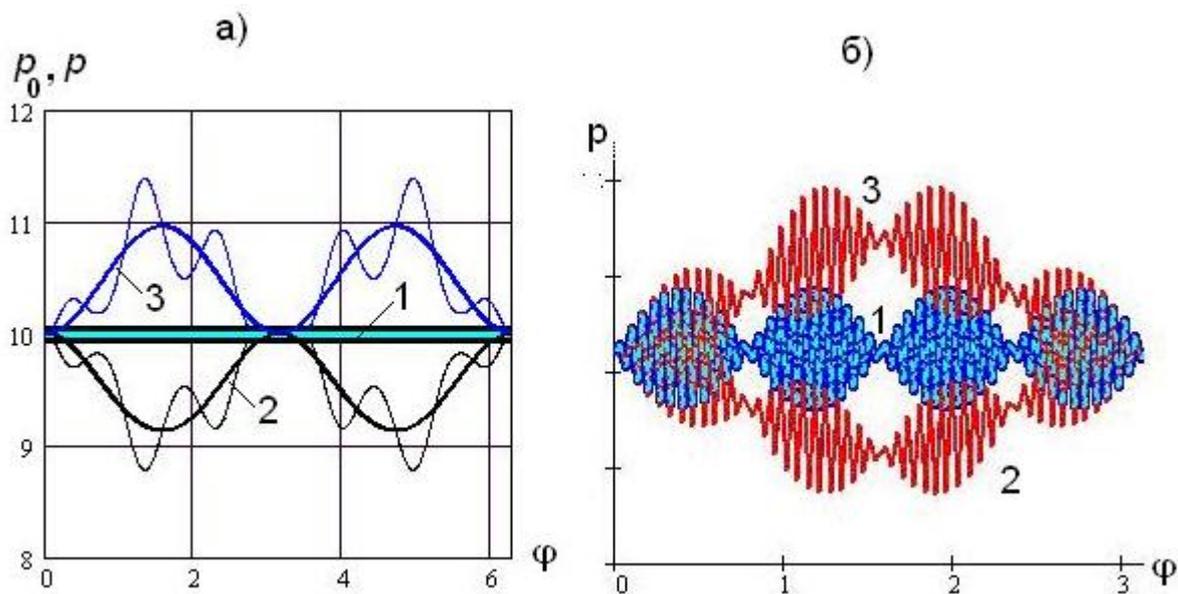


Рис.1. Типовые графики изменения «собственных» частот $p(\varphi)$: 1– $\mu = \zeta = 2$;
2. $\mu = 2, \zeta = 0$; 3 – $\mu = 0, \zeta = 2$.

Графики на рис. 1,а отвечают $\omega = \text{const}$, что соответствует идеальному двигателю. При высокочастотном возбуждении и учете динамической характеристики двигателя неравномерность движения входного звена может привести к появлению биений (рис.1,б). Эта задача несомненно представляет самостоятельный интерес, однако требует отдельного рассмотрения.

2. Динамические эффекты, вызванные нелинейностью упругодиссипативных характеристик

Одной из особенностей рассмотренных выше динамических эффектов является их независимость от возбуждаемых колебаний. Другими словами, параметры, формирующие колебательные режимы являются заданными и не зависят от колебаний, что позволяет чётко выявить источники возбуждения. При учёте нелинейностей это свойство не реализуется, и задача существенно усложняется. Отметим, что влияние нелинейностей, в первую очередь, связано с проблемой динамической устойчивости при совместном параметрическом и силовом возбуждении.

В общетеоретическом плане исследование подобных задач базируется на фундаментальных работах Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и ряда других известных учёных – математиков и механиков [9–13]. Однако процедура практического решения подобных задач на инженерном уровне далеко не элементарна и нуждается в дальнейшем совершенствовании, особенно, если иметь в виду реальные колебательные системы современных машин и механизмов. В прикладном плане здесь следует выделить монографии В.В.Болотина и Г. Шмидта [12,13]. При решении подобных задач используется метод гармонического баланса, причём силовое и параметрическое возбуждение обычно предполагается моногармоническим. Но даже при этом ограничении возникают режимы, при которых аналитическое исследование задачи отмеченным способом вызывает большие сложности, что, в частности, было отмечено В.В. Болотиным [12] в связи с анализом режима биений, возникающих в окрестности резонансных зон. В рассматриваемом случае подобные трудности особенно возрастают при совместном учёте быстрых и медленных движений, а также влияния нелинейностей, свойственных задачам динамики машин.

Сначала рассмотрим влияние нелинейности диссипативной силы. Заметим, что учет именно этих сил нередко оказывается наиболее уязвимым местом в динамических исследованиях и инженерных расчетах колебательных систем машин. Последнее, в первую очередь, связано с тем, что большое число диссипативных факторов, а также сложность и многообразие энергетических потерь при колебаниях существенно затрудняют корректное математическое описание диссипативных сил. При этом мы обычно располагаем ограниченной исходной информацией, заимствованной из экспериментальных материалов в форме некоторых интегральных диссипативных характеристик, таких как коэффициент рассеяния ψ или логарифмический декремент ϑ , которые получены при гармонических колебаниях некоторых эталонных моделей. Однако, «настраивая» реальную механическую систему на гармонический режим для определения этих параметров, мы, по существу, экспериментальным методом осуществляем гармоническую линеаризацию диссипативных сил. Поэтому полученная таким образом информация о диссипативных свойствах системы является далеко не полной и отражает их лишь в той мере, в какой гармонически линеаризованная диссипативная сила соответствует действительному сопротивлению. Естественно, при многочастотных колебаниях это соответствие нарушается, причём нередко – существенным образом.

Для систем с одной степенью свободы возникающая при колебаниях сила сопротивления R , независимо от ее природы, может быть описана следующим образом:

$$R = -|R(q, \dot{q})| \operatorname{sign} \dot{q}.$$

В одних случаях модуль силы не зависит от обобщенной скорости (позиционные силы трения), в других — модуль силы не зависит от обобщенной координаты («вязкое» трение); в частном случае модуль силы может сохранять постоянное значение (кулоново трение).

Аналитическое исследование проблемы учета нелинейных диссипативных сил при многочастотном возмущении основано на предложенной И.И. Блехманом идее разделения движений на быстрые и медленные [14]. При реализации этой идеи возможно несколько подходов. Один подход, разработанный И.И. Блехманом применительно к задачам вибрационной реологии, позволяет определять так называемые вибрационные силы, отражающие влияние высокочастотных составляющих возбуждения на медленные процессы.

При другом подходе движение системы рассматривается как совокупность двух движений, а именно, – существенно зависящих от диссипации (например, резонансных) и практически не зависящих от диссипации (например, нерезонансных, которые ниже условно названы «чужими»). Этот подход, базирующийся на методах гармонической или статистической линеаризации, был использован применительно к системам с сухим трением [15] и при позиционных гистерезисных силах сопротивления [2 – 4, 16, 17].

По характеру влияния диссипативных сил колебательные режимы можно разделить на две группы. К первой группе отнесем режимы, амплитудный уровень которых зависит от диссипации, такие как свободные колебания и вынужденные резонансные колебания; ко второй – режимы, существование которых возможно только при преодолении некоторого энергетического барьера, определяемого диссипацией. Такой эффект, в частности, наблюдается при возбуждении параметрического и субгармонического резонансов, а также в автоколебаниях при жестком возбуждении. При этом «чужие» колебания могут быть как высокочастотными (быстрое движение), так и низкочастотными (медленное движение).

Физические предпосылки анализируемого динамического эффекта связаны с возникновением так называемых частных петель гистерезиса, расположенных внутри петли, соответствующей колебаниям с основной частотой [2 – 4, 16, 17]. При условии, что частные петли замкнуты, их суммарная площадь пропорциональна работе сил сопротивления, осуществляемой за счет «чужого» движения. При этом эффективная площадь петли гистерезиса для исследуемого режима уменьшается, что проявляется в снижении приведенных диссипативных характеристик. Подчеркнем, что для появления частных петель и реализации исследуемого эффекта скорость обязательно должна менять свой знак на промежуточных участках контура основной петли.

С учетом вышеизложенного уточненная позиционная диссипативная сила, отнесенная к единице массы или момента инерции, может быть представлена как

$$f_1(q, \dot{q}) = -|f_0|u(|\dot{q}| - |v|)\text{sign}\dot{q}, \quad (5)$$

где в нашем случае $f_0 = R(q)/J_1$; u – единичная функция ($u = 1$ при $|\dot{q}| > |v|$ и $u = 0$ при $|\dot{q}| < |v|$); v – скорость, связанная с дополнительным движением («чужие» гармоники, переносное движение и т.п.).

На основании (5) эффективные значения диссипативных характеристик корректируются следующим образом [2–4, 16, 17]:

$$\psi = \psi_0\Phi, \quad \vartheta = \vartheta_0\Phi. \quad (6)$$

Здесь ψ_0, ϑ_0 – параметры диссипации, определенные при моногармонических колебаниях; $\Phi = \Phi(\lambda)$ – корректирующий диссипативный коэффициент, зависящий от отношения виброскоростей $\lambda = \max \dot{q} / \max v$ и формы петли гистерезиса. С некоторым запасом для типовых петель гистерезиса получаем

$$\Phi = \lambda(0,4 + 0,5\lambda) / (1 + 0,5\lambda^2). \quad (7)$$

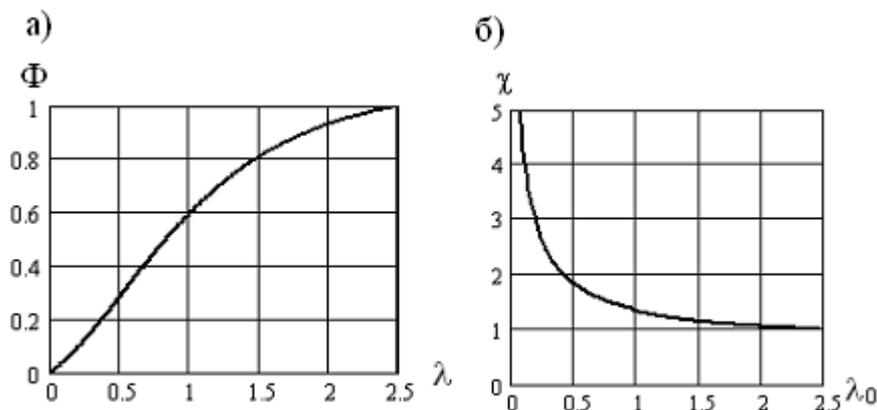


Рис. 2. Корректирующий диссипативный коэффициент (а) и коэффициент возрастания резонансной амплитуды (б) при высокочастотном возбуждении.

Функция Φ изменяется от нуля до единицы (рис. 2, а). При малых значениях λ функция $\Phi(\lambda)$ близка к линейной, т.е. пропорциональна амплитуде. Тогда, если при моногармоническом режиме коэффициент рассеяния Ψ_0 обратно пропорционален амплитуде, то $\psi = \Psi_0 \Phi = \text{const}$. Такая ситуация, в частности, возникает при кулоновом трении, когда при высокочастотном возбуждении происходит вибрационная линейзация этих сил [15].

При вынужденных колебаниях возрастание резонансной амплитуды, вызванное «чужими» колебаниями, на основании (4) определяется коэффициентом χ . Этот коэффициент является корнем уравнения $\chi = \Phi^{-1}(\chi \lambda_0)$, где λ_0 – отношение виброскоростей без учёта влияния «чужих» колебаний. На рис. 2, б приведен график функции $\chi(\lambda_0)$, полученный при использовании аппроксимирующей зависимости (7), определяющей функцию Φ . Обратимся к уравнению (1), которое дополним учётом нелинейных упругодиссипативных характеристик $f(q, \dot{q})$ и:

$$(1 + \mu \Pi_*'^2) \ddot{q} + f(q, \dot{q}) + k^2 (1 + \zeta \Pi_*'^2) P(q) = w \sin \omega t \cos \Omega t - 0,5 \mu \omega^2 \sin 2\omega t, \quad (8)$$

где $w(t) = M_* \cos(\Omega t) \Pi_*' / J_1$; M_*, Ω – амплитуда и частота момента, приложенного к выходному звену (см. рис.1).

Таким образом, колебательная система подвержена бигармоническому возбуждению при $\Omega \gg \omega$. В уравнении (8) опущена гироскопическая составляющая, пропорциональная \dot{q} , работа которой за период $2\pi/\omega$ обращается в нуль.

В отмеченных выше работах обычно задавалось вязкое трение и не учитывалось влияние высокочастотных колебаний на диссипативные силы ($w=0$). Случай $w \neq 0$ при вязком трении исследован в работе [15]. Здесь эта задача исследуется при учете нелинейных позиционных диссипативных сил, описываемых зависимостью (5).

Пусть $\Pi' = h \sin \varphi$, $\Pi'' = h \cos \varphi$, а нелинейная восстанавливающая сила отвечает муфте с кубической характеристикой. Тогда $P(q) = q(1 + \beta q^2)$, а «собственная» частота после гармонической линейзации равна

$$p(\varphi, A) = k \sqrt{(1 + \zeta \Pi_*'^2) ((1 + 0,75 \beta A^2) / (1 + \mu \Pi_*'^2))}. \quad (9)$$

Коэффициент β зависит от конкретных условий задачи и определяет нелинейный характер динамического процесса. На рис.3 приведены типовые амплитудно-частотные характеристики.

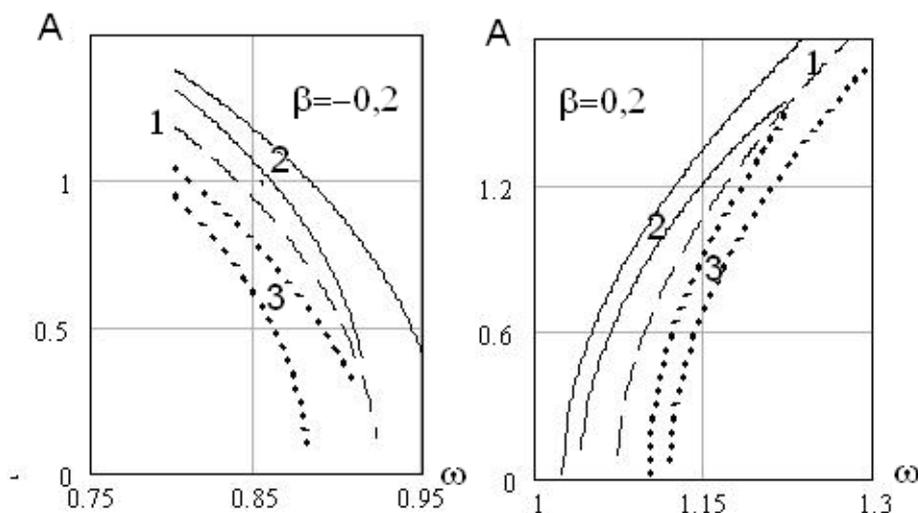


Рис.3. Амплитудно-частотные характеристики: 1.– скелетная кривая; 2– устойчивый режим; 3 – неустойчивый режим.

Далее, остановимся на анализе некоторых результатов компьютерного моделирования, проведённого на основании уравнения (8). Для более чёткого выявления динамических эффектов, связанных с амплитудной модуляцией вынуждающей силы, примем в (8) $\mu \ll 1$, $\zeta \ll 1$, что соответствует условию квазистационарности (см. выше). При этом нестационарная связь в явном виде отсутствует и, на первый взгляд, параметрических эффектов ожидать не следует. Тем не менее, анализ результатов компьютерного моделирования свидетельствует об экспоненциальном характере увеличения амплитуд, что свойственно параметрическому возбуждению (рис.4). При отсутствии нелинейностей этот эффект отсутствует. Таким образом, *источник параметрического возбуждения в данном случае оказался скрытым* (подробнее см. ниже).

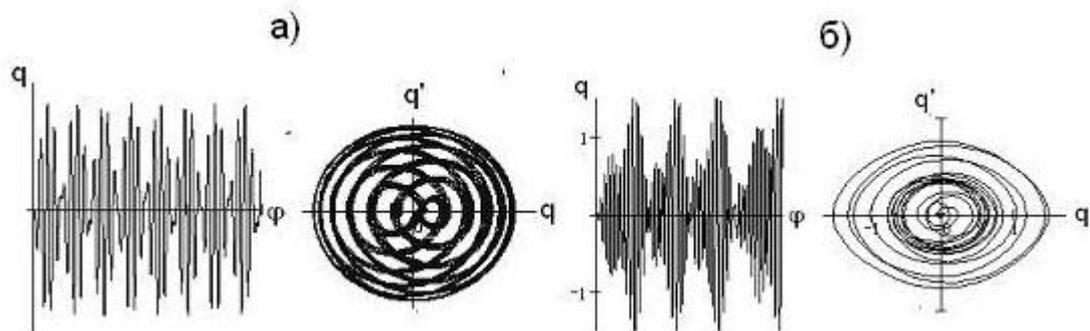


Рис.4. Типовые режимы при учёте нелинейных упругодиссипативных характеристик

Режим, показанный на рис.4,а, интересен периодической повторяемостью нескольких амплитудных уровней, что очень четко проявляется на фазовом портрете. Рис 4,б иллюстрирует два, на первый взгляд, совпадающих режима на границе потери устойчивости. (Ввиду почти совпадающего изображения оно не продублировано). Первый из них – без учёта нелинейности диссипативной силы, соответствует пороговому значению диссипативного коэффициента $\mathcal{D}_0^* = 0,17$, а второй режим – при учёте нелинейности и дополнительного высокочастотного возбуждения с частотой Ω , – $\mathcal{D}_0^* = 0,94$. Таким образом, пороговый уровень диссипации при учете (5) увеличился весьма существенно – примерно в 5,5 раз.

На рис.5 показан близкий к параметрическому возбуждению режим, подтверждающий роль нелинейности упругой характеристики, учет которой привел к локальным нару-

шениям динамической устойчивости. При этом возрастание амплитуд чередуется со срывами, образуя режим интенсивных биений ($\beta = -0,25$, линии 1). Срывы колебаний возникают из-за низкочастотной компоненты переменной «собственной» частоты, что приводит к «плавающим» значению «собственной» частоты и к периодическим пересечениям границ области устойчивости. В то же время, при $\beta = 0$ (отсутствие нелинейности) колебания практически подавлены (линии 2).

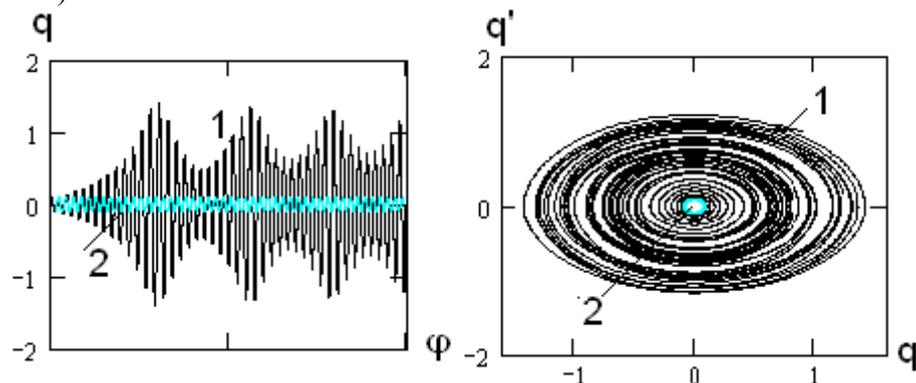


Рис.5 . Сопоставление колебательных режимов

Графики $q(\varphi)$, приведенные на рис.4 и 5, качественно близки экспериментальным результатам, приведенным в монографии В.В. Болотина при анализе биений, сопутствующих параметрическим колебаниям с учетом нелинейностей [12].

Приведенные выше графики соответствуют нулевым начальным условиям и не отражают эффект затягивания. Причиной возникновения этого эффекта в данном случае обычно являются вынужденные колебания. На рис.6,а показано влияние на эффект затягивания резонансного режима, амплитуда которого зависит от логарифмического декремента ϑ . При относительно больших значениях ϑ система выходит на установившийся режим вынужденных колебаний (линии 1). При малых значениях ϑ переходный процесс выхода на установившийся режим завершается потерей устойчивости и затягиванием в зону повышенных амплитуд. Аналогичная картина наблюдается при изменении фазовых сдвигов γ между силовым и параметрическим возбуждением (рис.6,б) [2 – 4]. В этом случае при $\gamma = \pi/2$ и определенном уровне диссипации на начальном этапе также частично реализуется режим силового резонанса, который далее перекрывается экспоненциальным нарастанием амплитуд, свойственным параметрическому резонансу (линии 3). При тех же исходных данных и $\gamma = 0$ (линии 4) условия динамической устойчивости могут оказаться нарушенными уже при $t \approx 0$.

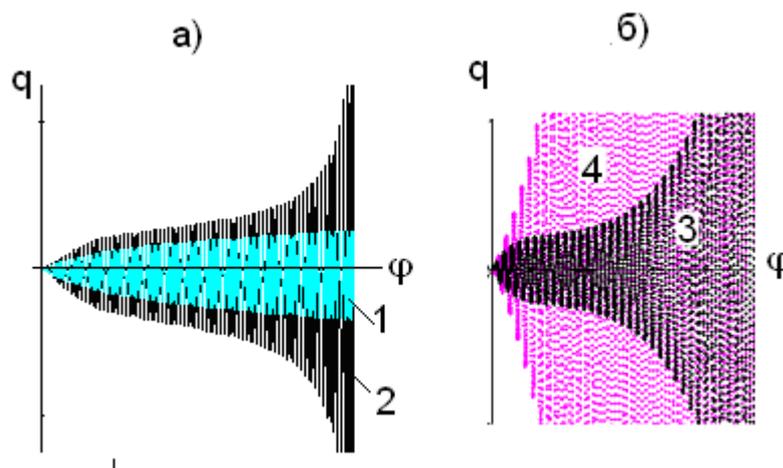


Рис.6. К анализу режима затягивания: 1 – $\vartheta = 0,44$; 2 – $\vartheta = 0,22$; 3 – $\gamma = \pi/2$; 4 – $\gamma = 0$

3. Возбуждение низкочастотных резонансов на частоте биений

В связи с исследуемой проблемой несомненный интерес представляет выявленный М.З. Коловским динамический эффект, который состоит в том, что при определенных условиях возможно низкочастотное резонансное возбуждение на частоте биений, возникающих при высокочастотной амплитудной модуляции [15]. Применительно к задачам динамики машин этот эффект частично рассмотрен в работах [3, 4, 18]. Воспользовавшись применительно к данной задаче методом выделения медленных движений, приведенным в работе [15], можно показать, что нелинейная составляющая восстанавливающей силы описывается зависимостью

$$P(q) = k^2[1 + 1,5\beta h(\omega^2 / \Omega^2) \sin^2 \varphi + \beta q^2]q. \quad (10)$$

Графики на рис. 7 показывают, как нелинейность упругой характеристики преобразует исходный режим биений (рис. 7,а; $\beta = 0$) . При $\beta \neq 0$ колебания приобретают бигармонический характер (рис.7,б). На графике (рис.7,в) в колебаниях отфильтрована высшая гармоника.

Остановимся на физической природе исследуемого эффекта и, в частности, установим, почему низкочастотные резонансные колебания возможны лишь в нелинейной системе. Согласно уравнению (8), вынуждающая сила пропорциональна

$$\sin \omega t \cos \Omega t = 0,5[\sin(\omega + \Omega)t + \sin(\Omega - \omega)t]. \quad (11)$$

Таким образом, на систему действуют две вынуждающие силы с близкими частотами.

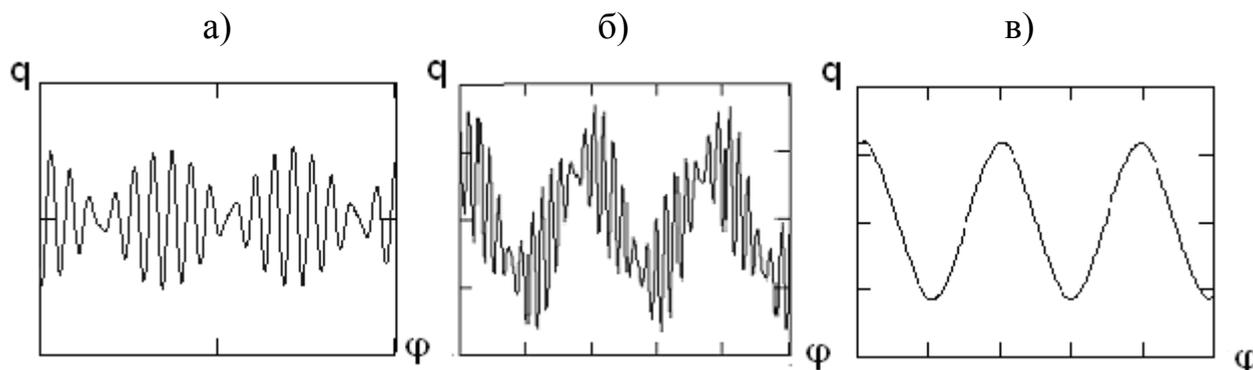


Рис. 7. Трансформация режима биений: а) $\beta = 0$; б) $\beta = -0,25$ при бигармонических колебаниях; в) $\beta = -0,25$ – низкочастотный режим

При отсутствии нелинейности ($\beta = 0$) справедлив принцип суперпозиции, поэтому при $\Omega \gg \omega$ предпосылки для возникновения резонанса на низких частотах отсутствуют. Функцию (11) можно рассматривать как низкочастотное возбуждение с высокочастотной амплитудной модуляцией (см. рис.7,б), глубина пульсации которой пропорциональна $|\cos \Omega t|$. Это при нелинейной функции $P(q)$ приводит к пульсации собственной частоты $p(A)$, что, в свою очередь, создаёт ситуацию, близкую к параметрическому возбуждению. В инженерной практике нелинейность восстанавливающей силы нередко обусловлена наличием зазоров или натяга [3, 4, 15, 18]. На рис.8 приведен график резонансного режима на частоте биений, полученный компьютерным моделированием уравнения (8). Как и при субгармонических резонансах, основная роль диссипации в данном случае состоит в образовании энергетического барьера, препятствующего возникновению этих режимов.

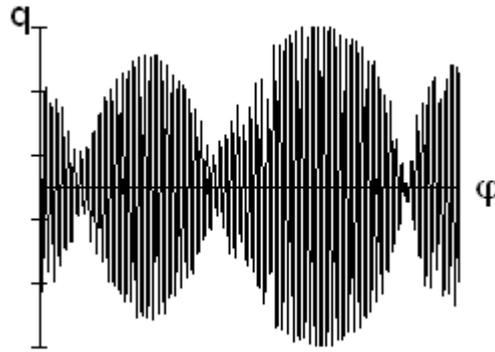


Рис.8. Возбуждение резонанса на частоте биений

В заключение отметим, что применительно к задачам динамики машин аналитическое исследование этой проблемы нуждается в дальнейшем развитии и отдельном рассмотрении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вульфсон И.И. Динамические расчёты цикловых механизмов. – Л.: Машиностроение. 1976. – 328 с.
2. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
3. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин. – СПб.: Политехника, 2013. – 425 с.
4. Vulfson, I. Dynamics of Cyclic Machines. – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. – 410 p.
5. Вульфсон И.И. К проблеме динамической устойчивости многосекционных технологических машин в окрестности программного движения исполнительных органов. – Теория механизмов и машин. 2006. №2(8).– С. 7-12.
6. Вульфсон И.И. Условия динамической устойчивости при совместном учете медленных и быстрых движений. // Вестник научно-технического развития. №3(91), 2015. – С. 3 –13.
7. Вульфсон И.И. К проблеме квазистационарности динамических характеристик цикловых механизмов //Теория механизмов и машин. 2015. № 1. С. 6 – 15.
8. Vulfson I.I. Quasistationarity of Dynamic Modes in Cyclic Mechanisms Forming Rheonomic Oscillating Systems with Lattice Structure // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Vol. 44. No. 4. Pp. 312–318.
9. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. – М.: Наука, 1964. – 432 с.
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
11. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
12. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 600 с.
13. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М.: Мир. 1978. – 336 с.
14. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. – СПб: Изд. дом «Руда и Металлы», 2013. – 639 с.
15. Коловский М.З. О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейной системе // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. № 226. М., Л.: Машгиз, 1963.– С. 7–17.
16. Вульфсон И.И. Влияние низкочастотных колебаний на нелинейные диссипативные силы // Изв. вузов «Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн». 2012. № 4. Т. 20. – С. 1–15.

17. Vulfson I.I. Some Nonlinear Effects of Machine Dynamics// Journal of Vibroengineering. 2008. Vol. 10, No. 4 .– Pp. 442–450.
18. Вульфсон И.И. Нелинейные резонансные колебания привода на частоте амплитудной модуляции высокочастотного возбуждения // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2005. № 6. – С. 17–22.