

УДК 534

К АНАЛИЗУ НЕНЬУТОНОВСКИХ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТРУБНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ И СИСТЕМАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ УДАРНЫМИ ПАРАМИ

© **Виталий Львович Крупенин**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения
им. А.А. Благонравова РАН, Россия, Москва

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены проблемы построения методик анализа виброударных процессов в системах с большим числом ударных пар. Использованный метод сингуляризации позволил отказаться от представлений о мгновенном ударе и учесть более реалистичные, нежели ньютоновская, гипотезы взаимодействия. Рассмотрены особенности описания наиболее опасных для виброизноса элементов конструкций синхронных режимов движения типа хлопков в системах с параллельными ударными элементами и трубках, соударяющихся с промежуточными опорами. Приведены результаты эксперимента и даны примеры расчета конкретных конструкций.

Ключевые слова: немгновенный удар, сингуляризация, большое число степеней свободы, периодическая функция Грина, интегральное уравнение нелинейных колебаний, $2N$ -параметрическое представление, импульс взаимодействия, время взаимодействия, синхронные соударения, расчеты трубных конструкций.

TO THE ANALYSIS OF NON-NEWTONIAN VIBROIMPACT PROCESSES IN TUBE DESIGNS AND SYSTEMS WITH PARALLEL IMPACT PAIRS

© **V.L. Krupenin**

IMASH RAS, Russia, Moscow

Abstract. Problems of creation of techniques of the analysis of vibroimpact processes in systems with a large number of impact pairs are considered. The used method of a singularization allowed to refuse ideas of the instantaneous impact and to consider more realistic than the Newtonian interaction hypotheses. The features of descriptions of the most dangerous for the vibration wear of structural elements of synchronous movement type claps in systems with parallel impact elements and the tube colliding with intermediate supports. The results of the experiment and examples of calculation are given specific designs.

Keywords: non momentary impact, singularization, large number of freedoms degree, Green periodic function, integral equation of nonlinear oscillations, $2N$ -parametrical representation, impact impulse, interaction time, synchronous collisions, calculation of tubes design.

1. Описание проблемы. Проблема моделирования и анализа неньютоновских виброударных систем, в которых силы ударного взаимодействия описываются посредством пороговых нелинейностей, обсуждалась в работе [1]. Впервые задачи такого рода начал рассматривать, по-видимому, В.К. Асташев в работе [2]. Любая пороговая нелинейность – представляет собой гипотезу ударного взаимодействия. В работе [3] был предложен метод сингуляризации, позволяющий, используя гипотезу о мгновенном ударном взаимодействии, строить приближенные решения задач, для которых необходимо рассмотрение конечной

продолжительности удара. Метод сингуляризации, развитый в работах [4 - 6] состоит в том, что при наличии взаимодействия концепция удара в первом приближении все равно остается ньютоновской (удар упругий), но при этом ограничители полагаются не фиксированными, а «плавающими» в зависимости от времени взаимодействия, определяемого выбранной гипотезой неньютоновского удара. Так появляется возможность принять во внимание разнообразные особенности характеристик упругого нагружения взаимодействующих при соударениях подсистем и оказывается возможным учесть более реалистические модели рассеяния энергии при взаимодействии. Эти проблемы и обсуждаются ниже на примерах расчета протяженных конструкций с произвольным конечным числом ударных пар и длинных трубок, соударяющихся с промежуточными опорами.

2. Операторное уравнение движения. Представим периодический виброударный процесс в склерономной стационарной механической системе общего вида, содержащей N сосредоточенных ударных пар. При построении в несколько модифицированном виде используем методы частотно-временного анализа виброударных процессов [1, 3-11], основанные на записи искомого закона движения через периодические функции Грина взаимодействующих линейных механических подсистем.

Рассмотрим для примера линейную склерономную, стационарную механическую систему с произвольным конечным числом (N_1) степеней свободы (рис.1). Ограничимся, для простоты, вообще говоря, несущественным предположением, что каждая точка системы совершает одномерное движение вдоль некоторой оси. Предположим, что известно семейство операторов динамической податливости данной системы $L(u, y; p)$, где u и y — ее произвольные точки. Каждый такой оператор ставит в соответствие силе, приложенной в точке u , перемещение точки y ; $p \equiv d/dt$.

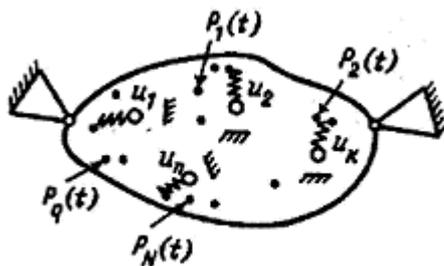


Рис. 1

Пусть в $N \leq N_1$ точках $\{u_k\}$: $L(u_k, u_k) = O(p^{-2})$ ($p \rightarrow \infty$). Это предположение означает, в частности, что в точках $\{u_k\}$ сосредоточены некоторые тела с массами m_k . Пусть далее в каждой такой точке помещена ударная пара, предполагаемая для определенности несимметричной и односторонней, т. е. имеется упорядоченный набор чисел $\{\Delta_k\}$, таких, что $u_k \leq \Delta_k$ и при $u_k = \Delta_k$ происходит прямое и центральное неньютоновское ударное взаимодействие. Обозначим силу удара в k -й паре $\Phi_k(u_k; \dot{u}_k)$; её вид мы конкретизируем далее. Обычно полагают, что $\Phi_k(u_k; \dot{u}_k) = \Phi_{1k}(u_k) + \Phi_{2k}(u_k; \dot{u}_k)$, где $\Phi_{1k}(u_k)$ - упругая, а $\Phi_{2k}(u_k; \dot{u}_k)$ - диссипативная составляющие.

Предположив, наконец, что в некоторых выделенных $H \leq N_1$ точках $\{u_h\}$ приложены возбуждающие периодические (с периодом T_0) внешние силы $P_h(u_h; \dot{u}_h; t)$ (рис.1), можно записать для точек u_k

$$u_k(t) = \sum_{h=1}^H L(u_k, u_h; p) P_h(u_h; \dot{u}_h; t) - \sum_{n=1}^N L(u_k, u_n; p) \Phi_k(u_k; \dot{u}_k; s) \quad (1)$$

Здесь для нахождения перемещения произвольной точки выписывается соотношение, вполне аналогичное (1).

Отметим также, что совершенно аналогично может рассматриваться случай, когда принадлежащие изучаемой системе сосредоточенные тела соударяются между собой. В этом случае соотношение типа (1) записывается для относительных координат $u_{ok} = u_{Ik} - u_{IIk}$, где u_{Ik}, u_{IIk} — абсолютные координаты контактирующих тел.

Пусть семейство сил $\{P_h\}$ — T-периодическое. Для отыскания T-периодических законов движения $u_k(t)$ имеет место система интегральных уравнения периодических колебаний типа Гаммерштейна [4 - 7] при $k = 1, \dots, N$:

$$u_k(t) = \sum_{h=1}^H \int_0^T \chi(u_k, u_h; t-s) P_h[u_h(s); \dot{u}_h(s); s] ds - \sum_{n=1}^N \int_0^T \chi(u_k, u_n; t-s) \Phi_k[u_k(s); \dot{u}_k(s); s] ds. \quad (2)$$

Здесь $\chi(u_k, u_h; t-s)$ — периодическая функция Грина (ПФГ), отвечающая оператору $L(u_k, u_h; p)$:

$$\chi(u_k, u_h; t) = T^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} L(u_k, u_h; iq\omega t) \exp(iq\omega t). \quad (3)$$

Свойства ПФГ подробно описаны в [5, 6]; они представляют собой реакции линейных систем на периодическую последовательность δ -функций Дирака (дираковскую гребенку):

$$\delta^T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = T^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp(iq\omega t), \quad (4)$$

Первый член в правой части (4) оказывается, таким образом, решением линейной задачи (все $\Phi_k \equiv 0$).

Если возбуждающие силы симметричны и симметричны ударные пары, то для нахождения симметричных режимов движения $u_k(t) = -u_k(t+T/2)$ системы (1) используются симметризуемые интегральные уравнения (2), где интегрирование ведется на промежутке $[0, T/2]$, а ядрами служат симметричные ПФГ:

$$\chi^*(u_k, u_h; t) = 2T^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} L\{u_k, u_h; [i(2q+1)\omega t]\} \exp[i(2q+1)\omega t], \quad (5)$$

оказывающиеся реакцией линейной системы на двойную дираковскую гребенку (симметричную последовательность δ -функций Дирака):

$$\delta^{T/2}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(t-nT) - \delta(t-T/2-nT)] = T^{-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp[i(2q+1)\omega t]. \quad (6)$$

Полезны представления ПФГ в конечном виде на интервалах периодичности (симметрии) — см. [5, 6] и ниже.

3. Гипотезы удара. Говоря о соударениях, необходимо задаться гипотезой удара. Будем вначале предполагать, что удар — абсолютно упругий и прямой. Рассмотрим так называемые пороговые функции из класса $\{\Phi\}_\Delta$ [1, 5, 6]. Порогом называется координата, по прохождению которой начинается ударное взаимодействие двух тел или тела и неподвижного ограничителя. Указанная координата отсчитывается вдоль оси удара. В случае, если удар абсолютно жесткий и деформацией соударяющихся тел можно пренебречь,

то время его продолжительности равно нулю (мгновенный удар). Но в случае, если для модели существенна деформация тел при соударении, удар не может считаться мгновенным.

В случае мгновенного удара применяется известная гипотеза Ньютона. Сила удара в этом случае записывается при помощи сингулярной обобщенной функции [4 - 7]. Однако, если, во-первых, нам важен учет конечной продолжительности силы удара или при учете потерь энергии во время взаимодействия необходимо принять во внимание какие-либо теории контактного демпфирования, основанные, например, а свойствах материалов взаимодействующих тел необходимо отказаться от предположения о мгновенности взаимодействия.

Рассмотрим вначале упругий удар. Вообще говоря, выбор гипотеза удара – это задание (получение) представления силы взаимодействия. Если ударная пара – односторонняя и несимметричная как и показано на рис.2, то несимметричной будет и, отвечающая ей,

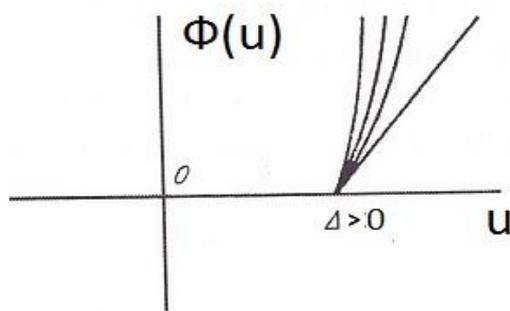


Рис. 2

пороговая функция $\Phi_1(u_k) = \lambda \Phi_k(u_k)$, при посредстве которой, собственно, и устанавливается гипотеза удара в данной ударной паре. Здесь $\lambda \gg 1$ – большой параметр. Класс пороговых функций для данной задачи определяется так:

$$\Phi_k(u_k) \in \{\Phi\}_\Delta \equiv \{\Phi_k(u_k); \Phi(u_k) = \psi_k(u_k - \Delta)\eta(u_k - \Delta)\Delta \geq 0; \psi_k(u_k - \Delta) \equiv 0; u_k \geq 0\}. \quad (7)$$

Предполагается, что $\psi_k(u_k)$ непрерывно дифференцируема на всей числовой оси, монотонно возрастает и является выпуклой при $x \geq 0$ (рис. 2); $\eta(x)$ – единичная функция.

После первых работ такой подход был позже развит в книгах [4, 5], а для систем со многими ударными парами - в [6].

Зафиксируем гипотезу упругого взаимодействия в каждой ударной паре в виде (7). Рассмотрим задачу (1) [(2)] при помощи метода сингуляризации.

• Вначале рассмотрим периодические режимы движения в соответствующей консервативной системе, проведя сингуляризацию уравнения движения, то есть сопоставим системе с немгновенным ударом некоторую систему, в которой удар предполагается мгновенным.

• Интересуясь резонансными режимами, отвечающими при относительно малых уровнях диссипативных сил, режимам консервативной системы на частоте возбуждающей силы или комбинационной, частоте, из принципа энергетического баланса, найдем условия их существования.

4. Представления периодических режимов. Рассмотрим консервативный аналог системы операторных уравнений движения (1). Для всех k и h положим $P_h = \Phi_{2k} = \text{Im}L(u_n, u_q; i\omega) = 0$ для всех точек системы. Тогда уравнение движение консервативной системы с оператором $L_0(u_k, u_n; p)$ принимает вид для всех k :

$$u_k = \sum_{n=1}^N L_0(u_k, u_n; p)[\lambda \Phi_n(u_n)], k=1, \dots, N. \quad (8)$$

Для отыскания периодических режимов движения в консервативной системе воспользуемся интегральным уравнением нелинейных колебаний, которое в данном случае примет вид:

$$u_k(t) = - \sum_{n=1}^N \int_0^T \chi(u_k, u_n; t-s) \lambda \Phi_n[u_n(s)] ds, k=1, \dots, N \quad (9)$$

В работах [6-8] при сходных предположениях было показано, что при $\lambda \rightarrow \infty$ решения уравнений подобных (8) переходят решения, отвечающие гипотезе о мгновенном (в данном случае упругом) ударе.

При этом постулируется, что во время взаимодействия в произвольной ударной паре действием любых сил, приложенным в точке её локализации, а также любых сил, включая силы взаимодействия, приложенные в других точках системы, можно пренебречь.

Используя метод сингуляризации, сопоставляющим немгновенному короткому взаимодействию мгновенный удар, но происходящий в «сдвинутый момент времени». В соответствии с методом, входящие в уравнение (8) силы можно приближенно представить, как сингулярную обобщенную функцию. В частности, для T-периодического процесса в предположении одного взаимодействия за период движения в каждой ударной паре:

$$\lambda \Phi_n[u_n(t)] = J_{\lambda n} \delta^T(t - t_n - \tau_{\lambda n}); n=1, \dots, N, \quad (10)$$

где t_n - фиксированный момент начала взаимодействия в n-й ударной паре (фаза), причем $t_{nk} \in [0, T]$; $\tau_{\lambda n} = \frac{1}{2} t_{\lambda n}$ - половина времени взаимодействия в этой паре, определяемая из полученных ранее формул [10, 6, 11] (см. также ниже).

Переход к представлению (9) - (10), во-первых, означает, что отыскиваются именно периодические режимы движения в консервативной системе, во-вторых, что силы взаимодействия, как и при действии гипотезы о мгновенном ударе, даются уравнениями движения, содержащими сингулярные обобщенные функции. Такие уравнения движения называются сингуляризованными.

В формуле (10) также : $J_{\lambda n}$ -импульс взаимодействия в n-й ударной паре:

$$J_{\lambda n} = \int_0^{t_{\lambda n}} \lambda \Phi_n[u_n(s)] ds, k=1, \dots, N. \quad (11)$$

Теперь из (8) получаем:

$$u_k(t) = - \sum_{n=1}^N J_{\lambda n} \chi_{kn}(t - t_n - \tau_{\lambda n}), k=1, \dots, N. \quad (12)$$

Представление (12) определяет решение через $2N$ параметров – импульсы взаимодействия и моменты начала взаимодействия. Как и в задачах с мгновенным ударом будем называть его $2N$ -параметрическим представлением [7].

Для нахождения N неизвестных параметров движения воспользуемся условиями начала (или окончания) взаимодействия:

$$u_k(t_n) = u_k(t_n + t_{\lambda n}) = \Delta_k, \quad k=1, \dots, N. \quad (13)$$

где Δ_k - значения установочных зазоров (натягов).

$$\Delta_k = \sum_{n=1}^N J_{\lambda n} \chi_{kn}(t_n + \tau_{\lambda n}); k=1, \dots, N. \quad (14)$$

Соотношения(14) представляют собой систему N нелинейных алгебраических уравнений; величины $\tau_{\lambda n}$ будут даны далее.

Еще N условий для величин t_n могут быть получены исходя из дополнительных соотношений, следующих из (13) и конкретизации гипотез взаимодействия. При рассмотрении консервативной задачи целесообразно привлечение соображений симметрии. И также, имея в виду получить аналитические расчетные формулы в дальнейшем оставаться в рамках аналитических расчетных формул положим далее для всех $k: \Delta_k \equiv \Delta$.

5. Периодические хлопки в цепочке упруго связанных тел. Хлопком называется режим движения, при котором все или часть массивных тел движется синфазно и синхронно взаимодействуют, например, с ограничителями. При хлопке виброударный процесс наиболее интенсивен [9]. Рассмотрим модель системы с периодической структурой (рис.3) [11-14].

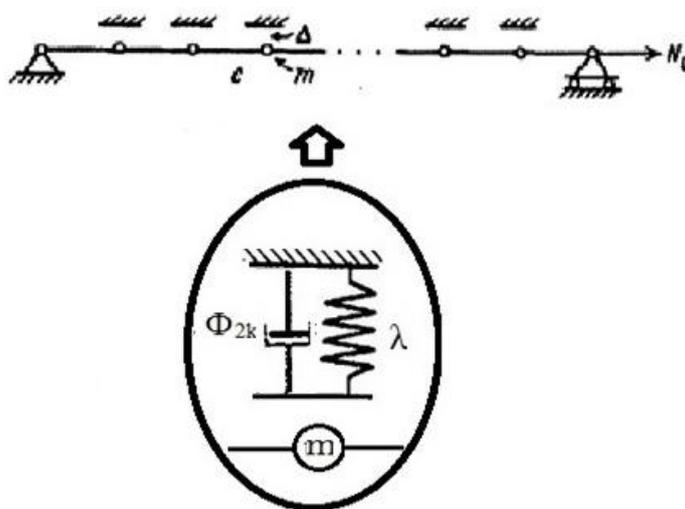


Рис. 3

Здесь показано, что взаимодействие может осуществляться в упруго-диссипативных буферах с различными характеристиками сил диссипации (см. ниже).

Рассмотрим упругую модель. Не ограничивая общности рассуждений, для простоты будем считать $m=c=1$. Кроме того, вполне естественно предположить, что во всех ударных парах зафиксирована одна и та же гипотеза взаимодействия.

В предположении консервативности системы уравнения движения для $k=1, \dots, N$ и граничные условия примут вид

$$\ddot{u}_{kq} + 2u_k - u_{k-1} - u_{k+1} + \lambda \Phi(u_k) = 0, u_0 = u_{N+1} = 0, \quad (15)$$

где $u_k \leq \Delta$ и удар вначале предполагается абсолютно упругим (см. ниже).

Пусть в системе осуществляется хлопок, в котором участвуют все частицы. Тогда $2N$ -параметрическое представление (12) и определяющие соотношения (13), (14) при $k=1, \dots, N$ и $t_n=0$ и описывают хлопок, в котором начало взаимодействия совмещено с началом отсчёта времени. ПФГ системы в данном случае определяется рядом (5), который учитывая

представления операторов динамической податливости, данные в [4, 5] может быть записан в конечной форме на отрезке периодичности при $t \in [0, T]$:

$$\chi_{kn}(t) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{N+1} \sin \frac{\pi j q}{N+1} \sin \frac{\pi k q}{N+1} \frac{\cos \Omega_q (t - T/2)}{\Omega_q \sin \frac{1}{2} \Omega_q T}, \quad (16)$$

причем собственные частоты линейной цепочки

$$\Omega_q = 2 \sin \left[\frac{\pi q}{2(n+1)} \right]. \quad (17)$$

Для получения конечного представления для ПФГ $\chi_{kn}(t)$ вне отрезка $[0, T]$ функцию (16) необходимо продолжить по периодичности, исходя из условия $\chi_{kn}(t) = \chi_{kn}(t+T)$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

В формулах (12) и (14) фигурирует величины $\tau_{\lambda n}$ (половина времени взаимодействия в n -й ударной паре).

Величины $\tau_{\lambda n j}$, вообще говоря, зависят от выбранной гипотезы взаимодействия и, от импульса взаимодействия. В работах [4-6] даны определяющие соотношения при выборе гипотезы взаимодействия в виде

$$\lambda \Phi_n(x) = (x - \Delta)^\alpha \eta(x - \Delta), \quad \alpha \geq 1. \quad (18)$$

В распространенном случае гипотезы о линейной зависимости силы взаимодействия в зоне контакта, когда в (19) $\alpha=1$ показано, что при фиксированном значении параметра λ и больших импульсах, время взаимодействия не зависит от значений последних и

$$\tau_{\lambda n} = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}, \quad (19)$$

так что, выбрав эту гипотезу (18), в представлении (12) для всех n можно положить $\tau_{\lambda n} \equiv \tau_\lambda = \text{const}(J_\lambda)$. В дануом случае $m=1$.

При отказе от предположения, что импульсы взаимодействия – большие, время взаимодействия становится от них зависимым, но эта зависимость достаточно слабая. И также при $\alpha > 1$ всегда $\tau_{\lambda n} \equiv \tau_\lambda \neq \text{const}(J_\lambda)$, но при больших импульсах эта зависимость – слабая. Выражения для параметров сингуляризованных уравнений и представлений движения при $\alpha > 1$ здесь не приводятся, так как дальше не используются; см. [4 - 6].

Заметим что, так как применяемые методы анализа могут базироваться на величинах, получаемых в результате экспериментальных измерений динамические податливости $L(i\omega)$, время взаимодействия τ_λ также может быть взято из экспериментальных данных.

6. Пример: трехпролётная цепочка. Рассмотрим трехпролётную цепочку с двумя телами ($N=2$). Из (14) следует

$$\Delta = J_1 \chi_{11}(\tau_\lambda) + J_2 \chi_{12}(\tau_\lambda); \quad \Delta = J_1 \chi_{21}(\tau_\lambda) + J_2 \chi_{22}(\tau_\lambda); \quad (20)$$

Так как $\chi_{11}(\tau_\lambda) = \chi_{22}(\tau_\lambda)$ и $\chi_{12}(\tau_\lambda) = \chi_{21}(\tau_\lambda)$, то $J_1 = J_2 = J$. Для собственных частот находим из (17): $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = \sqrt{3}$.

Величина J однозначно зависит от полной энергии и является интегралом движения. Другой интеграл движения – произвольный момент начала взаимодействия [4 -7].

С учётом сказанного, из формулы (14) получаем приближенное представление решения ($m=1$):

$$u_1(t) = u_2(t) \equiv u(t) = J [\chi_{11}(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}) + \chi_{12}(t - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}})]. \quad (21)$$

Таким образом, например, из первого уравнения (18), учитывая (20) и (22), найдем для больших импульсов взаимодействия:

$$J = \Delta [\chi_{11}(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}) + \chi_{12}(\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}})]^{-1}. \quad (22)$$

Учитывая свойства ПФГ [4, 5] внутри интервала периодичности запишем, пользуясь формулой Тейлора: $\chi_{kq}(\tau_\lambda) \approx \chi_{kq,nj}(0) + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} \dots$. Тогда формулу (23) можно представить как

$$J \approx \Delta [\chi_{11}(0) + \chi_{12}(0) + \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}}]^{-1} \approx J_0 - \frac{\pi}{8\sqrt{\lambda}} \quad (23)$$

где J_0 – импульс взаимодействия при реализации синхронного хлопка в предположении выполнения гипотезы о мгновенном ударе ($\lambda \rightarrow \infty$). Так как

$$\chi_{11}(0) = \chi_{22}(0) = \frac{1}{3} (\frac{3}{4} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} T + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{3}}{2} T); \quad \chi_{12}(0) = \chi_{21}(0) = \frac{1}{3} (\frac{3}{4} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} T - \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{3}}{2} T), \quad (24)$$

то в приближении мгновенного соударения имеем:

$$J_0 = -2\Delta \operatorname{tg} \frac{1}{2} T = -2\Delta \operatorname{tg} \frac{\pi}{\omega} \quad (25)$$

Эта формула в точности отвечает представлению для традиционного «ударного осциллятора» [4, 5]. Из условия $J \geq 0$ следует, что хлопки возможны в частотном диапазоне $1 < 1 + \Omega_\lambda \leq \omega < 2$, причем $\Omega_\lambda = O(\lambda^{-1/2})$. Из (21) для искомым законов движения получаем, учитывая проведенные вычисления:

$$u(t) = \Delta \frac{\cos(t - \pi/2\sqrt{\lambda} - \pi\omega^{-1})}{\cos \pi\omega^{-1}}; \quad -\pi/2\sqrt{\lambda} < t < T - \pi/2\sqrt{\lambda}, \quad (26)$$

т.е. движение каждого тела аналогично движению сингуляризованного ударного осциллятора. При больших N картина незначительно усложняется, поскольку хлопки сопровождаются неодинаковыми импульсами в ударных парах.

Подчеркнем, что представление (23) – наиболее точное при больших значениях импульса. То есть оно предполагает, нахождение вблизи частоты $\omega = 2$.

Показывается, что для трёх тел импульс удара центрального будет несколько больше импульсов боковых тел. Для четырех тел импульсы двух центральных и двух боковых – попарно равны и так далее.

Характер зависимости $J(\omega)$ дан на рис. 4.

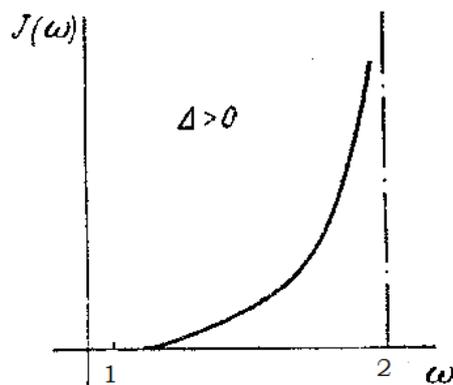


Рис. 4

7. Резонансные режимы в трехпролетной цепочке. Рассмотрим уравнение движения (15), полагая, что при взаимодействии в зоне контакта на тела действуют одинаковые силы $\Phi_2(u_k; \dot{u}_k) = g(\dot{u}_k) \eta(u_k - \Delta)$, где $g(\dot{u}_k)$ – сила диссипации. Пусть, кроме того, во время движения на взаимодействующие тела действует сила вязкого трения, зависящая от их абсолютных скоростей. Тогда предполагая возбуждение колебания синусоидальным, с частотой ω_0 , вместо (15) получаем: В изучаемом здесь случае $N=2$.

$$\ddot{u}_k + 2u_k - u_{k-1} - u_{k+1} + \lambda \Phi(u_k) = -g(\dot{u}_k) \eta(u_k - \Delta) - 2\varepsilon b \dot{u}_k + \varepsilon P_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k), u_0 = u_{N+1} = 0. \quad (27)$$

При анализе задачи об отыскании в системе (27) периодических режимов частоты ω_0 ограничимся синфазными резонансными режимами, под которыми понимаются движения близкие к описанным выше периодическим режимам соответствующей консервативной системы. Предположим, что уровни сил возбуждения и диссипации малы, так что при реализации резонансных режимов происходит взаимная компенсация их работ. Такое понимание резонанса было принято, в частности, в [4, 5, 9].

Рассмотрим основные резонансные режимы. Частоты $\omega_0 (1 < 1 + \Omega_\lambda \leq \omega_0 < 2)$ лежат в промежутке существования синхронных хлопков. Предположим, что все внешние воздействия $P_k(t) = \varepsilon P_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k)$ – синфазные и имеют равные амплитуды, то есть для всех $\varphi_k = \varphi$; $P_k = P$. Обозначим режимы консервативной системы (15) при $\omega = \omega_0$: $u^{(0)}(\omega_0; t)$. Таким образом, в данном случае для всех k приближенно полагается:

$$u_{kq}(t) \approx u^{(0)}(\omega_0; t) + \quad (28)$$

В изучаемом здесь случае $N=2$. Поэтому импульс взаимодействия для обеих ударных пар одинаков; при увеличении числа N вид нижеприведенного уравнения энергетического баланса – усложнится.

Импульс взаимодействия $J^{(0)}(\omega_0)$ дается при помощи второго соотношения (28), (25) при $\omega = \omega_0$. Сделанное выше предположение о больших импульсах, приводящее к упрощению выражения для времени взаимодействия, согласуется с представлением о резонансном характере движения.

Считая, что начало взаимодействия совпадает с началом отсчета времени, полагаем, что фаза φ – неизвестна. Для её нахождения запишем уравнение баланса работ неконсервативных сил на движении $\dot{u}^{(0)}(\omega_0; t)$ за период T_0 :

$$\int_0^{T_0} \{ g[\dot{u}^{(0)}(\omega_0; t)] \eta[\dot{u}^{(0)}(\omega_0; t) - \Delta] + 2\varepsilon b \dot{u}^{(0)}(\omega_0; t) - \varepsilon P \cos(\omega_0 t + \varphi) \} \dot{u}^{(0)}(\omega_0; t) dt = 0. \quad (29)$$

Строго говоря, такое соотношение должно выписываться для всех координат u_k . После преобразований и вычисления ряда квадратур находим с учетом обозначения, введенного в формуле (28):

$$E_c[g; J^{(0)}(\omega_0); \tau_\lambda] + \frac{\varepsilon b}{\sin^2(1/2 \Omega T_0)} J^{(0)}(\omega_0) \left(1 - \frac{\sin \Omega T_0}{\Omega T_0} \right) = \frac{2\omega_0^2 P \sin \omega_0(\varphi + \tau_\lambda)}{\pi(\omega_0^2 - \Omega^2)}, \quad (30)$$

Здесь $E_c[g; J^{(0)}(\omega_0); \tau_\lambda]$ – потери энергии при контакте. Необходимо отметить, что так как сила $\Phi_2(u_k; \dot{u}_k)$ действует малое время $\tau_\lambda \sim \lambda^{-1/2}$, для учета этой силы в рассматриваемом приближении, следует считать $\Phi_2 \sim 1$. Из уравнения (30) определяются два значения фазы, одно из которых отвечает неустойчивому режиму и условие существования резонансного режима (31) ($|\sin \omega(\varphi + \tau_\lambda)| \leq 1$). Имеем:

$$\left| \frac{\pi(\omega^2 - \Omega^2)}{2P\omega_0^2} [E_c[g; J^{(0)}(\omega_0); \tau_\lambda] + \frac{\varepsilon b}{\sin^2(1/2 \Omega T_0)} J^{(0)}(\omega_0) (1 - \frac{\sin \Omega T_0}{\Omega T_0})] \right| \leq 1. \quad (31)$$

8. Экспериментальные данные. Режимы движения типа хлопков были зарегистрированы экспериментальной достаточно подробно изучены [12-14]. Описание установки дано, например, в [12]. На рис. 4 и 5 показаны сфотографированные в

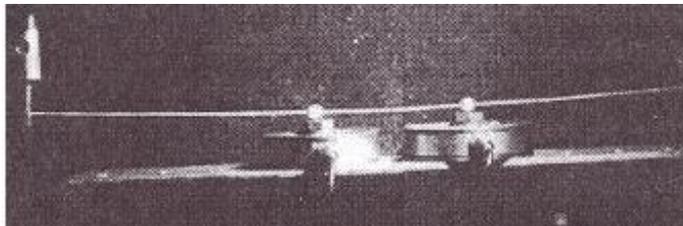


Рис.4

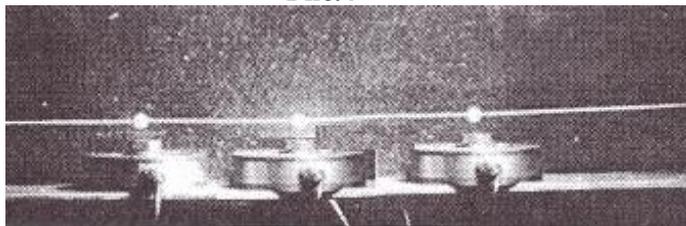


Рис.5.

стробоскопическом освещении цепочки с параллельными ударными парами типа «разряженные» бусы для случаев $N=2$ и $N=3$ частоты резонансных хлопков $f_1=25$ Гц и $f_2=27,5$ Гц соответственно.

На рис.4 показан момент хлопка. Оба тела касаются ограничителя. На рис.5 показан момент «подлета». Видно, что центральное тело опережает боковые. Однако, к моменту хлопка происходит их выравнивание.

9. Расчет трубной виброударной системы. В трубных теплообменных аппаратах энергетического оборудования (схема-рис. 6) износ труб, возникает, в частности,

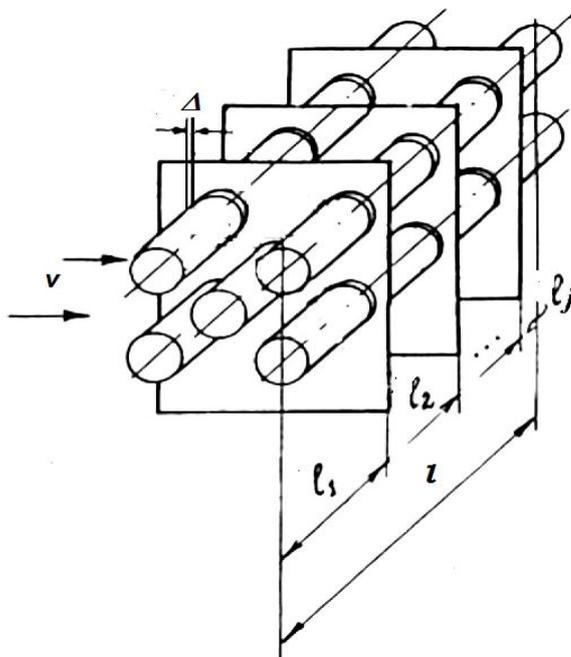


Рис.6

вследствие их систематических соударений с элементами конструкций дистанционирующих решеток [15, 16]. Периодическое (в частности, синусоидальное) возбуждение вибрации труб обусловлено нестационарностью потока жидкости, набегающего на трубы со скоростью v . Рассмотрим систему, представленную на рис. 7. Свободно опертый стержень, моделирующий трубку при совершении колебаний в плоскости (u, x) может взаимодействовать с n плоскими протяженными ограничителями ширины

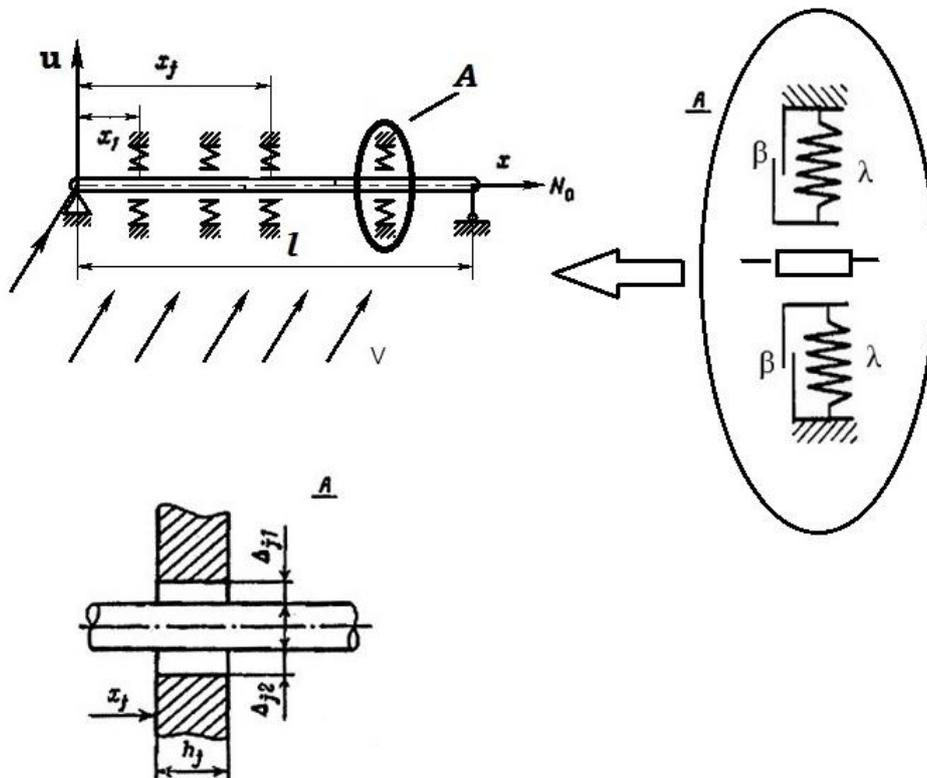


Рис.7

h_j ($j=1, 2, \dots, N$). Параметры системы: длина стержня $l \gg h_j$; растягивающее усилие N_0 жесткость и погонная масса стержня K и ρ ; установочные зазоры $\Delta_{j1,2}$; координаты начал ограничителей $-x_j$ концов $-x_j+h_j$. Будем рассматривать симметричную систему и предположим: $\Delta_{j1} = \Delta_{j2} \equiv \Delta$. Имея в виду учесть конечную продолжительность времени удара, предположим, что взаимодействие происходит в упруго-диссипативных буферах, снабженных демпфером сухого трения, то есть предположим, что взаимодействие отвечает некоторой гистерезисной характеристике.

Предполагая, что малая диссипация учитывается только при взаимодействии и мал уровень возбуждения, запишем уравнение движения в предположении, что стержень моделируется балкой Бернулли

$$\rho u_{tt} + Ku_{4x} - N_0 u_{xx} + \lambda \Phi^*(u) = \varepsilon P(x, t) - \beta \text{sign} u_t [\eta(u - \Delta) - \eta(u + \Delta)], \quad (32)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0.$$

Здесь граничные условия отвечают свободному опиранию; $\varepsilon = O(\lambda^{-1/2})$ - малый параметр; величины $h_j \sim \varepsilon$; $\beta \sim 1$; T_0 - периодическое внешнее возбуждение, предполагается симметричным: $P(x, t) = -P(x, t + T_0/2)$. Пусть упругая симметричная сила взаимодействия описывается функцией из класса симметричных пороговых функций: $\Phi^*(u_k) \in \{\Phi^*\}_\Delta$ [4,5].

Если выбрать линейные характеристики упругой составляющей силы взаимодействия, то, учитывая заданный вид диссипативной составляющей (см. (32)), получим характеристику взаимодействия, данную на рис. 8. Здесь для наглядности её большая крутизна не показана.

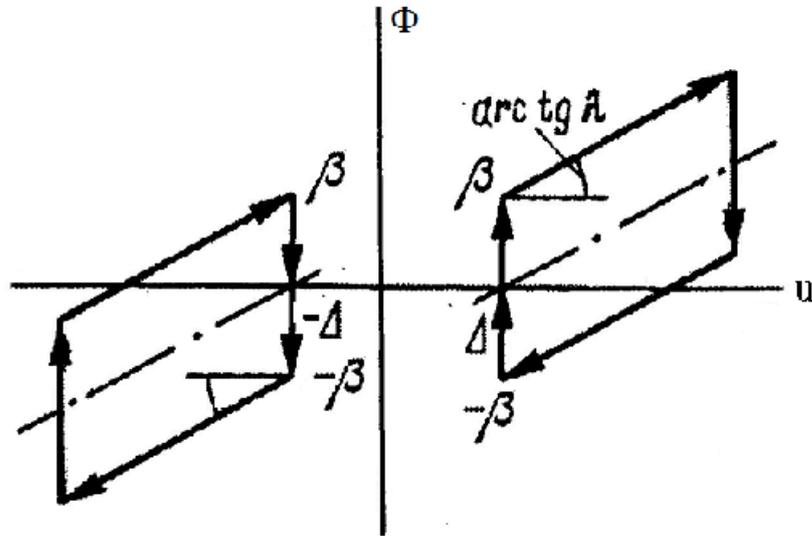


Рис. 8

Снова пользуемся методом сингуляризации и, положив вначале $\varepsilon=\beta=0$, рассмотрим консервативную модель. Предположив, что в системе устанавливаются свободные периодические колебания, перейдем в определяющих соотношения п.4 и ниже к плотностям величин и запишем плотность упругих ударных сил, действующих при $x \in [x_k, x_k+h_k]$, через плотность ударного импульса $I(x)$, распределение фазы $\varphi(x)$ и распределение времен взаимодействия $\tau_{\lambda}(x)$ [15]

$$\lambda \Phi^*[u(x,t)] = \sum_{k=1}^N I(x) \delta^{T/2}[t - \varphi(x) - \tau_{\lambda}(x)] [\eta(x_k) - \eta(x_k + h_k)] \quad (33)$$

где $\eta(x)$ — функция Хевисайда; а двойная дираковская гребенка $\delta^{T/2}$ дается (6). Тогда для искомого поля перемещений имеет место интегральное представление, являющееся аналогом $2N$ -параметрического представления (12)[7]:

$$u(x,t) = - \sum_{n=1}^N \int_{x_k}^{x_k+h_k} \chi^*[x,z,t - \varphi_k(z) - \tau_{\lambda k}(z)] I_k(z) dz, \quad (34)$$

где $\varphi_k(z), \tau_{\lambda k}(z), I_k(z)$ - соответствующие распределения в k -м ударном элементе.

Симметричная ПФГ балки при $0 \leq t \leq T/2$ имеет вид [4,5]:

$$\chi^*(x,z,t) = \frac{1}{\rho l} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_n \cos \frac{1}{4} \Omega_n T]^{-1} \sin \pi n x l^{-1} \sin \pi n z l^{-1} \sin \Omega_n (t - \frac{1}{4} T) \quad (34)$$

и отвечает оператору динамической податливости, действующему из точки z в точку x . Собственные частоты линейной системы $\Omega_n = (\pi^4 n^4 K \rho^{-1} l^{-4} + \pi^2 n^2 N_0 \rho^{-1} l^{-2})^{1/2}$. Вне отрезка $[0, T/2]$ функция (34) продолжается на всю ось по периодичности, исходя из условий симметрии $\chi^*(x,z,t + \frac{1}{2} T) = -\chi^*(x,z,t)$.

Воспользуемся малостью величин h_k , в силу чего динамические процессы в самом ударном элементе оказывают на устанавливающийся режим слабое влияние. Кроме того, очевидно, времена взаимодействия во всех ударных элементах можно принять постоянными: $\tau_{\lambda k}(z) \approx \tau_{\lambda} = \text{const}(x; k)$ и вместо (35) можно перейти к $2n$ -параметрическому представлению вида

$$u(x, t) = - \sum_{k=1}^N J_{\lambda k} \bar{\chi}^*(x, x_k; h_k; t - \varphi_k - \tau_{\lambda}) dz \quad (35)$$

где фигурируют полные импульсы в k -м элементе

$$J_{\lambda k} = \int_{x_k}^{x_k+h_k} I_k(z) dz = \text{const}(x)$$

В представлении (35) входит также усреднённая по малой длине ударного элемента ПФГ $\bar{\chi}^*$:

$$\bar{\chi}^*(x, x_k; h_k; t) = h_k^{-1} \int_{x_k}^{x_k+h_k} \chi^*(x, z, t) dz \quad (36)$$

Внося в (36) формулу (34), после выполнения интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} & \bar{\chi}^*(x, x_k; h_k; t) = \\ & = - \frac{2}{\pi h_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x l^{-1} \sin \pi n (x + \frac{1}{2} h_k) l^{-1} \sin \frac{1}{2} \pi n h_k l^{-1} \sin \Omega_n (t - \frac{1}{4} T)}{n \Omega_n \cos \frac{1}{4} \Omega_n T} \end{aligned} \quad (37)$$

Представление (35) вполне аналогично (12). Оно предполагает, что масса приведенного точечного контактирующего тела $m_k = \rho h_k$, а импульсы J_k могут быть найдены из системы, следующий из представления (35) и дополнительных условий, например, условий синфазности начала взаимодействий во всех ударных парах или других допустимых дополнительных условий. Для синфазных движений получим (ср. с системой (14)):

$$\Delta_j = - \sum_{k=1}^N J_{\lambda n} \bar{\chi}^*(x_j, x_k; h_k; \tau_{\lambda k}) = j = 1, \dots, N. \quad (38)$$

Теперь, как и ранее, предположив, что при реализации резонансного состояния, режим движения приближенно отвечает движению в консервативной системе, найдем условие существования резонансных режимов, исходя из принципа энергетического баланса, в соответствии с которым на периодическом движении балансируются работы неконсервативных сил - возбуждения и диссипации.

В консервативном случае период T есть функция величин $J_{\lambda n} (n = 1, \dots, N)$. Далее, при изучении одночастотных резонансных режимов будем предполагать, что период возбуждающего воздействия лежит среди возможных периодов колебаний консервативной системы $T_0 = T$.

Отметим также, что при практическом использовании сингуляризованных представлений типа (35), можно воспользоваться оценками величин $\tau_{\lambda k}$, полученных

эмпирическим путем, не прибегая к вычислениям, исходящих из представления силы $\lambda\Phi^*[u(x,t)]$, на основании которого величины τ_{jk} должны вычисляться.

10. Трехпролетная трубка. Рассмотрим трехпролетную трубку ($N=2$), моделируемую посредством балки Бернулли.

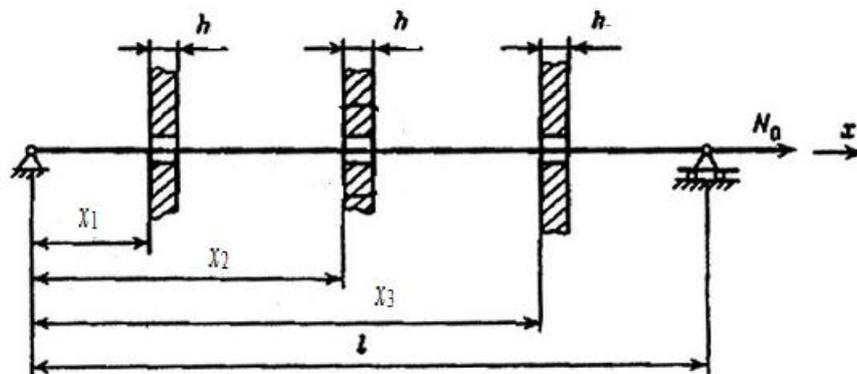


Рис. 9

Положим $h_1=h_2=h$; $\Delta_1=\Delta_2=\Delta$; $x_2=l-x_1-h$. Разрешая систему (24) и обозначая частоту свободных колебаний, из системы (35) находим: $J_{\lambda 1}=J_{\lambda 2}=J_{\lambda}$, где

$$J_{\lambda} = \frac{1}{4} \pi \rho \Delta h \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin \rho(2j-1)x_1 l^{-1} \sin \frac{1}{2} \pi(2j-1) h l^{-1} \sin [\pi(2j-1) l^{-1} (x_1 + \frac{h}{2})]}{(2j-1) \Omega_{2j-1} \cos(\frac{1}{2} \Omega_{2j-1} \pi \omega) [\sin \Omega_{2j-1} (\tau_{\lambda} - \frac{\pi}{2\omega})]^2} \right\}^{-1}, \quad (39)$$

причем эта запись верна только при $\tau_{\lambda} \in [0, \frac{\pi}{\omega}]$. Формула (39) вместе с (37) и (35) описывает хлопки с поочередным взаимодействием с ограничителями в консервативной системе. Приравнявая нулю фигурную скобку (27), можно отыскать частоты, отвечающие бесконечным импульсам, то есть частоты максимального виброизноса.

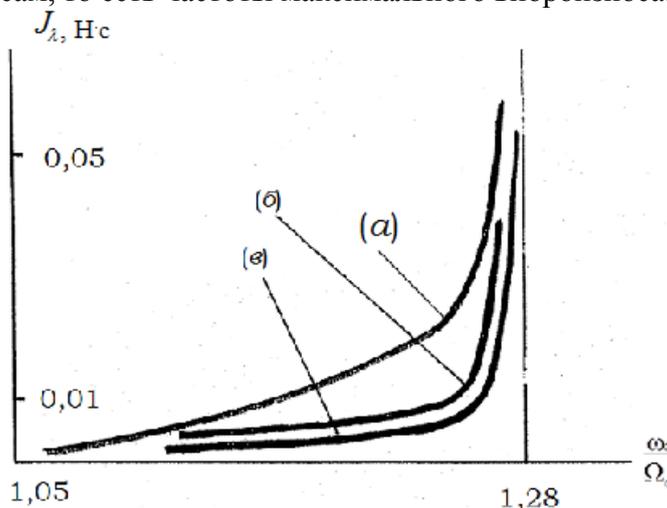


Рис.10

Проведем расчеты при следующих геометрических и физических характеристиках круглой трубки [15]: наружный и внутренний диаметры соответственно $D=16 \cdot 10^{-3}$ и $d=13 \cdot 10^{-3}$ м, модуль Юнга $E=2 \cdot 10^{11}$ Н·м⁻², откуда $K=1/64 \pi E(D^4-d^4)=363$ Н·м⁻²; длина трубки $l=3$ м, $\rho=1,1$ кГ/м, $N_0=4 \cdot 10^3$ Н, $h=10^{-2}$ м, $\tau_{\lambda}=510^{-4}$ с.

Частотные зоны, в которых формально могут существовать режимы движения типа хлопков, определяются условием $J_\lambda \geq 0$. Для нахождения их границ необходимо определить частоты, при которых $J_\lambda = 0$ и $J_\lambda \rightarrow \infty$. Численные расчеты показывают, что одна такая зона существует справа от первой собственной частоты линейной системы и занимает интервал $]1,05\Omega_1, 1,28\Omega_1[$. При расчетах учитывалось 22 члена ряда (39). Контроль сходимости осуществлялся численно. Наряду с указанной зоной были выявлены и другие, оказавшиеся весьма узкими; их рассмотрение в данном случае не имеет практического смысла. Сделанное замечание находится в согласии с экспериментом [12 - 14].

Ограничиваясь опытно наблюдаемыми хлопками — режимами, устанавливающимися справа от первой собственной частоты линейной системы, можно получить зависимости, показанные на рис. 10 (кривая (а) отвечает случаю $x_1=0,7$; (б) — $0,85$; (в) — 1

Пусть в уравнении (32) $P(x,t) = P_1 \sin \pi x l^{-1} \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Рассмотрим вынужденные резонансные колебания синхронного типа, которые могут для осуществляться только, если частота ω_0 попала в интервал собственных частот $]1,05\Omega_1, 1,28\Omega_1[$.

Будем описывать движения при посредстве (35)-(37), (39), считая, как отмечалось, что изучаемый режим близок к режиму свободных колебаний $u^{(0)}$ и $\omega_0 = \omega$:

$$u(x,t) \approx u^{(0)}(J_\lambda; x,t) + \dots, \quad (40)$$

где импульс J_λ дается формулой (39).

Совместив удар с началом отсчета времени, будем считать фазу неизвестной. Для ее нахождения воспользуемся принципом энергетического баланса [см.(30)], который в данном случае записывается на полупериоде:

$$\int_0^{T/2} \int_0^{T/2} P_1 \sin \pi x l^{-1} \cos(\omega_0 t + \varphi) u_t^{(0)}(x, t - \tau_\lambda) dt = \int_0^{T/2} \int_0^{T/2} \beta \text{sign} u_t^{(0)} [\eta(u^{(0)} - \Delta) - \eta(u^{(0)} + \Delta)] u_t^{(0)}(x, t - \tau_\lambda) dt, \quad (41)$$

где в левой части помещена работа силы внешнего источника на движении $u^{(0)}(x,t)$ ($T=T_0$); в правой части — выражение для потерь энергии при взаимодействии [см. (32) и рис. 8]. Из уравнения (41), учитывая найденные соотношения, можно получить условие существования резонансного режима (40) ($|\sin(\varphi + \tau_\lambda)| \leq 1$):

$$P_1 \geq \left| \frac{E_c[\beta; J^{(0)}(\omega_0); \tau_\lambda; h; x_1] \pi (\Omega_1^2 - \omega^2 + \alpha)}{4l \omega \sin \frac{\pi h}{2l} \sin \frac{\pi}{l} (x_1 + 0,5h)} \right|, \quad \alpha = O(\lambda^{-1/2}).$$

Входящая сюда величина $E_c[\beta; J^{(0)}(\omega_0); \tau_\lambda; h; x_1]$ в соответствии со структурой правой части (41) определяет потери энергии при взаимодействии.

Аналогично анализируются несимметричный случай решетчатого ограничителя, а также другие типы движений, устанавливающихся в подобных системах.

11. Благодарность и поддержка. Автор благодарен А.М. Веприку, совместно с которым были выполнены эксперименты.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-19-30026).

Список литературы

1. Крупенин В. Л. О колебаниях систем с большими упругими силами порогового типа // Изв. АН СССР. МТТ.1983. №4. С. 76-84
2. Асташев В. К. Периодические движения упругого стержня с ограничителем. – В кн.: Динамика машин с учетом упругости и переменности масс. М.: Наука, 1965, с. 128 – 134.
3. Крупенин В. Л. Расчет механизмов с пороговыми нелинейностями методом сингуляризации // Машиноведение. 1984. № 1. С. 6-12.
4. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.p.
5. Бабицкий В. И., Крупенин В. Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 320 с.
6. Крупенин В.Л. Виброударные процессы в семействе упругих систем с взаимодействующими граничными элементами посредством неньютоновских ударов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 4. С. 10 -20.
7. Крупенин В. Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения "импульс-фаза" // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 1. С. 34-42
8. Крупенин В.Л. О расчете вибрационных процессов в решетчатых двумерных конструкциях // Проблемы машиностроения и надежности машин. № 3. 2006 г.
9. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. №5 С.13-30.
10. Веприк А. М., Вознюк П. Д., Крупенин В. Л. и др. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний. Л.: Машиностроение, 1987. 79 с.
11. Krupenin V.L Vibro-Impact Processes in Systems with Large Number Impact Pairs and Distributed Impact Elements // Dynamics of vibro-impact systems. Euromech Colloquium 386. September, 1998. Loughborough University, England, 1998.
12. Бабицкий В.Л., Веприк А.М., Крупенин В.Л. Виброударные эффекты при ограниченных колебаниях одномерной цепочки, упруго соединенных бусинок. // ДАН СССР. 1988. Т.3. № 3.1988. С. 562-566.
13. Асташев В.К., Крупенин В.Л., Тресвятский А.Н. Экспериментальное исследование синхронизации ударов в распределенных системах с параллельными ударными парами // ДАН. 1996. т. 351. №1. С. 44 – 47.
14. Асташев В.К., Крупенин В.Л., Тресвятский А.Н. Экспериментальное исследование синхронизации ударов в распределенных системах с варьируемым числом ударных пар // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1996. № 2. С. 96 – 101.
15. Крупенин В.Л. Представление виброударных процессов через определяющие физические параметры движения «импульс – фаза». Часть II: Приложение. Расчет балочных и трубчатых конструкций // Интернет-журнал Вестник научно-технического развития. 2011. № 10 (50) С. 25-30.
16. Каплунов С.М., Вальес Н.Г., Горелов Е.В., Шитова Л.И. Метод математического моделирования гидродинамических механизмов возбуждения вибраций теплообменных пучков труб // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С.107-112.