УДК 534.11

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ

© Владислав Львович Литвинов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Самарский государственный технический университет"

СамГТУ, Самара, Россия

vladlitvinov@rambler.ru,

Аннотация. *Рассматривается решение интегро-дифференциального уравнения применительно к задачам, описывающим колебания объектов с движущимися границами. Решение производится в безразмерных переменных с точностью до величин второго порядка малости относительно малых параметров, характеризующих скорость движения границы. Приводятся результаты, полученные для амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде. Исследуется явление установившегося резонанса и прохождения через резонанс.*

Ключевые слова: *интегро-дифференциальные уравнения, резонансные свойства, колебания систем с движущимися границами, законы движения границ, амплитуда колебаний.*

ABOUT ONE SOLUTION INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS OSCILLATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH MOVING BOUNDARIES

© V.L. Litvinov

Samara State Technical University, Samara, Russia

Abstract*. Considered solution of integro-differential equations applied to the problems described oscillations of objects with moving boundaries. Solution is produced in dimensionless variables up to the second order relative to small parameters characterizing the speed of the border. The results obtained for the amplitude of the vibrations corresponding to the n-th dynamic mode. Investigation the phenomenon of resonance and steady passage through resonance.*

Key words: *integral-differential equations, resonance properties, oscillations in systems with moving boundaries, the laws of motion of the boundaries, oscillation amplitude.*

В настоящее время вопросы надежности при проектировании машин и механизмов требуют все более полного учета динамических явлений, имеющих место в проектируемых объектах. Широкое распространение в технике имеют механические объекты с движущимися границами. Это канаты в грузоподъемных установках, ленты в лентопротяжных механизмах, звенья передач с гибкой связью, стержни твердого топлива при сгорании и т.д. [1-7]. В данной работе особое внимание уделено анализу получаемых решений на резонансные свойства.

Пусть требуется получить решение дифференциального уравнения в частных производных:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L[U(\xi,\tau)]=\varphi(\xi,\tau) \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$Y_{ji}[U(\mathrm{l}_j(\varepsilon\tau),\tau)]=F_{ji}(\tau);\ i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,2}\,, \quad (2)$$

где L - линейный однородный дифференциальный оператор по ξ порядка *2m*; $Y_{ji}-$ линейные однородные дифференциальные операторы по ξ; $\varphi(\xi,\tau); F_{ji}(\tau)-$ заданные функции класса C^1; $\varepsilon-$ малый параметр (обычно величина ε соизмерима с $v/a,\ v-$ скорость границы, $a-$ скорость распространения колебаний).

Запись законов движения границ в виде $\mathrm{l}_j(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения.

Для того чтобы избавиться от неоднородностей в граничных условиях, вводится новая функция

$$U(\xi,\tau)=V(\xi,\tau)+H(\xi,\tau), \quad (3)$$

где

$$H(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m}D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)F_{kr}(\tau),$$

а функция $D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)$ удовлетворяют уравнению

$$L\left[D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)\right]=0 \quad (4)$$

и условиям

$$Y_{ji}\left[D_{kr}\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=\begin{cases}1, k=j\wedge r=i;\\ 0, k\neq j\vee r\neq i.\end{cases} \quad (5)$$

Функция $V(\xi,\tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L\left[V(\xi,\tau)\right]=\varphi(\xi,\tau)-H_{\tau\tau}(\xi,\tau); \quad (6)$$

$$Y_{ji}\left[V\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right]=0. \quad (7)$$

В работе [8] получено интегро-дифференциальное уравнение, соответствующее задаче (6), (7), в виде

$$V(\xi,\tau)=-\int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)}K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau)-\varphi(\zeta,\tau)+H_{\tau\tau}(\zeta,\tau)\right]d\zeta, \quad (8)$$

где $K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)$ - симметричное по ξ и ζ ядро, зависящее от времени через параметр $\varepsilon\tau$.

Решение задачи (8) будем искать в виде ряда:

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau), \quad (9)$$

где $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ - собственные функции, в качестве которых выбраны формально построенные решения интегрального уравнения

$$X_n(\xi,\varepsilon\tau)=\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)}K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)d\zeta, \qquad (10)$$

где $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр.

Такой выбор координатных функций X_n обусловливает тот факт, что решение (9) является точным в случае, если границы неподвижны. При увеличении скорости движения границ точность метода будет уменьшаться.

Заметим, что функции $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (7) и играют в данном случае роль динамических, т.е. изменяющихся со временем, мод.

Разложим симметричное по ξ и ζ ядро в ряд по собственным функциям $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ [9]:

$$K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\zeta,\varepsilon\tau)}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}, \qquad (11)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)-$ собственные частоты задачи, определяемые по формуле

$$\frac{1}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}=\int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)}\int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)}K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\zeta,\varepsilon\tau)d\xi d\zeta. \qquad (12)$$

Продифференцируем ряд (9) по времени, принимая во внимание правило дифференцирования функций «медленного времени»:

$$V_\tau(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n'(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)+\varepsilon l'(\varepsilon\tau)X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)f_n(\tau)\right]. \qquad (13)$$

После повторного дифференцирования найдем вторую производную ряда (9):

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{f_n''(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)+2\varepsilon l'(\varepsilon\tau)X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)f_n'(\tau)+$$
$$+\varepsilon^2\left[l'^2(\varepsilon\tau)X_{n_{\tau\tau}}(\xi,\varepsilon\tau)+l''(\varepsilon\tau)X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)\right]f_n(\tau)\Big\}. \qquad (14)$$

В большинстве практических задач границы движутся в медленном режиме и параметр ε мал, поэтому в дальнейшем величины порядка ε^2 учитываться не будут.

Подставляя ряды (9), (11), (14) в уравнение (8) и применяя условие ортогональности функций $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ с весом $g(\xi)$, получим с точностью до ε^2 бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в виде

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)f_n''(\tau)+2\varepsilon l'(\varepsilon\tau)A_{2n}(\varepsilon\tau)f_n'(\tau)+A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)f_n(\tau)=\theta_n(\tau), \qquad (15)$$

где

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)=\int\limits_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi;$$

$$\varepsilon l'(\varepsilon\tau)A_{2n}(\varepsilon\tau)=\int\limits_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi;$$

$$\theta_n(\tau)=\int\limits_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi,\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi-\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m}Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)F_{kr}(\varepsilon\tau).$$

Уравнение (15) совпадает с уравнением, полученным по методу Канторовича-Галеркина [10], поэтому дальнейшее решение производится аналогично.

Для преобразования уравнения (15), чтобы оно не содержало члена с $f_n'(\tau)$, введем новую функцию

$$f_n(\tau)=A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau), \tag{16}$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau)=\exp[-\int\limits_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\zeta)}{A_{1n}(\varepsilon\zeta)}d\zeta]. \tag{17}$$

В этом случае уравнение (15) будет иметь вид:

$$y_n''(\tau)+\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau)=\theta_n(\tau)/[A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)]. \tag{18}$$

Пусть внешнее воздействие на систему носит гармонический характер, т.е.

$$\varphi(\xi,\tau)=B_0(\xi)\cos W_0(\tau), \tag{19}$$

$$F_{ji}(\tau)=B_{ji}\cos W_{ji}(\tau);\ \ j=\overline{1,2};\ i=\overline{1,m}, \tag{20}$$

где $B_{ji}-$ постоянные величины;

$W_0(\tau), W_{ji}(\tau)-$ монотонно возрастающие функции;

$B_0(\xi)-$ функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки.

Ограничимся рассмотрением случая, когда правую часть уравнения (18) можно представить в виде:

$$\theta_n(\tau)/[A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)]=M_n(\varepsilon\tau)\cos W_n(\tau), \tag{21}$$

где

$$M_{nji}(\varepsilon\tau)=\frac{-B_{ji}\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{nji}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)};\qquad Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)=-\frac{\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi}{\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi}.$$

С учетом изложенного, уравнение (18) примет вид:

$$y_n''(\tau)+\omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau)=M_n(\varepsilon\tau)\cos W_n(\tau). \tag{22}$$

Решение данного уравнения при начальных условиях $y(0)=0,\ y'(0)=0$ записывается следующим образом [11]:

$$y_n(\tau) = \int_0^{\tau} \gamma_n(\tau,\zeta) M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) d\zeta, \qquad (23)$$

где

$$\gamma_n(\tau,\zeta) = \frac{y_{1n}(\tau) y_{2n}(\zeta) - y_{1n}(\zeta) y_{2n}(\tau)}{y_{1n}(\zeta) y'_{2n}(\zeta) - y'_{1n}(\zeta) y_{2n}(\zeta)}, \qquad (24)$$

а y_{1n}, y_{2n} – линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (16).

С помощью метода малого параметра [12] найдем:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau); \qquad (25)$$

$$y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau), \qquad (26)$$

где функции $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \omega_{0n}(\varepsilon\tau); \\ \dfrac{da_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = -\dfrac{a_n(\varepsilon\tau)}{2\omega_n(\varepsilon\tau)} \cdot \dfrac{d\omega_n(\varepsilon\tau)}{d\tau}. \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$w_n(\tau) = \int_0^{\tau} \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau; \quad a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}}.$$

Возвращаясь к решению (23), с учетом (24) - (26) получим:

$$y_n(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau) \int_o^{\tau} \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \cos w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w'_n(\zeta)} d\zeta \; -$$

$$-a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau) \int_o^{\tau} \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \sin w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w'_n(\zeta)} d\zeta.$$

Разлагая произведение тригонометрических функций в сумму и учитывая замену (16), можно получить следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующих n-ой динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \{ [\int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta]^2 +$$

$$+ [\int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta]^2 \},$$

где

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w'_n(\zeta)}; \; \Phi_{n1}(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta); \quad \Phi_{n2}(\zeta) = w_n(\zeta) + W_n(\zeta).$$

Здесь функция $F_n(\varepsilon\zeta)$ знакопостоянна, так как функции $M_n(\varepsilon\zeta)$ положительны, а произведение $a_n(\varepsilon\zeta)\, w'_n(\zeta)$ знакопостоянно (оно равно якобиану двух линейно независимых функций y_{1n} и y_{2n}). Функции $w_n(\zeta)$ и $W_n(\zeta)$ монотонно возрастают, поэтому фаза

$\Phi_{n2}(\zeta)$ изменяется быстрее фазы свободных колебаний, которая определяется функцией $w_n(\zeta)$. Следовательно, участок знакопостоянства функций $\sin\Phi_{n2}(\zeta),\ \cos\Phi_{n2}(\zeta)$ меньше половины периода свободных колебаний, т. е. период возрастания соответствующих интегралов невелик. Интегралы же, содержащие $\sin\Phi_{n1}(\zeta),\ \cos\Phi_{n1}(\zeta)$, возрастают в течение всего периода, пока наблюдается резонансное явление, и вносят основной вклад в амплитуду. Пренебрегая членами, содержащими $\Phi_{n2}(\zeta)$, получим следующее выражение для амплитуды колебаний:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4}A_{on}^2(\varepsilon\tau)a_n^2(\varepsilon\tau)\{[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta]^2 + [\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta]^2\}. \tag{27}$$

Полученное выражение удобно для анализа резонансных свойств систем с движущимися границами. В таких системах различают два вида резонансных явлений: установившийся резонанс и прохождение через резонанс [7].

Установившийся резонанс - это явление резкого увеличения амплитуды колебаний в случае, когда изменение частоты внешней силы и одной из собственных частот согласованы таким образом, что создаются наилучшие условия для возрастания амплитуды.

Прохождение через резонанс – это явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты.

Заметим, что при стремлении скорости движения границ к нулю, явление установившегося резонанса и явление прохождения через резонанс вырождаются в явления обычного резонанса для системы с неподвижными границами.

Из выражения (27) следует, что установившийся резонанс будет наблюдаться, если $\Phi_{n1}(\zeta) = \gamma = const$.

Явление прохождения через резонанс наблюдается во временной области, содержащей точку τ_0, где $\Phi'_{n1}(\tau_0) = 0$. В этой точке мгновенная частота *n*-го собственного колебания проходит через значение возмущающей частоты. Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки τ_0 и заканчивается за этой точкой. Если принять амплитуду в начале резонансной области (точка τ_1) равной нулю, то амплитуда в конце резонансной области (точка τ_2) будет определяться следующим выражением:

$$A_n^2(\tau_1;\tau_2) = E_n^2(\tau_2)\{[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta]^2 + [\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_{n1}(\zeta)d\zeta]^2\}. \tag{28}$$

Исследование прохождения через резонанс заключается в определении границ резонансной области τ_1 и τ_2, соответствующих максимуму выражения (28), причем $\tau_1 < \tau_0$, а $\tau_2 > \tau_0$.

Список литературы

1. *Савин Г.Н., Горошко О.А*. Динамика нити переменной длины // Наук.думка, Киев, 1962, стр. 332

2. *Весницкий А.И., Потапов А.И.* Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. Горьковский университет. – 1975. – №7. – С. 84-89.

3. *Колосов Л.В.* Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. вузов: Горный журнал. – 1981. – №3. – С. 83-86.
4. *Самарин Ю.П., Анисимов В.Н.* Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне // Изв. вузов. Машиностроение, 1986, (12), 17-21.
5. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159-161.
6. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно-технического развития. № 4 (92), 2015.
7. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 стр.
8. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
9. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, 4. Физматгиз, М., 1958.
10. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2009, 1 (18), 149-158.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
12. *Митропольский Ю.А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 432 с.