УДК 531

Построение усредненной динамики двойного уравнения синус-Гордон при действии быстро осциллирующего периодического возбуждения

©Владимир Шепселевич Бурд

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
vburd1@gmail.com

Аннотация.
Рассматривается двойное уравнение синус-Гордон. На систему действует периодическое возмущение, представляющее собой быстро осциллирующую периодическую функцию с нулевым средним значением и большой амплитудой. Влияние возмущения на динамику кинков определяется с помощью построения нормализованных (усредненных) уравнений и вычисления кинков усредненного уравнения. Для построения усредненной динамики применяется классический метод усреднения.

Ключевые слова: двойное уравнение синус-Гордон, периодическое возбуждение, метод усреднения, функции Беселя.

Construction of averaged dynamics for double sine-Gordon equation with rapidly oscillating periodic perturbation

Vladimir Sh. Burd

Demidov Yaroslavl State University

Abstract
The double sine-Gordon equation is considered. Rapidly oscillating periodic excitation with zero mean and a large amplitude is acting on the system. Effect of perturbation on the dynamics of kinks is determined by constructing normalized (averaged) equations and calculations of kinks of averaged equation. The averaged dynamics is constructing. The classical method of averaging is used.

Key words: double sine-Gordon equation, periodic excitation, method of averaging, Bessel functions.

1. Введение

Двойное уравнение синус-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u + \lambda \sin 2u = 0 \tag{1}$$

используется при исследовании различных физических задач (см. [1]), например, в задаче о распостранении резонасных коротких световых импульсов в среде с вырожденными атомными переходами и задаче распостранения спиновых волн в сверхтекучей жидкости ^3He.

Мы изучим действие быстро осциллирующего возбуждения на динамику кинков системы (1). Эффект быстро изменяющихся возмущений на динамику нелинейных систем может привести к существенному изменению поведения системы в смысле усредненной динамики. В частности, привести к стабилизации некоторых типов динамических режимов (см.[2–10]). Большое внимание уделялось уравнению синус-Гордон (см. [2–10].

Влияние возмущений на динамику кинков определяется следующий образом. Тем или иным способом строятся нормализованные уравнения. Затем вычисляются кинки нормализованных уравнений.

Основной аналитический метод исследования соответствующих задач в работах [2-4] состоит в следущем. Приближенное решение исследуемого уравнения ищется в виде ряда Фурье с медленно меняющимися коэффициентами. Метод часто приводит к громоздким вычислениям и неясным результатам. В работах [5–8] усредненные уравнения строятся следующим образом. Вводится гамильтониан системы и выполняется несколько канонических преобразований, которые позволяют устранить быстро осциллирующие слагаемые из членов низших порядков гамильтониана. В [9–10] для построения усредненных уравнений применяется классический метод усреднения (см. [11]). Вводится малый параметр ε, что позволяет сделать предположения о величине, входящих в уравнение синус-Гордон слагаемых. В этой работе применяется также классический метод усреднения.

2. Усредненная динамика двойного уравнения синус-Гордон в присутствии вынужденной быстро осциллирующей периодической силы с большой амплитудой

Рассмотрим двойное уравнение синус-Гордон с быстро осциллирующим периодическим возмущением

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u + \lambda \sin 2u = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

где ε - малый параметр, λ - постоянная, $f(t)$ - периодическая функция с периодом $2\pi/\Omega$ и нулевым средним значением. Мы предполагаем, что амплитуда возбуждения пропорциональна квадрату частоты возбуждения, M - постоянная. В уравнении (2) сделаем замену

$$u = v + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{3}$$

где $F''(t) = f(t)$. После замены уравнение (2) принимает вид

$$v_{tt} - v_{xx} + \sin\left[v + AF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right] + \lambda\sin 2\left[v + AF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right] = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$v_{tt} - v_{xx} + A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin v + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\cos v + \lambda C\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin 2v + \lambda D\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\cos 2v = 0, \qquad (4)$$

где

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right),\ B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right),$$
$$C\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos 2\left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right),\ D\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin 2\left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right).$$

В уравнении (4) перейдем к быстрому времени

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Получим уравнение

$$v_{\tau\tau} - \varepsilon^2\{v_{xx} - A(\tau)\sin v - B(\tau)\cos v - \lambda C(\tau)\sin 2v - \lambda D(\tau)\cos 2v\} = 0, \qquad (5)$$

От уравнения (5) перейдем к эквивалентной системе уравнений первого порядка в частных производных. Получим систему с правой частью пропорциональной параметру ε

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial v}{\partial \tau} = \varepsilon w, \\ &\tfrac{\partial w}{\partial \tau} = \varepsilon[v_{xx} - A(\tau)\sin v - B(\tau)\cos v - \lambda C(\tau)\sin 2v - \lambda D(\tau)\cos 2v]. \end{aligned} \qquad (6)$$

К этой системе применим классический метод усреднения (см. [11]). Усредняя систему (6), получим усредненную систему первого приближения

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \overline{v}}{\partial \tau} = \varepsilon \overline{w}, \\ &\tfrac{\partial \overline{w}}{\partial \tau} = \varepsilon[\overline{v}_{xx} - A\sin\overline{v} - B\cos\overline{v} - \lambda C\sin 2\overline{v} - \lambda D\cos 2\overline{v}], \end{aligned} \qquad (7)$$

где

$$A = \langle A(\tau)\rangle,\ B = \langle B(\tau)\rangle,\ C = \langle C(\tau)\rangle,\ D = \langle D(\tau)\rangle.$$

Здесь $\langle g(\tau)\rangle$ - среднее значение периодической функции $g(\tau)$. Усредненную систему (7) можно записать в виде одного уравнения второго порядка

$$\overline{v}_{\tau\tau} - \varepsilon^2\overline{v}_{xx} + \varepsilon^2[A\sin\overline{v} + B\cos\overline{v} + \lambda C\sin 2\overline{v} + \lambda D\cos 2\overline{v}] = 0.$$

В исходном времени t усредненное уравнение принимает вид

$$\begin{gathered} \overline{v}_{tt} - \overline{v}_{xx} + [A\sin\overline{v} + B\cos\overline{v} \\ +\lambda C\sin 2\overline{v} + \lambda D\cos 2\overline{v}] = 0. \end{gathered}$$

При $\lambda = 0$ уравнение (2) переходит в возмущенное уравнение синус-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

В этом случае усредненное уравнение во времени t имеет вид

$$\overline{v}_{tt} - \overline{v}_{xx} + A \sin \overline{v} + B \cos \overline{v} = 0.$$

В качестве примера положим

$$f(t) = -\sin \Omega t,$$

где $\Omega > 0$ - постоянная. Из известных формул Якоби для функций Бесселя (см., напр.[12])

$$\cos(z \sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z)\cos(2k\theta),$$
$$\sin(z \sin\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z)\sin[(2k+1)\theta)],$$

где $J_k(z)$ - функция Бесселя целого порядка k (в нашем случае $z = M\Omega^{-2}$, $\theta = \Omega t$) следует, что

$$A = \langle A(t)\rangle = J_0(M\Omega^{-2}), B = \langle B(t)\rangle = 0,$$

$$C = \langle \cos 2(M\Omega^{-2} \sin \Omega t)\rangle = 2J_0^2(M\Omega^{-2}) + 4\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}^2(M\Omega^{-2}) - 1, \qquad D = \langle D(t)\rangle = 0.$$

Поэтому усредненное уравнение принимает вид

$$\overline{v}_{tt} - \overline{v}_{xx} + \alpha \sin \overline{v} + \beta \sin 2\overline{v} = 0, \tag{8}$$

где

$$\alpha = J_0(M\Omega^{-2}), \quad \beta = \lambda[2J_0^2(M\Omega^{-2}) + 4\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}^2(M\Omega^{-2}) - 1)].$$

Уравнение (8) имеет в качестве решений кинки (см. [13])

$$u(x,t) = 2\arctan\left[\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}}\tanh\left(\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha}{2\beta(c^2-1)}}(x-ct)+x_0\right)\right]$$

при $\alpha < \beta$. Для $\alpha > \beta$ получим аналогичное выражение.

При $\lambda = 0$ получаем усредненное уравнение для уравнения синус-Гордон с вынужденным быстро осциллирующим воздействием

$$\overline{v}_{tt} - \overline{v}_{xx} + J_0(M\Omega^{-2}) \sin \overline{v} = 0.$$

В [1] при описании спиновых волн в жидкости ^{3}He было приведено уравнение

$$u_{xx} - u_{tt} = -\left(\sin u + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}u\right) - \gamma\omega\Omega_t^{-2}B_1\sin(\omega\Omega_t^{-1}t),$$

где γ, ω, Ω_t, B_1 - некоторые физические параметры.

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} - \left(\sin u + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}u\right) = \frac{M}{\epsilon^2}\sin\Omega t. \qquad (9)$$

Выполним, как и в уравнении (2), замены

$$u = v + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

где

$$F(t) = -M\Omega^{-2}\sin\Omega t.$$

Переходя к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$ и затем к системе уравнений в частных производных, получим систему

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varepsilon w,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \varepsilon[v_{xx} + A(\tau)\sin v + B(\tau)\cos v + \tfrac{1}{2}C(\tau)\sin\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}D(\tau)\cos\tfrac{1}{2}v],$$

где

$$A(\tau) = \cos(-M\Omega^{-2}\sin\Omega t), \quad B(\tau) = \sin(-M\Omega^{-2}\sin\Omega\tau),$$

$$C(\tau) = \cos\frac{1}{2}(-M\Omega^{-2}\Omega\tau), \quad D(\tau) = \sin\frac{1}{2}(-M\Omega^{-2}\Omega\tau).$$

С помощью формул Якоби для функций Бесселя вычисляем средние значения функций $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$, $D(\tau)$. Усредненная динамика для (9) определяется уравнением

$$v_{tt} - v_{xx} - A\sin v - B\cos v - \frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}v = 0,$$

где

$$A = \langle A(\tau)\rangle = \quad B = \langle B(\tau)\rangle, \quad C = \langle C(\tau)\rangle, \quad D = \langle D(\tau)\rangle.$$

Литература

1. Буллаф Р., Кодри Ф., Гиббс Г. Двойное уравнение sine-Gordon: система, имеющая физические приложения в сборнике Солитоны под редакцией Буллаф Р., Кодри Ф., М.: Мир, 1983.- 408 с.

2. Gronbech-Jensen N., Kivshar Yu. S., Samuelsen M.R. Stabilization breathers in a parametrically driven sine-Gordon system with loss // Physical Review B, 1991, vol. 43, no. 7, pp. 5698–5701.

3. Kivshar Yu. S., Gronbech-Jensen N., Samuelsen M.R. π kinks in a parametricaly driven sine-Gordon chain // Physical Review B, 1992, vol. 45, no. 14, pp. 7789–7794.

4. Kivshar Yu. S., Gronbech-Jensen N., Parmentier R. D. Kinks pn the presence of rapidly varying perturbations // Physical Review E., 1994, vol. 49, no. 5, pp. 4542–4551.

5. Rasmussen K., Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N. High-order effects on Shapiro steps in Josephon junctions, Physical Review B, 1999, vol. 59, n. 1, p. 58–61.

6. Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M. Parametrically forced sine-Gordon equation and domain wall dynamics in ferromagnets, Physical Review, 1998, vol. 57, no. 9, pp. 5033–5035.
7. Mitkov I., Zharnitsky V. π-Kinks in parametrically driven sine-Gordon equation and application, Physica D, 1998, vol. 123, pp. 301–307.
8. Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N. π kinks in strongly ac driven sine-Gordon systems, Physical Review E, 1998, vol. 58, n 1, R52–R55.
9. Бурд В.Ш. π-кинки в параметрически возбужденном уравнении синус-Гордон, ВНТР, N 9(61), 2012, с. 1–7, Электронный журнал, http://vntr.ru/
10. Бурд В.Ш. Кинки в сильно периодически возмущенном уравнении синус-Гордон, ВНТР, N 3(79), март 2014, Электронный журнал, http://vntr.ru/
11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М.: Наука, 1974.- 411 с.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами под ред. М. Абрамовица и Стигун И.- М.: Наука, 1979.-832 с.
13. Wazwaz A-M. The tanh method and a variable separated ODE method for solving double sine-Gordon equation, Physics Letters A 350(2006) 367-370.