

УДК 531

ТРАПЕЦИЕВИДНЫЕ СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ В СТРУНЕ, СОУДАРЯЮЩЕЙСЯ С ПРЯМОЙ, ВИБРИРУЮЩЕЙ ПО ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ ПРЕГРАДОЙ

© **Виталий Львович Крупенин**

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки институт
машинovedения им. А.А. Благонравова Российской академии наук
Россия, Москва.*

*Московский государственный университет печати
krupeninstar@gmail.com*

Аннотация: Изучены нелинейные стоячие трапециевидные волны, в заземленной на концах струне. Струна соударяется с вибрирующей преградой: прямой, колеблющейся по заданному закону стенкой, расположенной по одну сторону от оси её статического равновесия. Закон движения стенки – периодический полигармонический. Образующиеся стоячие волны могут иметь трапециевидные профили. При их реализации, точки струны в течение половины каждого периода колебаний либо равномерно движутся, либо покоятся..

Ключевые слова: нелинейные волны в струне, удар, полигармоническое периодическое возбуждение, трапециевидный профиль, распределенные ударные элементы.

TRAPEZOIDAL STANDING WAVES IN THE STRING COLLIDING WITH A STRAIGHT OBSTACLE VIBRATING ON POLYHARMONIC LAW

V.L. Krupenin

IMASH RAS, Moscow, Russia

Abstract: We studied the nonlinear trapezoidal standing waves, pinched at the ends of the string. String collides with the vibrating barrier: straight, wavering for a given law of the wall located on one side of its axis of static equilibrium. The resulting standing waves can have trapezoidal profiles. Implement point strings for half of each oscillation period or uniformly moving or at rest.

Keywords: nonlinear waves in the string, impact, polyharmonic periodic excitation, trapezoidal profile, distributed impact elements.

1. Введение. Рассмотрим плоские поляризованные колебания линейной, заземленной на концах струны, соударяющейся с прямой абсолютно жесткой вибрирующей стенкой, остающейся, параллельной оси статического равновесия (рис.1,а) или такую же струну, расположенную между двумя стенками, каждая из которых может вибрировать или одна стенка может быть неподвижной (рис.1,б). Для определенности ограничимся задачей с одним вибрирующим ограничителем. Другие задачи этого класса рассматриваются аналогично.

Пусть искомым прогиб есть $u(x,t)$. При этом $-0,5 \leq x \leq 0,5$. Закон T - периодических колебаний стенки в абсолютной системе координат: $h(t) = -\Delta - \varepsilon h_1(t) < 0$ ($\varepsilon > 0$ - параметр), где $h_1(t)$ - гладкая T -периодическая функция, определяющая закон движения вибрирующей стенки. Считая натяжение и плотность единичными, имеем (см. [1—3])

$$\square u \geq 0, \quad u(\pm \frac{1}{2}, t) = 0, \quad u(x, t) \geq h(t), \quad t \in]-\infty, \infty[. \quad (1)$$

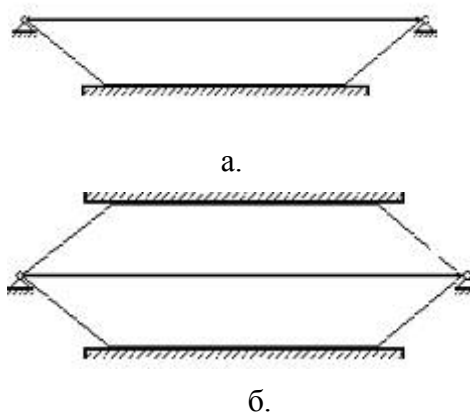


Рис.1

Здесь \square – волновой оператор Д'Аламбера. В отсутствие контакта в первом соотношении (1) реализуется равенство и, соответственно, имеем уравнение колебаний линейной струны, а в третьем — строгое неравенство. При наступлении контакта в третьем соотношении для точек струны, участвующих в контакте реализуется равенство, а в первом, с учетом того, что ограничитель всегда действует "от себя"—неравенство. Удар будем в начале считать абсолютно упругим:

$$u(x_0, t_0 + 0) = -u(x_0, t_0 - 0) + 2\dot{h}_1(t_0), \quad u(x_0, t_0) \equiv h(t_0). \quad (2)$$

Разыскиваемые обобщенные решения [2-4] должны удовлетворять также условию [1-3].

$$\text{supp} \square u \subset \{(x, t); u(x, t) \equiv h(t)\}. \quad (3)$$

Будем искать обобщенные периодические решения данной задачи, имеющие периоды, равные или кратные T .

2. Вырожденная задача Рассмотрим вначале, как обычно, вырожденную консервативную систему (1)-(3) при $\varepsilon = 0: h(t) = \Delta = \text{const}$. Ограничимся колебаниями, в определенном смысле подобными устанавливающимся при реализации первой формы колебаний линейной струны, и будем считать, что начальный профиль $u_0(x)$ имеет единственный максимум $u_{0+} > \Delta$, а начальное распределение скоростей — нулевое.

В работах [1, 2, 5, 6] (см. также [3, 7]) доказано, что тогда существует единственное двухпараметрическое семейство стоячих волн (называемых также хлопками), сохраняющих периодичность вне зависимости от метрических соотношений между длиной струны (здесь равной 1) и величиной зазора (Δ).

Хлопки имеют трапециевидные профили, подобные показанным на рис. 1 (здесь координата удара не $-\Delta$, а $-\Delta - \varepsilon$; см. далее); меньшие основания трапеций равномерно движутся вверх или вниз; в крайнем верхнем положении они вырождаются в точку; в крайнем нижнем положении происходит удар.

В работах [1, 2] доказано, что любые другие типы начальных условий данного класса дают периодические режимы только при соизмеримости длины струны и величины Δ , а, вообще говоря, все движения почти - периодичны и их можно представить как $A[y_1(x, t); y_2(x, t)]$, где функция A , имеющая период $1 + \Delta$, описывает хлопок, а функции $y_1(x, t), y_2(x, t)$ при выбранных значениях параметров обладают следующими свойствами: $y_1(x, t + 2) \equiv y_1(x, t)$, т.е. это периодическая функция с периодом 2, а $y_2(x, t + 2) = y_2(x, t) + 2$.

Функции $y_{1,2}$ однозначно определяются начальными данными. Поэтому, хотя хлопки и определяются начальными условиями весьма частного вида: $(u_t(x, 0) = 0, u(x, 0) = u_{0+}(1 - 2|x|))$, их роль в механике систем такого рода принципиальна

[3, 5, 7]. В работах [3, 5] даны результаты экспериментов, свидетельствующие, что в режимах вынужденных колебаний проявление характерных нелинейных резонансных эффектов сопровождается именно возникновением хлопков.

Если не фиксировать полную энергию стоячей волны, то семейство хлопков $A[J, \omega_0(J); x, t - \psi]$ определяется параметрами J и ψ — плотностью импульса и фазой удара [$\text{const}(x)$]. Частота колебаний $\omega_0(J) = 2\pi T_0^{-1}$. Считая, что в момент контакта отрезка удара (его длина $l_0 = 1 - 2\Delta v^{-1}$, $v = 0,5 J$ — модуль скорости его движения) с ограничителем приходится на начало отсчета времени, пользуясь известным [5-8] представлением, запишем

$$A(x, t) = 2J\pi^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-2)^{-2} \sin\left[\frac{1}{2}(2n-1)\pi l_0\right] \sin\left[(2n-1)\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \chi_{2n-1}(t), \quad (4)$$

где $\chi_{2n-1}(t)$ — T_0 -периодические функции Грина [6] линейных осцилляторов с частотами $\{(2n-1)\pi\}$. При $0 \leq t < T_0$:

$$\chi_{2n-1}(t) = [2(2n-1)\pi \sin 0,5(2n-1)\pi T_0]^{-1} \cos(2n-1)\pi(t - 0,5T_0);$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ данное представление продолжается по периодичности т.к. конечное представление, приведенное выше имеет место только на интервале периодичности [6].

Проверка выполнимости условий (1)-(3) ($\varepsilon = 0$) для стоячей волны (4) проводится в [1, 2]. Кроме того, выполняются соотношения: $u_{0+} = \frac{1}{4}J; \pi < \omega_0 < 2\pi$.

$$J(\omega_0) = 4\omega_0\Delta(2\pi - \omega_0)^{-1}; I(\omega_0) = 8\Delta(1 - \pi\omega_0^{-1} - 1)^{-1}, \quad (5)$$

где u_{0+} — максимальная высота подъема средней точки струны, $I = J l_0 > 0$ — полный импульс удара. При $\omega_0 \rightarrow 2\pi$ энергия волны неограниченно растет; при $\omega_0 \rightarrow \pi$ (частоте первой формы линейных колебаний) отрезок удара вырождается в точку и полный импульс удара $I(\pi) = 0$. Таким образом, имеется прямая аналогия между движением (4) и движением традиционного "ударного осциллятора" — системы с одной степенью свободы [3].

3. Возмущенное движение. В возмущенной системе (1) — (3) ($\varepsilon \neq 0$) будем искать периодические стоячие волны периода nT , сохраняющие трапециевидные профили. Положим $n=1$. При этом, в принципе, механически корректно введение аналога гипотезы Ньютона о коэффициенте восстановления. Подробное обсуждение проблемы корректности тех или иных моделей рассеяния энергии при ударе, естественно, выходит за рамки данной работы.

Пусть $0 < R \leq 1$. Не изменяя условий (1) и (3), положим вместо (2)

$$u_t(x_0, t_0 + 0) = -R u_t(x_0, t_0 - 0) + (1 + R) \dot{h}_1(t_0) \quad (6)$$

Ввиду того, что конфигурации двухпараметрического семейства (5) заданы, хлопки можно характеризовать парой переменных (v_k, t_k) , где v_k — модуль скорости каждой точки отрезка удара перед k -м соударением, приходящимся на момент t_k . Между ударами струна линейна (период колебаний равен 2). Поэтому

$$v_{k+1} = R v_k + (1 + R) \dot{h}(t_k), \quad t_{k+1} = t_k + 1 + 2 | \dot{h}(t_k) | v_{k+1}^{-1}. \quad (7)$$

Положим: $h(t) = -\Delta - \varepsilon - \varepsilon Q_n(\omega t)$ ($\varepsilon < \Delta$). Функция $Q_n(\omega t)$ предполагается периодической и полигармонической:

$$Q_n(\omega t) = \sum_{j=1}^n q_j \cos j\omega t \quad (8)$$

Записав условия периодичности, $v_k = v_{k+1} \equiv v$, $t_k = kt + \varphi$ (φ — неизвестная фаза), получим из (7):

$$v(1 - R) = (1 + R)\varepsilon\omega \sum_{j=1}^n jq_j \sin j\omega\varphi; \quad (9)$$

$$0,5v(2\pi n - \omega) - \omega(\Delta + \varepsilon) = \varepsilon\omega \sum_{j=1}^n q_j \cos j\omega\varphi; \quad (10)$$

В случае, когда $j=1$, задача решена в работе [1]. Имеется пара трапециевидных стоячих волн-хлопков, один из которых асимптотически устойчив, а второй — неустойчив. В данном случае столь простой анализ невозможен и придется применить анализ оценки числа режимов, аналогичный проделанному в работе [9].

Уравнение (9) является аналогом уравнения энергетического баланса. Перепишем его в виде

$$v \frac{1 - R}{1 + R} = \varepsilon\omega \sum_{j=1}^n jq_j \sin j\varphi \equiv \alpha_n(\varphi); \quad (11)$$

Левая часть этого уравнения пропорциональна потерям энергии при взаимодействии, правая часть описывает вклад энергии внешнего источника.

Функция $\alpha_n(\varphi)$ называется фазовой [9, 10]. Пусть $\Psi = \{\varphi_j; \varphi_j \in [0, \pi]\}$ — множество корней уравнения (11) при фиксированном уровне диссипации. В предположениях, что профиль волны сохраняет свой вид, каждому такому корню отвечает одна трапециевидная стоячая волна.

Если множество Ψ — определено, то определяющие параметры реализующихся хлопков можно найти из уравнения (10). Для плотности импульса получим:

$$J_j(\omega; \varphi_j) = 4\omega(\Delta + \varepsilon + \varepsilon \sum_{j=1}^n q_j \cos j\varphi_j)(2\pi - \omega)^{-1}. \quad (J_j = 2v_j). \quad \varphi_j \in \Psi \quad (12)$$

Отрезки ударного взаимодействия

$$l_{0j} = 1 - 2(\Delta + \varepsilon + \varepsilon \sum_{j=1}^n q_j \cos j\varphi_j) \quad (13)$$

Поэтому соответствующие полные импульсы удара даются формулами:

$$I_j(\omega; \varphi_j) = [1 - 2(\Delta + \varepsilon + \varepsilon \sum_{j=1}^n q_j \cos j\varphi_j)] J(\omega; \varphi_j). \quad (14)$$

Эти соотношения вместе с представлением (4) определяют трапециевидные стоячие волны $A_j(J, \omega; x, t)$, причем в формуле (4) периоды всех ПФГ $\chi_{2n-1}(t)$ равны T .

Аналогично могут быть построены и субгармонические хлопки 1:n. Для субгармонических режимов 1:n предполагается, что частота движения $\omega_n (\omega_n = 2\pi T^{-1} n^{-1})$

лежит в интервале собственных частот двухпараметрического семейства (5)

$$: \pi < \frac{\omega}{n} < 2\pi .$$

Необходимо подчеркнуть, что полученные таким образом представления оказываются точными.

На рис.2 показан характерной профиль одной из устанавливающихся стоячих волн.

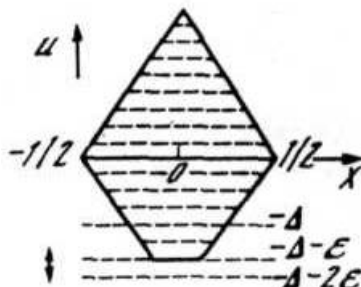


Рис.2

Для изучения вопроса устойчивости найденных решений система анализировать методом конечных разностей. Струна единичной длины дискретизировалась по стандартной (и потому подробно не описываемой) схеме и при моделировании удара заменялась системой k упруго связанных сосредоточенных тел равной $M_0 = k^{-1}$. Пусть координата (скорость) α -го тела во время β -го шага по времени, продолжительность которого равна Θ , есть $u_\alpha^\beta (v_\alpha^\beta)$. По выполнению условия $|u_\alpha^{\beta+1}| > \Delta$ полагалось $|u_\alpha^{\beta+1}| = \Delta, v_\alpha^{\beta+1} = 0$ и при этом считалось, что на каждое из соударяющихся тел действует сила реакции, равная импульсу, отнесенному к шагу по времени $g_{\alpha\beta} = M_0 v_\alpha^\beta \Theta^{-1} \text{sign} u_\alpha^{\beta+1}$. Выбиралось: $n=60, h=k^{-1}; \Theta=0,75h$; значение зазоры варьировалось в достаточно широких пределах. При соответствующем задании начальных условий были получены формы субгармонических колебаний разных типов $A_n(x,t)$ (при нескольких первых значениях n) и установлена их устойчивость или, соответственно, неустойчивость.

4. Оценка числа решений. Найденное нуждается в существенных комментариях. При синусоидальной вибрации ограничителя задача анализировалась в работах [1]. В этом случае для каждого n в определенных частотных областях существовала пара виброударных режимов движения распределенного ударного элемента. Если перейти на «язык фазовых функций» (11), то это уравнение имело два решения: фазовая функция имела вид простой синусоиды. Одно из решений отвечало устойчивому профилю струны, второе – неустойчивому. При большом числе гармонических составляющих вибрации вид фазовой функции усложняется. Поэтому режимов стоячих волн может быть более чем два, и, соответственно, может увеличиться число устойчивых режимов. В работах [9, 10] приводились примеры уравнений типа (11), решения которых определяли разное число режимов движения. Дополнительные режимы возникали, когда вклад высших гармонических составляющих периодического возбуждения существенно доминировали над низшими.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим фазовую функцию вида

$$\alpha_n(\varphi) = 0,5\sin\varphi + 6\sin 2\varphi + 10\sin 3\varphi.$$

Эскиз графика этой функции показан на рис.3. Количество периодических стоячих волн равно числу пересечений этой кривой с с прямыми параллельными оси абсцисс. Эти прямые отвечает действующему уровню диссипации. В случае отсутствия диссипации или при небольших её уровнях – имеем шесть пересечений и соответственно шесть режимов. При возрастании уровня диссипации остаются четыре режима, два режима и, наконец, установление периодических стоячих волн типа хлопков делается невозможным. Анализ показывает, что устойчивым режимам отвечают корни уравнения (11),

соответствующие пересечению линий уровня диссипации с возрастающими ветвями фазовой функции.

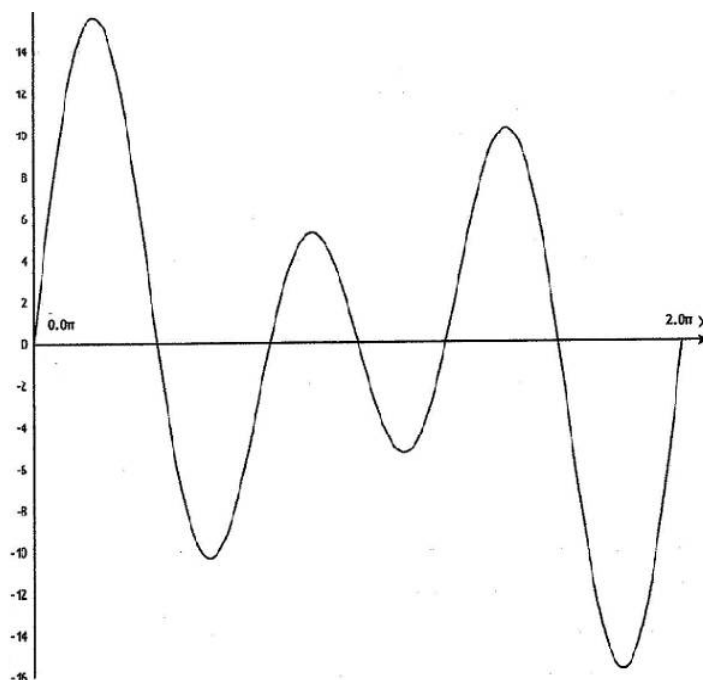


Рис.3.

Необходимо подчеркнуть, что именно доминирование высших гармоник и может отвечать большому числу периодических стоячих волн. Если, как это и бывает в большинстве типовых случаев, коэффициенты Фурье периодического закона движения вибрирующего препятствия будут убывать, то подобные эффекты – невозможны.

Подробный анализ найденных точных решений показывает, что данным режимам свойственны нелинейные резонансные эффекты ("затягивания", "срывы" и др.), проявляющиеся в традиционных системах с классическими ударными парами [3]. Как указывалось, данное обстоятельство отмечалось и при проведении экспериментов. Поведение трапециевидных стоячих волн в ряде аспектов сходно с поведением частиц, соударяющихся с жесткими стенками.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-08-01235-а).

Список литературы

1. Крупенин В.Л. Виброударные процессы, порождаемые распределенными ударными элементами, взаимодействующими с вибрирующими препятствиями//Вестник научно-технического развития. Интернет-журнал. 2009.№11 (27).С.45-51.
2. Cabbanes H., Haraus A. Mouvements presque – periodiques d'une corde vibrante en presence d'un obstacle fixe, rectiligne ou ponctuel // I.J. Nonlinear Mechanics. 1981,V.55, №5/6, p.p. 449-457.
3. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах// Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 5. С. 13-30.
4. Amerio L., Prouse G. Study of the Motion of a String Vibrating Against an Obstacle //Rend. di Mat. Ser. 6(8). 1975. N.2. P.p. 563-585.

5. Веприк А.М., Крупенин В.Л. О резонансных колебаниях системы с распределенным ударным элементом //Машиноведение. 1988. № 6. С. 39-47.
6. Крупенин В.Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения «импульс - фаза» //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010.№1.С. 34-42.
7. Крупенин В.Л. Колебания решетчатых двумерных конструкций в присутствии препятствий // ДАН. -2006.- Т. 400.- №2. -С. 1-4.
8. Крупенин В.Л. К описанию виброударных процессов в решетчатых двумерных системах//Вестник научно-технического развития. Интернет-журнал. №1. 2008. С.22 –32
9. Крупенин В.Л. Об оценке числа периодических режимов движения нелинейных колебательных систем при периодическом полигармоническом возбуждении колебаний // Вестник научно-технического развития. Интернет-журнал. 2013.№4 (68).С.14-19.
10. Крупенин В.Л. Об эффектах, сопровождающих возникновение периодических режимов движения нелинейных колебательных систем при силовом и параметрическом возбуждении колебаний // Вестник научно-технического развития. Интернет-журнал. 2014.№2 (78).С.14-35.