

УДК 62-185.7

ДВУМЕРНОЕ ПОВЕРХНОСТНОЕ ДВИЖЕНИЕ СИНХРОННО И АСИНХРОННО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ВНУТРИ РОТОРА С РАДИАЛЬНЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

Ольга Владимировна Бармина, Андрей Николаевич Никифоров,
Николай Алексеевич Татусь

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук
(ИМАШ РАН, г. Москва, Россия)
n.andre@mail.ru

Аннотация. В работе обсуждаются частоты плоских собственных колебаний (волн), распространяющихся по невязкой, несжимаемой жидкости, частично и равно заполняющей одинаковые отсеки в роторе, имеющем цилиндрическую полость, сплошные радиальные перегородки и постоянную скорость вращения. Решения в общем виде заслуживают внимания разработчиков роторных машин, функционирующих с жидкостью, в которых явление волнового резонанса необходимо устранить или наоборот использовать.

Ключевые слова: Ротор, жидкость, волновые частоты.

Two-Dimensional Surface Motion of Fluid Rotating Synchronously and Asynchronously inside Rotor with Radial Baffles

Ol'ga Barmina, Andrey Nikiforov, Nikolay Tatus'
The Blagonravov Institute of Machine Science at the Russian Academy of Sciences
Moscow, Russia

Абстракт. The paper shows frequencies of plane natural oscillations (waves) propagating on the inviscid and incompressible fluid filling partially and equally a cylindrical cavity of rotor with solid radial baffles at the constant speed of rotation. Analytical solutions deserve attention for the engineering of rotor machines containing liquid when the phenomenon of wave resonant must be removed or used.

Keywords: Rotor, fluid, liquid, wave frequencies.

Введение

В центрифугах, в сепараторах и во вращающихся ракетах с жидким содержимым может наступать так называемый волновой резонанс [1]. Когда частота прецессии ротора достигает любой из частот бесчисленных форм собственных колебаний жидкости, в ней и на её свободной поверхности (при наличии) возникают волны, распространяющиеся относительно ротора.

С другой стороны вращение жидкой массы и всякое её относительное (ротора) движение создаёт гидродинамическое давление на ротор, влияющее, как возмущающая сила, на его амплитуду и частоту прецессии, а также на его критические скорости и границы устойчивого вращения. Это влияние сравнительно мало в случаях неполного смачивания боковой стенки роторной полости (по её окружности), но оказывается неожиданно большим, когда боковая стенка остается полностью смоченной при сформировавшемся радиусе прецессии ротора.

Вне диапазона волнового резонанса жидкость со свободной поверхностью изменяет вибрационные характеристики ротора так, как если бы полость была целиком заполнена жидкостью, даже тогда когда она заполняет только малую часть объема полости [2]. При волновом резонансе жидкости со свободной поверхностью и вращении ротора с

закритической скоростью может возникать «замкнутый круг» – волны раскачивают ротор, а ротор повышает волны. Прежде всего, система теряет устойчивость в условиях волнообразования первого порядка и отсутствия перегородок (рис.1,а), так как формируется неуравновешенная конфигурация жидкости, перемещающаяся относительно ротора [3].

Размещение в полости ротора радиальных перегородок приводит к повышению собственных частот вращающейся жидкости и к смещению, а также к сужению диапазона неустойчивости системы в сторону более высоких скоростей вращения [4, 5]. Вместе с тем в литературе не найти работ, в которых волновые частоты представлены в виде явной функции количества перегородок. В данной статье этот недостаток устраняется, причем достоверность полученных результатов обеспечивается строгой постановкой задачи, использованием известных концепций механики жидкости и математики, а также сравнением с экспериментальными данными авторов.

Задача о собственных колебаниях жидкости в роторе

Полные уравнения гидродинамики и неразрывности для движущейся внутри ротора жидкости, которая свободна от весовых и поверхностных сил, в цилиндрической системе координат $r\theta z$ (рис.1), вращающейся с частотой $\omega + \tilde{\Omega}$, где ω - угловая скорость ротора, $\tilde{\Omega}$ - угловая скорость жидкости относительно ротора, таковы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - (\omega + \tilde{\Omega})^2 r - 2(\omega + \tilde{\Omega})v &= -\frac{\partial p}{\rho \partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - 2 \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + 2(\omega + \tilde{\Omega})u &= -\frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} + 2 \frac{\partial u}{r^2 \partial \theta} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{r \partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{r \partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial(ru)}{r \partial r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

где u, v, w - относительные (ротора) скорости частиц жидкости, p - давление в жидкости, ρ и ν - её плотность и кинематическая вязкость.

Дополняющие их ключевые граничные условия на наименее и наиболее удаленных от оси вращения поверхностях жидкости, т.е. определяющие не только поведение этих уравнений, но и динамику системы «ротор-жидкость» в целом:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (\text{на боковой стенке полости}), \\ u = u_r = \partial \mathfrak{R} / \partial t, \quad p &= 0 \quad \text{при} \quad r = r \quad (\text{на свободной поверхности жидкости}). \end{aligned}$$

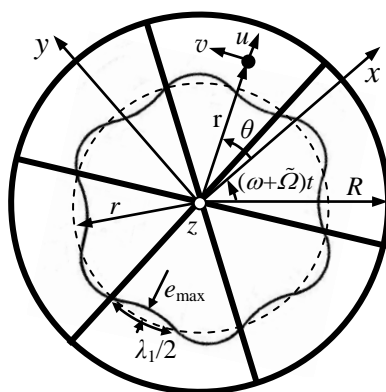


Рис.1. Сечение полости ротора, разделенной сплошными перегородками, частично и равно заполненной жидкостью, а также радиально-окружные волны первого порядка ($\kappa=1$)

Возмущенные скорости u, v, w сопряжены с возмущенным давлением p , увеличивающим стационарное p_0 , которое пропорционально квадрату абсолютной угловой

скорости $\omega + \tilde{\Omega}$. По аналогии с гидростатическим давлением столба жидкости, в заданной системе ускорение $= (\omega + \tilde{\Omega})^2 (r+r)/2$, а высота $= r-r$. Таким образом, без потери общности, давление в жидкости:

$$p = p_0 + p(r, \theta, z, t), \quad \text{где } p_0 = \rho(\omega + \tilde{\Omega})^2 (r^2 - r^2)/2. \quad (1)$$

Похожим образом можно определить свободную поверхность жидкости:

$$r = \mathfrak{R} = r + e(\theta, z, t),$$

где e - её возмущенное отклонение.

Цель работы – поиск периодических решений для величин, характеризующих малое двумерное волновое движение жидкости. Пренебрегая в вышеприведенных уравнениях Навье-Стокса скоростными членами второго порядка малости, изменением скорости в осевом направлении и вязкими частями с учетом (1), в первом приближении можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2(\omega + \tilde{\Omega})v &= -\frac{\partial p}{\rho \partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\omega + \tilde{\Omega})u &= -\frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} \\ r \frac{\partial u}{\partial r} + u + \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Использование представлений (1) и (2) при отбрасывании квадрата малого приводит к преобразованию кинематических и динамических граничных условий:

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{при } r = R, \\ u &= \partial e / \partial t, \quad p = -\rho(\omega + \tilde{\Omega})^2 r e \quad \text{при } r = r. \end{aligned} \quad (3)$$

Если предсказывается, что отклонение возмущения δ периодическое во времени и по окружности, то:

$$e(\theta, t) = \delta \exp i \left(\frac{2\pi}{T_t} t + \frac{2\pi}{T_{r\theta}} r \theta \right).$$

Период $T_{r\theta}$ есть длина поверхностных волн в окружном направлении:

$$\lambda_k = \frac{2\pi r}{k}, \quad k = n\kappa, \quad \kappa = 1, 2, \dots,$$

где κ - число узлов или волн вдоль окружности вращающейся жидкости в каждом из n отсеков (рис.1), образованных n радиальными перегородками (в случае отсутствия перегородок $k=\kappa$).

На основании (3) не только отклонение, но и скорости и давление возмущения должны быть пропорциональными той же экспоненциальной функции:

$$\begin{aligned} e(\theta, t) &= \delta \exp i(\tilde{\Omega}t + k\theta) \\ u(r, \theta, t) &= U(r) \exp i(\tilde{\Omega}t + k\theta) \\ v(r, \theta, t) &= V(r) \exp i(\tilde{\Omega}t + k\theta) \\ p(r, \theta, t) &= P(r) \exp i(\tilde{\Omega}t + k\theta) \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки (4) в (2) уравнения движения приобретают вид:

$$i\tilde{\Omega}U(r) - 2(\omega + \tilde{\Omega})V(r) = -\frac{P'(r)}{\rho}$$

$$i\tilde{\Omega}\frac{V(r)}{k} + 2(\omega + \tilde{\Omega})\frac{U(r)}{k} = -i\frac{P(r)}{\rho r}$$

$$r\frac{U'(r)}{k} + \frac{U(r)}{k} + iV(r) = 0$$

Решение первых двух из этих уравнений следующее:

$$U(r) = i\frac{1}{\rho}\frac{\tilde{\Omega}P'(r) + 2(\omega + \tilde{\Omega})kr^{-1}P(r)}{\tilde{\Omega}^2 - 4(\omega + \tilde{\Omega})^2}$$

$$V(r) = -\frac{1}{\rho}\frac{\tilde{\Omega}kr^{-1}P(r) + 2(\omega + \tilde{\Omega})P'(r)}{\tilde{\Omega}^2 - 4(\omega + \tilde{\Omega})^2} \quad (5)$$

С этими выражениями третье уравнение (неразрывности) дает простейшую форму уравнения Бесселя:

$$r^2P''(r) + rP'(r) - k^2P(r) = 0,$$

общее решение которого:

$$P(r) = C_1r^k + C_2r^{-k}, \quad (6)$$

где C_1 и C_2 - константы, определяющиеся граничными условиями (3) или в силу (4) их альтернативной формой:

$$U(R) = 0, \quad U(r) = i\tilde{\Omega}\delta, \quad P(r) = -\rho(\omega + \tilde{\Omega})^2 r\delta.$$

Чтобы найти C_1 и C_2 , следует вернуться к соотношению для $U(r)$, раскрывая в нём $P(r)$ и $P'(r)$:

$$U(r) = i\frac{k}{\rho}\left(\frac{C_1r^{k-1}}{\tilde{\Omega} - 2(\omega + \tilde{\Omega})} - \frac{C_2r^{-k-1}}{\tilde{\Omega} + 2(\omega + \tilde{\Omega})}\right).$$

Условие $U(R)=0$ показывает что:

$$C_2 = C_1\frac{\tilde{\Omega} + 2(\omega + \tilde{\Omega})}{\tilde{\Omega} - 2(\omega + \tilde{\Omega})}R^{2k}. \quad (7)$$

На основании $U(r)=i\tilde{\Omega}\delta$ с учетом (7) получается что:

$$C_1 = \frac{\rho\tilde{\Omega}}{k}\frac{\tilde{\Omega} - 2(\omega + \tilde{\Omega})}{r^{k-1} - R^{2k}r^{-k-1}}\delta. \quad (8)$$

Равенство $C_1r^k + C_2r^{-k} = -\rho(\omega + \tilde{\Omega})^2 r\delta$ дает уравнение частот поверхностных окружных (2D) волн (во вращающейся системе отсчета):

$$\frac{\tilde{\Omega}^2}{(\omega + \tilde{\Omega})^2} + 2\sigma\frac{\tilde{\Omega}}{\omega + \tilde{\Omega}} - k\sigma = 0, \quad \text{где } \sigma = \frac{1 - (r/R)^{2k}}{1 + (r/R)^{2k}}.$$

Угловая скорость волн относительно неподвижного наблюдателя (в неподвижной системе координат):

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} + \omega.$$

Следовательно, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} - \omega$ и «нормализованные» циклические частоты поверхностных 2D волн в случае асинхронно вращающейся (возбужденной) жидкости принимают значения:

$$\tilde{\Omega} = \frac{\omega}{1 + \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + k\sigma}} = \tilde{\Omega}_k^{+,-}. \quad (9)$$

Согласно (1) и (4–9) искомые действительные решения:

$$u = \delta(\omega - \tilde{\Omega}) \frac{R^{2k} - r^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}} \frac{r^{k+1}}{r^{k+1}} \sin(k\theta + \tilde{\Omega}t - \omega t),$$

$$v = -\delta(\omega - \tilde{\Omega}) \frac{R^{2k} + r^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}} \frac{r^{k+1}}{r^{k+1}} \cos(k\theta + \tilde{\Omega}t - \omega t),$$

$$p = \frac{1}{2} \rho \tilde{\Omega}^2 (r^2 - R^2) - \delta\rho(\omega - \tilde{\Omega}) \frac{(\omega - \tilde{\Omega})(R^{2k} + r^{2k}) - 2\tilde{\Omega}(R^{2k} - r^{2k})}{k(R^{2k} - r^{2k})} \frac{r^{k+1}}{r^k} \cos(k\theta + \tilde{\Omega}t - \omega t).$$

Волновые частоты синхронно вращающейся жидкости реализуются при устремлении $\tilde{\Omega}$ к нулю; а именно в исходных уравнениях её малого движения и в граничных условиях на её поверхностях, т.е. при $\tilde{\Omega} = 0$ в (2) и (3).

Разыскивая решения в виде:

$$e(\theta, t) = \delta \exp i((\omega - \bar{\Omega})t + k\theta)$$

$$u(r, \theta, t) = U(r) \exp i((\omega - \bar{\Omega})t + k\theta)$$

$$v(r, \theta, t) = V(r) \exp i((\omega - \bar{\Omega})t + k\theta)$$

$$p(r, \theta, t) = P(r) \exp i((\omega - \bar{\Omega})t + k\theta)$$

и выполняя аналогичные математические преобразования, можно получить следующее частотное уравнение:

$$\frac{(\omega - \bar{\Omega})^2}{\omega^2} + 2\sigma \frac{\omega - \bar{\Omega}}{\omega} - k\sigma = 0.$$

Отсюда циклические частоты поверхностных 2D волн для синхронно вращающейся (невозбужденной) жидкости:

$$\bar{\Omega} = \omega \left(1 + \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + k\sigma} \right) = \bar{\Omega}_k^{+,-}. \quad (10)$$

В синхронном случае действительные решения:

$$u = -\delta(\omega - \bar{\Omega}) \frac{R^{2k} - r^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}} \frac{r^{k+1}}{r^{k+1}} \sin(k\theta + \omega t - \bar{\Omega}t),$$

$$v = \delta(\omega - \bar{\Omega}) \frac{R^{2k} + r^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}} \frac{r^{k+1}}{r^{k+1}} \cos(k\theta + \omega t - \bar{\Omega}t),$$

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r^2 - R^2) - \delta\rho(\omega - \bar{\Omega}) \frac{(\omega - \bar{\Omega})(R^{2k} + r^{2k}) + 2\omega(R^{2k} - r^{2k})}{k(R^{2k} - r^{2k})} \frac{r^{k+1}}{r^k} \cos(k\theta + \omega t - \bar{\Omega}t).$$

Анализ результатов

Формулы (9) и (10) показывают, что частоты поверхностных волн прямо пропорциональны скорости вращения и зависят от волнового числа k и уровня заполнения $r/R = \sqrt{1 - V_F/V}$, где V_F, V - объемы жидкости, полости. При этом:

- чем больше в роторе перегородок и жидкости, тем больше расхождение между роторной ω и волновыми Ω_k угловыми скоростями;
- каждому числу k , очевидно из-за ускорения Кориолиса $\pm 2\omega_{\text{абс}} \mathbf{v}$, соответствуют две частоты: одна ($\bar{\Omega}_k^+$ или $\bar{\Omega}_{\text{когда } k \text{ мало}}^-$) - для волн, распространяющихся в направлении вращения ротора, а другая ($\bar{\Omega}_k^-$ или $\bar{\Omega}_k^+ \& \bar{\Omega}_{\text{когда } k \text{ велико}}^-$) - для волн противоположного направления;
- так как $\bar{\Omega}_k^+ > |\bar{\Omega}_k^-|$, то прямые (относительно ротора) волны по невозмущенной жидкости бегут быстрее обратных;

- так как $\tilde{\Omega}_k^+ < |\tilde{\Omega}_k^-|$, то обратные волны по возмущенной жидкости распространяются медленнее прямых (со скоростью $\tilde{\Omega}_{\text{когда } k \text{ мало}}^-$), а также обратных относительно неподвижного наблюдателя (со скоростью $\tilde{\Omega}_{\text{когда } k \text{ мало}}^-$);
- возможен случай с $\bar{\Omega}_k^- = 0$, т.е. случай стоячих относительно неподвижного наблюдателя волн на невозмущенной жидкости;
- поскольку $\tilde{\Omega}_k^+ \neq 0$ и $\tilde{\Omega}_k^- \neq 0$, то стоячие волны на возмущенной жидкости не существуют.

Наиболее важный случай для практики – это $k=1$, поскольку только такие формы колебаний жидкости возбуждаются поперечными движениями полости как твердого тела [6]. Остальные формы колебаний с $k \neq 1$ являются ортогональными форме колебаний с $k=1$.

На рис.2 приведена диаграмма Кэмпбелла, в которую к частотам вращения ω и собственных колебаний ω_0 ротора добавлены частоты волн (9) и (10) при $k=1$. Точка пересечения ω с ω_0 , отмеченная квадратом, соответствует критической скорости ротора. По аналогии точки внутри кругов будут отвечать скоростям так называемого волнового резонанса жидкости в гибком [7] или податливом [8] роторе. Видно, что при его закритических оборотах с повышением в нём числа перегородок критическая скорость жидкости заметно повышается и при достаточном и необязательно большом их количестве оказывается вне скоростного диапазона, обычного для техники.

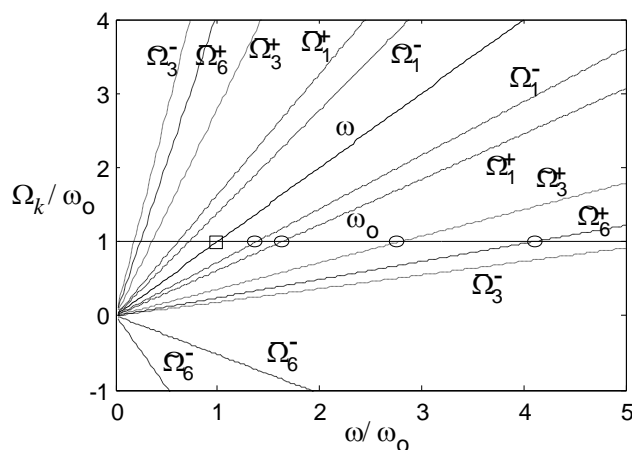


Рис.2. Циклические частоты основных поверхностных 2D волн (с одним узлом) без перегородок (Ω_1), с тремя (Ω_3) и шестью (Ω_6) перегородками при 30%-ом заполнении и различных скоростях вращения

Существование в окрестности отмеченных скоростей динамической неустойчивости ротора, частично заполненного маловязкой жидкостью и содержащего радиальные перегородки, в т.ч. отсутствие резонансов в системе, обнаружено в экспериментах авторов [9]. Результаты разработанной теории и натурных испытаний сопоставляются на рис.3. Светлые толстые кривые воспроизводят аналитические зависимости (9) и (10), т.е. точные значения волновых частот. Объединенные для видимости резонансного диапазона прерывистыми и сплошными тонкими линиями экспериментальные точки представляют собой появление или исчезновение волн и повышенной вибрации ротора.

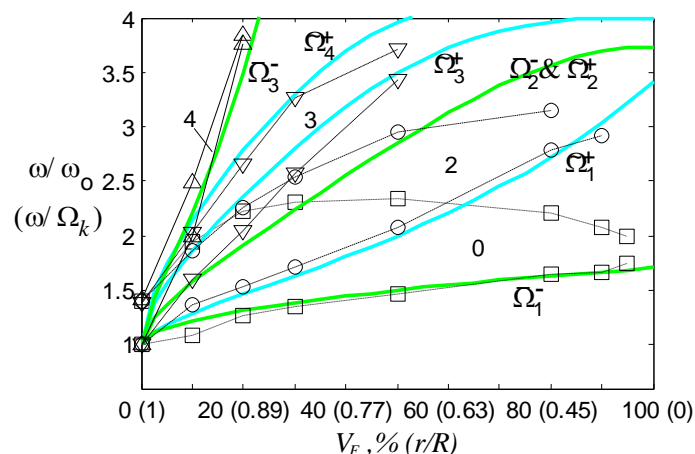


Рис.3. Экспериментальные минимальные и максимальные, а также теоретические скорости волнового резонанса относительно критической полного ротора при различном количестве жидкости

В заключение целесообразно, опять же с практической точки зрения, привести формулы, определяющие полное давление жидкости на стенки ротора:

$$p_R = \frac{1}{2} \rho \tilde{\Omega}^2 (R^2 - r^2) - 2\delta \frac{\rho(\omega - \tilde{\Omega})^2 R^k r^{k+1}}{k(R^{2k} - r^{2k})} \cos(k\theta + \tilde{\Omega}t - \omega t)$$

или

$$p_R = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (R^2 - r^2) - 2\delta \frac{\rho(\omega - \bar{\Omega})^2 R^k r^{k+1}}{k(R^{2k} - r^{2k})} \cos(k\theta + \omega t - \bar{\Omega}t)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках проекта № 14-08-01120_а

Список литературы

1. Дерендяев Н.В. Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2014. 154 с.
2. Ehrich F.F. The Influence of Trapped Fluids on High Speed Rotor Vibration, *ASME Journal of Engineering for Industry*, Vol.89 (1967), pp.806-812.
3. Дайч И.М. Неконсервативная задача о колебаниях твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью // Прикладная механика, 1971, Том VII, вып.7. С.44-48.
4. Preussner C., Kollmann F.G. On the Stability of a Spinning, Fluid Filled and Sectored Rotor, *Computers and Structures*, Vol.30 (1988), No.1/2, pp.131-141.
5. Weihs D., Dodge F.T. Liquid motions in nonaxisymmetric, partially filled containers rotating at zero gravity. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol.28 (1991), No.4, pp.425-432.
6. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука (сибирское отделение), 1989. 336 с.
7. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: АН СССР, 1959, 247 с.
8. Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. М.: Наука, 1982. 280 с.
9. Никифоров А.Н., Татусь Н.А., Шохин А.Е. О волновом резонансе экспериментальных роторов с маловязкой жидкостью и радиальными перегородками. // Вестник научно-технического развития, №10 (98), 2015. С.51-59. - То же [Электронный ресурс]. URL: <http://vntr.ru/ftpgetfile.php?id=890>