УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛАНАРНЫХ И ИЗГИБНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ПЛАСТИНЕ С ТОЧЕЧНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

© Мелс Вагаршакович Белубекян[1], Владимир Иванович Ерофеев[2], Ашот Вазгенович Шекоян[1]
[1]*Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, Ереван, Армения*
[2]*Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия*
erf04@sinn.ru

Аннотация. *В линейной постановке приводится двумерная самосогласованная задача о распространении упругих волн в пластине с учетом ее взаимодействия с точечными дефектами, имеющимися в ее материале. Изучается влияние точечных дефектов на законы дисперсии планарных и изгибных упругих волн.*
Ключевые слова: *упругие волны, пластина, точечные дефекты.*

PLANAR AND BENDING ELASTIC WAVES PROPAGATING IN THE PLATE WITH POINT DEFECTS

© M.V. Belubekyan [1], V.I.Erofeev[2], A.V. Shekoyan[1]
[1]*Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia*
[2]*Mechanical Engineering Research Institite, Russian Academy of Sciences,* Nizhny Novgorod, Russia
erf04@sinn.ru

Abstract. *In the linear formulation a two-dimensional self-consistent problem of the propagation of elastic waves in the plate, taking into account its interaction with point defects present in its material is provided. We study the effect of point defects on the dispersion laws of planar and bending elastic waves.*
Keywords: *elastic waves, plate, point defects.*

Введение

С 80-х годов прошлого века интенсивно изучается влияние излучения (в том числе, лазерного) на материалы. Теоретически и экспериментально было показано, что под воздействием лазерного луча в материалах образуются многочисленные точечные дефекты (вакансии, межузельные атомы), создающие в поверхностном слое напряженно-деформированное состояние [1]. Поверхностный слой моделируется тонкой упругой пластиной, совершающей планарные или изгибные колебания, взаимодействующей при этом с точечными дефектами [2-6]. Двумерные уравнения колебаний пластин получаются из трехмерных уравнений теории упругости путем применения гипотезы Кирхгофа [7]. Вопрос же о способе получения двумерных кинетических уравнений для точечных дефектов, как правило, обходится молчанием.

Для получения двумерных кинетических уравнений, описывающих поведение точечных дефектов можно воспользоваться двумя способами. В первом случае можно предположить, что точечные дефекты по толщине пластины меняются по линейному закону. Однако экспериментально подтвердить эту гипотезу невозможно. Поэтому более правильно, на наш взгляд, исходить из значений о количестве точечных дефектов на границах пластины, которые экспериментально можно измерить.

Целью публикуемой работы является постановка и исследование самосогласованной задачи о распространении упругих волн в пластине с учетом их взаимодействия с точечными дефектами, имеющимися в ее материале.

Постановка задачи и основные уравнения

В трехмерном случае линейная система уравнений, описывающая вышеуказанный процесс, имеет вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{n}_1}{\partial \mathrm{t}}=\mathrm{q}_{01}+\mathrm{q}_{\varepsilon}\varepsilon_{\mathrm{kk}}+\mathrm{D}_1\Delta\mathrm{n}_1-\alpha_{11}\mathrm{n}_1-\alpha_{12}\mathrm{n}_2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{n}_2}{\partial \mathrm{t}}=\mathrm{q}_{02}+\mathrm{q}_{\varepsilon}\varepsilon_{\mathrm{kk}}+\mathrm{D}_2\Delta\mathrm{n}_1-\alpha_{11}\mathrm{n}_1-\alpha_{12}\mathrm{n}_2 \tag{3}$$

Обозначения общепринятые [1,8], ε_{kk} - объемная деформация , $\varepsilon_{kk}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$, ε_{ik} - деформации, $q_{01}\, u\ q_{02}$ темп генераций дефектов до возмущения, которые, не теряя общности, можно принять $q_{01}=q_{02}=0$.

Граничные условия следующие:

$$\text{при}\quad z=h\qquad n_1^+=n_1(x,y,h,t),\quad n_2^+=n_2(x,y,h,t), \tag{4}$$

$$z=-h\qquad n_1^-=n_1(x,y,-h,t),\quad n_2^-=n_2(x,y,-h,t), \tag{5}$$

$$\text{при}\quad z=\pm h,\ \ \sigma_{32}=\sigma_{31}=\sigma_{33}=0. \tag{6}$$

Для простоты записи координаты x_1,x_2,x_3 заменены на x,y,z соответственно. По аналогии с задачами термоупругости (см., например, [9]), для точечных дефектов принитмаются следующие приближения

$$n_1=n_{11}+n_{12}z,\ \ n_2=n_{21}+n_{22}z \tag{7}$$

где $n_{11}=\dfrac{n_1^+ + n_1^-}{2},\ n_{12}=\dfrac{n_1^+ - n_1^-}{2},\ n_{21}=\dfrac{n_2^+ + n_2^-}{2},\ n_{22}=\dfrac{n_2^+ - n_2^-}{2}.$

В теории Кирхгофа принимают, что перемещения пластинки имеют вид:

$$u_1=u-z\frac{\partial w}{\partial x},\ u_2=\nu-z\frac{\partial w}{\partial y},\ u_3=w \tag{8}$$

где функции u,ν,w не зависят от координаты z.

Подобно тому, как это делается в теории пластин и оболочек, можно получить для планарных колебаний пластин и оболочек уравнение для u,ν и γ_i, имеющее следующий вид:

$$\Delta_2 u+\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)-\alpha\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}=C_1^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9}$$

$$\Delta_2 \nu+\theta\frac{\partial}{\partial xy}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)-\alpha\frac{\partial\gamma_1}{\partial y}=C_1^{-2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} \tag{10}$$

А для изгибных колебаний получается

$$D\Delta^2 w+D\Delta_2\gamma_2+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{11}$$

Где

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,,\quad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,,\; C_1^2 = \frac{E}{2(1+\nu)\rho}\,,\; \alpha = \frac{2\theta(1-2\nu)}{E}\,,$$

$$\gamma_1 = d_1 n_{11} + d_2 n_{21}\,,\; D = \frac{2Eh^3}{(1-\nu)^2}\,,\; \gamma_2 = d_1 n_{12} + d_2 n_{22}\,,$$

$$\Delta_2^2 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\,,$$

$\nu-$ коэффициент Пуассона, $E-$ модуль Юнга.

Процедуру осреднения можно применить также для кинетических уравнений (2) и (3). Выражения для n_1 и n_2 из (7), а также ε_{kk} подставляются в уравнения (2) и (3). По теории Кирхгофа ε_{kk} имеет вид:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - z\Delta_2 w\right) + E_0^{-1}(\gamma_1 + z\gamma_2)$$

После подстановки и приравнения нулю коэффициенты при z^0 и z получаются следующие уравнения:

Из (2) и (3) при z^0 дают

$$\frac{\partial n_{11}}{\partial t} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} q_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + D_1 \Delta_2 n_{11} - q_{11} n_{11} - q_{12} n_{21} \tag{12}$$

$$\frac{\partial n_{12}}{\partial t} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} q_\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + D_2 \Delta_2 n_{21} - q_{21} n_{11} - q_{22} n_{21}\,, \tag{13}$$

а при z

$$\frac{\partial n_{12}}{\partial t} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} q_2 \Delta_2 w + D_1 \Delta_2 n_{12} - q_{11} n_{12} - q_{12} n_{22} \tag{14}$$

$$\frac{\partial n_{22}}{\partial t} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu} q_\varepsilon \Delta_2 w + D_2 \Delta_2 n_{22} - q_{21} n_{12} - q_{22} n_{22}\,, \tag{15}$$

где $q_{11} = q_\varepsilon E_0^{-1} d_1 - \alpha_{11}$, $q_{12} = q_\varepsilon E_0^{-1} d_2 - \alpha_{12}$, $q_{21} = q_\varepsilon E_0^{-1} d_1 - \alpha_{21}$, $q_{22} = q_\varepsilon E_0^{-1} d_2 - \alpha_{22}$.

Уравнения (9), (10), (12), (13) определяют планарные колебания пластины с учетом ее взаимодействия с точечными дефектами, а уравнение (11), (14), (15) - изгибные колебания пластины.

Для одномерных колебаний $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0\right)$, получаются следующие уравнения планарных колебаний

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} - \frac{(1-\upsilon)(1-2\upsilon)}{\mathrm{E}} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{c_e}^2 \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}^2} \\
\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \mathrm{x}^2} = \mathrm{c_t}^{-2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \mathrm{t}^2},\; \mathrm{c_e}^2 = \frac{\mathrm{E}}{(1-\upsilon^2)\rho} \\
\frac{\partial \mathrm{n}_{11}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon} \mathrm{q}_\varepsilon \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{D}_1 \frac{\partial^2 \mathrm{n}_{11}}{\partial \mathrm{x}^2} - \mathrm{q}_{11}\mathrm{n}_{11} - \mathrm{q}_{12}\mathrm{n}_{21} \\
\frac{\partial \mathrm{n}_{21}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon} \mathrm{q}_\varepsilon \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{D}_2 \frac{\partial^2 \mathrm{n}_{21}}{\partial \mathrm{x}^2} - \mathrm{q}_{21}\mathrm{n}_{11} - \mathrm{q}_{22}\mathrm{n}_{21} \\
\gamma_1 = \mathrm{d}_1 \mathrm{n}_{11} + \mathrm{d}_2 \mathrm{n}_{21},
\end{gathered} \tag{16}$$

а для изгибных колебания

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\frac{\partial^4 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}^4}+\mathrm{D}_*\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}\left(\mathrm{d}_1\mathrm{n}_{12}+\mathrm{d}_2\mathrm{n}_{22}\right)+2\rho\mathrm{h}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}^2}=0\\
&\frac{\partial \mathrm{n}_{12}}{\partial \mathrm{t}}=-\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\mathrm{q}_\varepsilon\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}^2}+\mathrm{D}_1\frac{\partial^2 \mathrm{n}_{12}}{\partial \mathrm{x}^2}-\mathrm{q}_{11}\mathrm{n}_{12}-\mathrm{q}_{12}\mathrm{n}_{22}\\
&\frac{\partial \mathrm{n}_{22}}{\partial \mathrm{t}}=-\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\mathrm{q}_\varepsilon\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}^2}+\mathrm{D}_2\frac{\partial^2 \mathrm{n}_{22}}{\partial \mathrm{x}^2}-\mathrm{q}_{21}\mathrm{n}_{12}-\mathrm{q}_{22}\mathrm{n}_{22}
\end{aligned} \tag{17}$$

Распространение одномерных планарных упруго–вакансионных волн

Из системы (16) следует, что сдвиговые волны (v) не взаимодействует с вакансиями и межузельными атомами. Для продольных упругих волн решение представляется в виде

$$\begin{aligned}
&u=A\exp i\left(\omega t-kx\right)\\
&n_{11}=B\exp i\left(\omega t-kx\right),\quad n_{21}=C\exp i\left(\omega t-kx\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

Подстановка (18) в первое, третье и четвертое уравнения системы (16) приводит к следующей системе алгебрических уравнений относительно произвольных постоянных $A,\ B,\ C$

$$\begin{aligned}
&\left(\omega^2-k^2C_l^2\right)A+i\alpha kC_l^2\left(d_1B+d_2C\right)=0\\
&\beta q_\varepsilon A+\left(\frac{\omega}{k}-iD_1k-i\frac{q_{11}}{k}q\right)B+i\frac{q_{12}}{k}C=0\\
&\beta q_\varepsilon A+i\frac{q_{21}}{k}B+\left(\frac{\omega}{k}-iD_2k-i\frac{q_{22}}{k}\right)=0
\end{aligned} \tag{19}$$

В (19) приняты обозначение

$$\alpha=\frac{(1-v)(1-2v)}{E},\quad \beta=\frac{1-2v}{1-v} \tag{20}$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (19) приводит к уравнению, определяющему фазовую скорость волны

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega^4}{k^4}-i\left(F_1+F_2\right)\frac{\omega^3}{k^4}-\left(C_l^2+\frac{F_1F_2}{k^2}-\frac{q_{12}q_{21}}{k^2}\right)\frac{\omega^2}{k^2}+\\
&+iC_l^2\left[F_1+F_2-\alpha\beta q_\varepsilon\left(d_1+d_2\right)\right]\frac{\omega}{k^2}-\frac{C_l^2}{k^2}\left[q_{12}q_{21}-\right.\\
&\left.-F_1F_2-\alpha\beta q_\varepsilon\left(q_{12}d_1+q_{21}d_2+d_2F_1+d_1F_2\right)\right]=0
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$F_1=D_1k^2+q_{11},\quad F_2=D_2k^2+q_{22} \tag{22}$$

Из (21) следует, что упругие колебание и вакансионные (межузлевые) колебания не взаимодействуют в трех случаях

а) $v=0,5$ либо б) $q_\varepsilon=0$ либо в) $d_1=d_2=0$ (23)

При условиях (23) уравнение (21) приводится к виду

$$\left(\frac{\omega^2}{k^2}-C_l^2\right)\left[\omega^2-i\left(F_1+F_2\right)\omega-F_1F_2+q_{12}q_{21}\right]=0 \tag{24}$$

В первых двух равенствах в (21), когда $q_\varepsilon=0$ или $v=0,5$ а $d_1\neq 0,\ \ d_2\neq 0$, означает, что деффекты не чувствуют волну, а в слое, как видно из (24) распространяется две волны, первая волна распространяется со скоростью C_l, а частота второй волны определяется из второго сомножителя в (24). вторая волна затухает, если выполняется неравенство

$$F_1F_2\geq q_{12}q_{21}. \tag{25}$$

При обратном неравенстве (25) амплитуда колебаний будет неограниченно возрастать. В этом случае линейная теория не годится, нужно учитывать нелинейные члены в уравнениях (16).

Когда $d_1 = d_2 = 0$, а $q_\varepsilon \neq 0$ и $\nu \neq 0{,}5$, то дефекты чувствуют волну, но волна не замечает их. В этом случае второй сомножитель в (24) описывает процесс увеличивания или уменьшения количество дефектов и все вышесказанные остается в силе

$$q_1 - q > 0 . \qquad (26)$$

Рассмотрим общий случай, когда все коэффициенты отличны от нуля, однако влияние дефектов на упругую волну слабо.

Для планарных колебаний пластины решение ищем в виде (18), тогда получим систему уравнений (19). Дисперсионное уравнение удобно представить в следующем виде:

$$\omega^2 C_l^{-1} - k^2 = -k^2 \frac{\phi_1 + i\alpha\beta\omega\left(d_1 + d_2\right)}{\phi_2 + i\phi_3}, \qquad (27)$$

где

$$\phi_1 = -\alpha\beta\left[\left(d_1 q_{12} + d_2 q_{21}\right) - F_1 d_2 - d_1 F_2\right]$$

$$\phi_2 = -\omega_0^2 + D_1 D_2 k^2 + D_1 k^2 q_{22} - q_{11} k^2 D_2 + q_{11}\alpha_{22} + q_{12}\alpha_{21}$$

$$\phi_3 = \omega\left[k^2\left(D_2 + D_1\right) + q_{11} + q_{22}\right]$$

Частота является комплексной величиной, т.е. $\omega = \omega_0 + \omega_1 + i\alpha_{11}$, ω_1 –малая дисперсия, α_1 –малый коэиффициент поглащения, а ω_0 –основная частота, $\omega_0 = kC_l$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2\left[1 - \frac{\phi_1\phi_2 - \alpha\beta\omega\phi_3\left(d_1 + d_2\right)}{\phi_2^2 + \phi_3^2}\right]$$

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha\beta\omega_0\phi_2\left(d_1 + d_2\right) - \phi_1\phi_3}{2\left(\phi_2^2 + \phi_3^2\right)}$$

В том случае, когда в пластине распространяются изгибные волны, описываемые уравнениями (17), решение ищем в виде (18). Тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$\frac{Dk^2}{2\rho h} - \omega^2 = -2k^4\beta D_* h\rho \frac{T_1 + i\omega\left(d_2 + d_1\right)}{T_2 + i\omega\left(F_1 + F_2\right)} \qquad (28)$$

Если $q_{11} = q_{22} = D_1 = D_2 = q_{12} = q_{21} = d_1 = d_2 = 0$ то $\omega_0^2 = \dfrac{D}{2\rho h}k^2 = v_0 k^2$

Здесь $T_1 = d_2 F_1 + d_1 F_2 - q_{21} d_2 - d_1 q_{12}$, $T_2 = F_1 F_2 - \alpha_0\omega^2 - q_{21} q_{12}$,

$$\omega_1^2 = \omega_0^2\left[1 - \frac{k^2\beta D_*}{D}\frac{T_1 T_2 + \omega_0^2\left(d_1 + d_2\right)\left(F_1 + F_2\right)}{T_2^2 + \omega_0^2\left(F_1 + F_2\right)^2}\right], \quad \alpha = \frac{k^4\beta D}{4\rho h}\frac{\left[T_2\left(d_1 + d_2\right) - T_1\left(F_1 + F_2\right)\right]}{\left[T_2^2 + \omega_0^2\left(F_1 + F_2\right)^2\right]} .$$

При выполнении работы один из авторов (Ерофеев В.И.) получал поддержку Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 15-08-01836).

Список литературы

1. *Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А.* Лазерное управление процессами в твердых телах // Успехи физических наук. 1996. Т.166. № 1. С. 3-32.
2. *Emel'yanov V.I., Uvarova I.F.* Laser-induced electron-deformation-thermal instability and semiconductor-metal phase transition involving superstructure formation // Sov. Phys. JETP. 1988. Vol. 67. No 2(8). P. 1662-1670.

3. *Емельянов В.И., Сумбатов А.А.* Кристаллизационно-деформационно-тепловая неустойчивость и формирование упорядоченных структур при лазерной кристаллизации // Поверхность, физика, химия, механика. 1988. № 7. С.122-127.
4. *Емельянов В.И., Уварова И.Ф.* Вакансионно-деформационная неустойчивость в формировании упорядоченных структур при нагреве тонких металлических пленок // Металлофизика. 1989. Т.11. № 5. С.101-106.
5. *Мирзоев Ф.Х., Емельянов В.И., Шелепин Л.А.* О механизмах образования упорядоченных структур дефектов при воздействии концентраторов потоков энергии // Квантовая электроника. 1994. № 8. С.769-778.
6. *Мирзоев Ф.Х., Шелепин Л.А.* Нелинейные волны деформации и плотности дефектов в металлических пластинах при воздействии внешних потоков энергии // Журнал технической физики. 2001. Т.71. № 8. С. 23-26.
7. Вибрации в технике. Справочник. Т.1. М.: Машиностроение, 1978.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.
9. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962.