

УДК 534.1

## ЭФФЕКТЫ СИНХРОНИЗАЦИИ РОТОРОВ В СИСТЕМАХ ДВУХ И ТРЕХ ДВИГАТЕЛЕЙ

© Борис Александрович Гордеев<sup>1</sup>, Анна Викторовна Леонтьева<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт проблем машиностроения Российской академии наук<sup>2</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского  
Нижний Новгород, Россия[gord349@mail.ru](mailto:gord349@mail.ru)

**Аннотация.** В работе изучаются вопросы синхронизации неуравновешенных роторов асинхронных электродвигателей, установленных на общем вязко-упругом основании. Выявляются причины возникновения режимов синхронизации. Рассматриваются математические модели систем двух и трех двигателей. Обнаружены стационарные режимы синхронизации. Определены условия возникновения этого режима. Выявлены условия диссипации, влияющие на устойчивость синхронизации.

**Ключевые слова:** синхронизация; метод осреднения; резонанс; стационарный режим; асинхронный двигатель.

## THE EFFECT OF SYNCHRONIZATION OF THE ROTOR IN A SYSTEM OF TWO AND THREE ENGINES

© Boris A. Gordeev<sup>1</sup>, Anna V. Leontieva<sup>2</sup><sup>1</sup>Mechanical Engineering Research Institutes, Russian Academy of Sciences<sup>2</sup>Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

Nizhny Novgorod, Russia

[gord349@mail.ru](mailto:gord349@mail.ru)

**Abstract.** In this paper we study the synchronization of unbalanced rotors of asynchronous electric motors installed on the common visco-elastic foundation. The reasons of occurrence of synchronization modes. Mathematical models of systems of two and three engines. Found stationary timing. The conditions for the occurrence of this regime. The conditions of dissipation, affecting the stability of synchronization.

**Keywords:** synchronization; averaging method; resonance; steady-state conditions; asynchronous motor.

### Введение

Впервые эффекты синхронизации наблюдал Гюйгенс в начале второй половины семнадцатого столетия, когда двое маятниковых часов, ходивших по-разному, начинали ходить совершенно одинаково (синхронно), если их прикрепляли к общей подвижной балке [1]. На сегодняшний день эффекты синхронизации наблюдаются и широко используются в различных областях науки и техники.

Явления синхронизации и самосинхронизации неуравновешенных роторов – важные явления механики. Известно, что два или более кинематически и электрически не связанных между собой ротора, установленные на общем подвижном основании и приводимые в движение независимыми асинхронными двигателями, вращаются синхронно – с одинаковыми или кратными средними угловыми скоростями и с определенными взаимными фазами. При этом согласованность вращения роторов возникает, несмотря на различие между их парциальными угловыми скоростями, т.е. теми скоростями, с которыми они вращаются, будучи установленными на неподвижном основании [1-4].

В природе и технике синхронизация встречается довольно часто и играет как положительную, так и отрицательную роль [5]. Одна из причин многих аварий в энергоёмком оборудовании является синхронизация частот вращения роторов, посредством вибрации основания в процессе работы двигателей. Режимы синхронизации возникают произвольно при подходящих параметрах конструкции, такие режимы устойчивы и разрушить их очень сложно. Поэтому задача о выявлении стационарных режимов синхронизации, их устойчивости и своевременное предотвращение отрицательного эффекта синхронизации в конструкциях со многими источниками вибрации, является одной из важных задач механики и техники [6, 7].

### Синхронизация в системе двух двигателей

Математическая модель, описывающая движение колебательной системы, представляет систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + k\dot{y} + py - m_1 r_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) - m_2 r_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2) &= 0, \\ I_1 \ddot{\varphi}_1 + H_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) - L_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1) - m_1 r_1 \ddot{y} \sin \varphi_1 &= 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + H_2(\varphi_2, \dot{\varphi}_2) - L_2(\varphi_2, \dot{\varphi}_2) - m_2 r_2 \ddot{y} \sin \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $y$  – линейная координата, характеризующая вибрацию фундамента,  $\varphi_i$  – углы отклонения эксцентров от оси  $y$ ,  $m$  – масса фундамента,  $p$  – коэффициент упругости фундамента,  $k$  – коэффициент диссипации основания,  $m_i$  – массы эксцентров первого и второго двигателей,  $r_i$  – радиусы инерции эксцентров (эксцентриситеты),  $I_i$  – моменты инерции роторов в отсутствие дисбаланса,  $L_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)$  – движущий моменты,  $H_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)$  – моменты сил сопротивления вращению роторов. Первое уравнение (1) описывает вынужденные колебания платформы, второе и третье уравнения описывают динамику источников возбуждения, т.е. вращения роторов электродвигателей первого и второго соответственно. В дальнейшем в виду аналогичности уравнений, описывающих вращения роторов будет использоваться индекс, соответствующий данному уравнению. Система (1) автономная с тремя степенями свободы [1-4].

В работах И.И.Блехмана найдено решение подобной задачи методом прямого разделения движений. При решении задачи не учитывались особенности работы асинхронных двигателей. В работах изучается и решается задача о синхронизации вибраторов с почти равномерным вращением. Однако в ходе работы асинхронных двигателей, у которых частота вращения ротора крайне чувствительна к нагрузкам, равномерного вращения роторов с одной и той же угловой скоростью может не наблюдаться.

В модели (1) считаем, что моментные характеристики двигателей и моменты сопротивления имеют простейший линеаризованный вид. Для исследования данной модели вводим безразмерное время и координату. Принимая в качестве малого параметра отношение неуравновешенной массы ротора к массе основания, получаем возможность исследовать полученную систему приближенными методами. Наиболее эффективным методом приближенного аналитического исследования нелинейных колебательных систем с малым параметром является метод осреднения. Идея метода заключается не в прямом построении приближенного решения точной системы, а в построении приближенной системы, для которой строится точное решение. Необходимым предварительным этапом применения метода осреднения является приведение системы к стандартной форме [8].

Первое приближение, полученное для системы в стандартной форме, не позволяет выявить эффекты синхронизации. Уравнения второго приближения, позволяют обнаружить искомый резонанс: частоты вращения двигателей близки между собой, но далеки от частоты колебаний платформы. Резонансное условие, соответствующее этому случаю  $\Omega_1 - \Omega_2 = 0$  – характеризует эффект синхронизации двигателей в механической системе [9, 10].

Уравнения стационарных режимов колебаний позволяют найти зависимость между амплитудой стационарных колебаний и расстройкой частот источников колебаний. Резонансная кривая (рис. 1) показывает, что в модели присутствует нелинейность. Несмотря на то, что восстанавливающая сила и сила сопротивления представляют собой линейные характеристики, в системе наблюдается слабая нелинейность за счет малой нелинейной вынуждающей силы, обусловленной работой пары двигателей с неуравновешенными роторами.

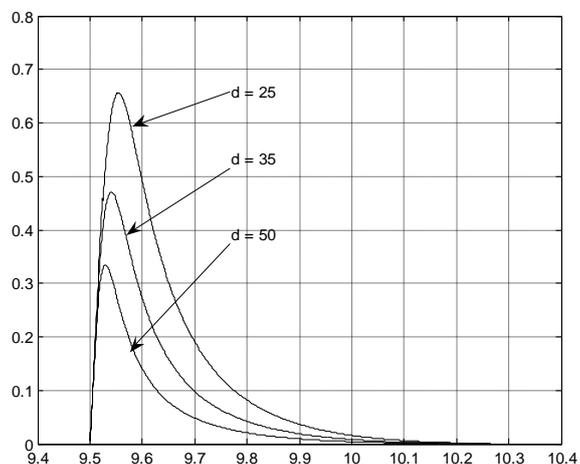


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика при изменении демпфирования

При увеличении коэффициента диссипации (линейного демпфирования) амплитуда колебаний основания уменьшается. Что согласуется с физическими соображениями и проведенными опытами.

Графики зависимости фазы стационарных колебаний от расстройки частот источников колебаний с коэффициентами диссипации  $d = 20$ ,  $d = 30$ ,  $d = 50$  представлены на рисунках (рис. 2, рис. 3, рис. 4).

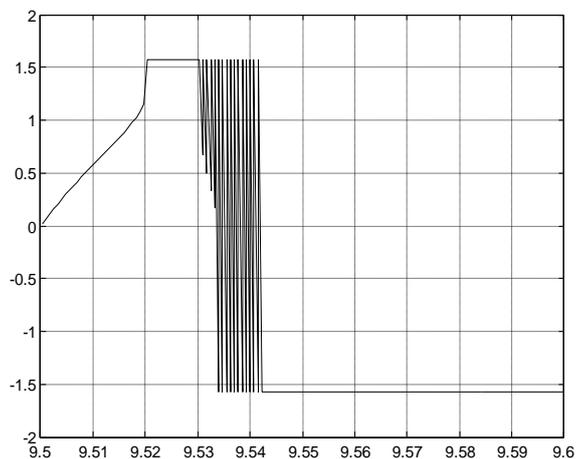
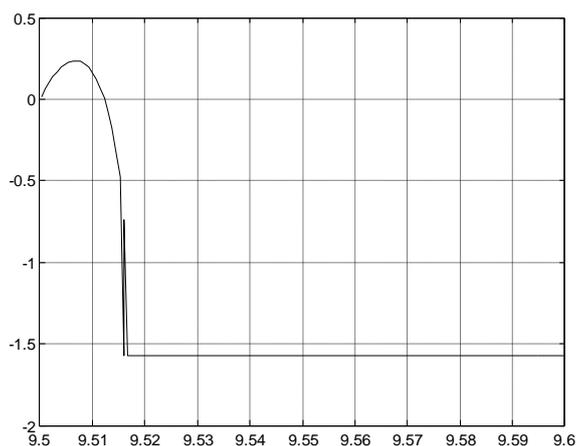
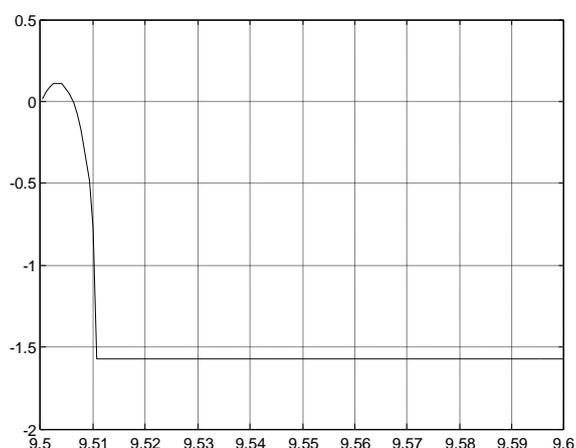


Рис. 2. График зависимости  $\theta(\Delta)$  ( $d = 20$ )

Рис. 3. График зависимости  $\theta(\Delta)$  ( $d = 30$ )Рис. 4. График зависимости  $\theta(\Delta)$  ( $d = 50$ )

Из графиков видно, что увеличение коэффициента диссипации способствует плавному изменению разности фаз.

### Синхронизация в системе трех двигателей

Физическая модель задачи (рис. 5) представляет собой систему трех двигателей, закрепленных на упругой платформе с одной степенью свободы.

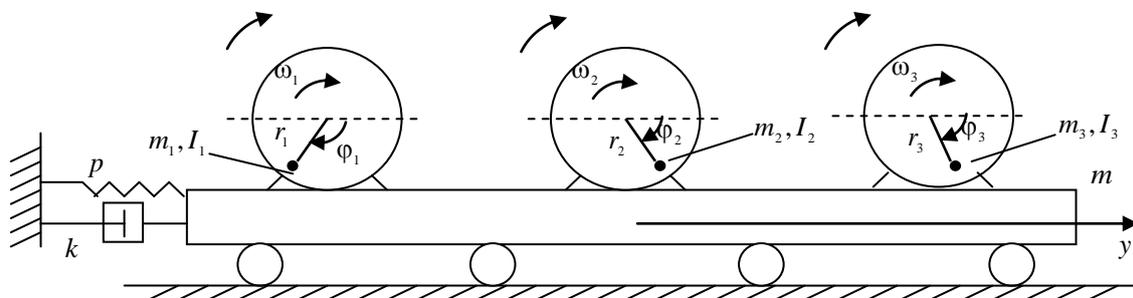


Рис. 5. Физическая модель задачи о синхронизации роторов трех двигателей, вращающихся в одном направлении

Математическая модель, описывающая движение колебательной системы, представляет систему четырех дифференциальных уравнений

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + py - \sum_{i=1}^3 m_i r_i (\ddot{\phi}_i \sin \phi_i + \dot{\phi}_i^2 \cos \phi_i) = 0, \quad (2)$$

$$I_j \ddot{\phi}_j + H_j(\phi_j, \dot{\phi}_j) - L_j(\phi_j, \dot{\phi}_j) - m_j r_j \ddot{y} \sin \phi_j = 0, \quad j = 1..3,$$

где  $y$  – линейная координата, характеризующая вибрацию фундамента,  $\phi_i$  – углы отклонения эксцентриков от оси  $y$ ,  $m$  – масса фундамента,  $p$  – коэффициент упругости фундамента,  $k$  – коэффициент диссипации основания,  $m_i$  – массы эксцентриков первого, второго и третьего двигателей,  $r_i$  – радиусы инерции эксцентриков (эксцентриситеты),  $I_i$  – моменты инерции роторов в отсутствие дисбаланса,  $L_i(\phi_i, \dot{\phi}_i)$  – движущие моменты,  $H_i(\phi_i, \dot{\phi}_i)$  – моменты сил сопротивления вращению роторов. Первое уравнение (2) описывает вынужденные колебания платформы, 2-4 уравнения описывают динамику источников возбуждения, т.е. вращения роторов электродвигателей. Моментные характеристики имеют вид  $L_i(\phi_i, \dot{\phi}_i) = M_{oi} - k_{oi} \dot{\phi}_i$ ,  $H_i(\phi_i, \dot{\phi}_i) = k_i \dot{\phi}_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ .

Резонансные соотношения, которые характеризуют эффект синхронизации роторов трех двигателей в механической системе  $\Omega_1 - \Omega_2 = 0$ ,  $\Omega_2 - \Omega_3 = 0$ , частоты вращения двигателей близки между собой, но далеки от частоты колебаний платформы. В отличие от случая с двумя двигателями, здесь рассматриваем сразу два резонанса [11].

Рассматривая стационарные колебания системы, находим зависимость амплитуды стационарных колебаний от расстроек частот источников колебаний, которая представляет собой резонансную поверхность (рис. 6). В случае если расстройка по частоте между вторым и третьим двигателями стремится к нулю  $\Delta_2 \rightarrow 0$ , на резонансной поверхности возникает один резонанс, сечение поверхности плоскостью  $\Delta_2 = const \ll 1$  изображено на рис. 7, если расстройка по частоте между первым и вторым двигателями стремится к нулю  $\Delta_1 \rightarrow 0$ , на резонансной поверхности также возникает один резонанс, сечение поверхности плоскостью  $\Delta_1 = const \ll 1$  изображено на рис. 8.

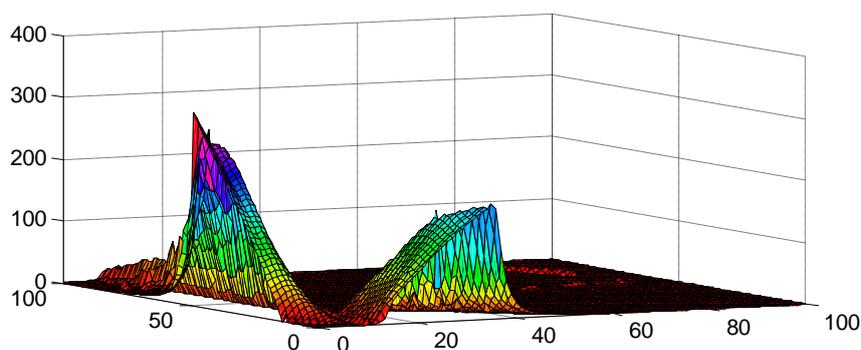


Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика

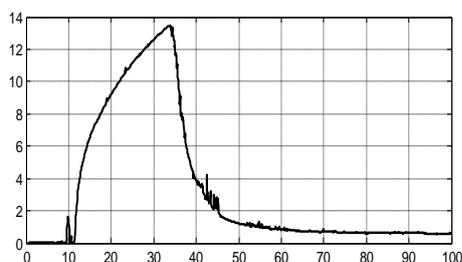


Рис. 7. Амплитудно-частотная характеристика

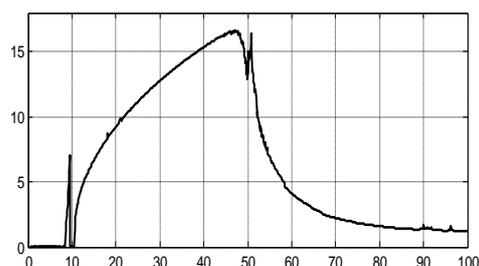


Рис. 8. Амплитудно-частотная характеристика

### Устойчивость синхронизации

Для исследования устойчивости найденного стационарного решения используем критерий Рауса-Гурвица, из которого находим необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости системы двух двигателей

$$q \cos \theta_0 < 0, \quad pk\Delta \cos \theta_0 + m(\Delta + q \sin \theta_0) < 0.$$

Из решения неравенств и анализа параметров системы следует, что единственно возможным значением разности фаз при возникновении устойчивого режима синхронизации является  $\theta_0 = \pi$ . Следовательно, соотношение фаз роторов двигателей, вращающихся в одном направлении, противофазное.

Для исследования задачи устойчивости стационарных решений, для системы трех двигателей, составляются уравнения в вариациях, и формулируется проблема собственных значений, которая приводит к характеристическому уравнению третьей степени

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0.$$

Для отыскания областей устойчивости используется критерий Рауса-Гурвица, который гласит, что для устойчивости движения необходимо и достаточно выполнение условий:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Область устойчивости в плоскости медленных фаз, полученная из решения неравенств, представлена на рис. 9

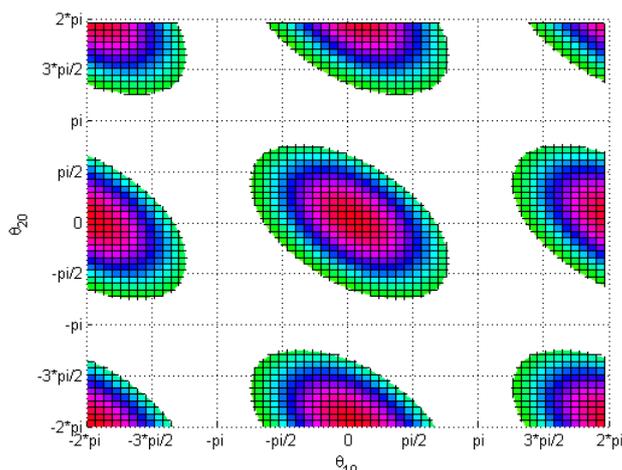


Рис. 9.  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$

Области устойчивости на рисунке отмечены белым цветом. При построении рис. 9 считалось, что расстройки по частоте между всеми тремя двигателями равны нулю ( $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ). При увеличении одной из расстроек область устойчивости вытягивается вдоль горизонтали или вдоль вертикали. При одновременном изменении расстроек область устойчивости вытягивается вдоль большей оси эллипса.

В сечениях  $\theta_{20} = 0$ ,  $\theta_{20} = \pi$  поверхности при фиксированном значении расстройки  $\Delta_2 = 0$  и изменении расстройки  $\Delta_1$  имеем, что при увеличении  $\Delta_1$  область устойчивости расширяется вдоль оси  $\theta_{10}$ . Если расстройку по частоте увеличивать  $\Delta_2 = 10$ , то имеем аналогичные результаты: амплитуда кривой падает, область устойчивости увеличивается вдоль  $\theta_{10}$ .

При рассмотрении поверхности в сечениях  $\theta_{10} = 0$ ,  $\theta_{10} = \pi$  получаем, что при фиксированном значении  $\Delta_2 = 0$  и увеличении  $\Delta_1$  область устойчивости сужается вдоль оси  $\theta_{20}$ , превращаясь в точку.

**Выводы**

Во втором приближении обнаружены резонансы второго порядка между двумя и тремя двигателями, которые характеризуют эффекты синхронизации роторов двигателей в механической системе. При анализе режима синхронизации фазочастотная характеристика показывает, что при уменьшении коэффициента демпфирования обнаружены резкие скачки разности фаз, которые при увеличении демпфирования уменьшаются и в итоге не наблюдаются. Что полностью согласуется с теоретическими соображениями и экспериментальными данными [12]. Также благодаря применяемому методу обнаружены дополнительные фазовые флуктуации синхронизирующихся источников вибрации (асинхронных двигателей).

*Работа выполняется при поддержке Российского научного фонда  
(грант № 14-19-01637).*

**Список литературы**

1. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
2. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Наука, 1971. – 896 с.
3. Блехман И.И., Бутенин Н.В., Ганиев Р.Ф. и др. Вибрации в технике т.2. Колебания нелинейных механических систем. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
5. Пиковский А.С., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. – М.: Техносфера, 2003. 508 с.
6. Гордеев Б.А., Гордеев А.Б., Ковригин Д.А., Леонтьева А.В. Применение гидравлических виброопор в синхронизирующихся механических системах. //Приволжский научный журнал. 2009. № 3. С. 49-53.
7. Гордеев Б.А., Гордеев А.Б., Ковригин Д.А., Леонтьева А.В. Причины возникновения синхронизации в рельсовом транспорте. //Приволжский научный журнал. 2009. № 4. С. 47-53.
8. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
9. Гордеев Б.А., Ковригин Д.А., Леонтьева А.В. Синхронизация вращения роторов двух двигателей на упругом основании // Вестник машиностроения. – 2011. – № 10. – С. 3-8.
10. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В. Исследование работы двух асинхронных двигателей, установленных на упругом диссипативном основании // Вестник машиностроения. – 2012. – № 5. – С. 19-23.
11. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В. Задача о вращении трех асинхронных двигателей на упругом основании // Вестник машиностроения. – 2012. – № 9. – С. 32-40.
12. Гордеев Б.А., Леонтьева А.В., Осмехин А.Н., Охулков С.Н., Бугайский В.В. Экспериментальные исследования сопутствующих эффектов при синхронизации двух двигателей на упругом основании // Вестник машиностроения. – 2013. – № 6. – С. 39-42.