УДК 534.11

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО КАНАТА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, ЛЕЖАЩЕГО НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

© Владислав Львович Литвинов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Самарский государственный технический университет"

СамГТУ, Самара, Россия

vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. *Используя метод Канторовича - Галеркина находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях вязкоупругого каната с движущейся границей, лежащего на упругом основании. Зависимость силы сопротивления движению каната принимается пропорциональной его скорости. Учитывается изгибная жесткость каната. Приводятся результаты, полученные для амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде. Исследуется явление установившегося резонанса и прохождения через резонанс. Решение получено для наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на движущейся границе.*

Ключевые слова: *колебания систем с движущимися границами, изгибная жесткость, вязкоупругость, упругое основание, сопротивление среды, резонансные свойства, амплитуда колебаний.*

TRANSVERSE VIBRATIONS VISCOELASTIC ROPE VARIABLE LENGTH ON AN ELASTIC FOUNDATION WITH CONSIDERING THE INFLUENCE OF THE RESISTANCE FORCES ENVIRONMENTAL

© V.L. Litvinov

Samara State Technical University, Samara, Russia

Abstract. *Using of Kantorovich - Galerkin method is an approximate solution of the problem of transverse vibrations of viscoelastic rope with a moving boundary, lying on an elastic base. The dependence of the resistance force of the rope is taken proportional to its speed. Take into account the flexural rigidity of the rope. The results obtained for the amplitude of the vibrations corresponding to the n-th dynamic mode. Investigation the phenomenon of resonance and steady passage through resonance. The solution is obtained for the most common case in practice when external disturbances acting on the moving boundary.*

Key words: *fluctuations in systems with moving boundaries, the flexural rigidity, viscoelastic properties, elastic base, environmental resistance, resonance properties, oscillation amplitude.*

Системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1-4], гибкие звенья передач [5], железнодорожная контактная сеть [6,7], ленточные конвейеры [8] и т.д.). Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем [9]. Точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями [10-11]. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича – Галеркина, описанный в работах [12, 13]. Данный метод позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления среды [14], изгибную жесткость [12, 15], вязкоупругие свойства колеблющегося объекта [15], а также жесткость подложки [10].

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания каната, имеет вид:

$$U_{tt}(x,t)-a^2U_{xx}(x,t)+\frac{\lambda}{\rho}U_t(x,t)+\frac{EI}{\rho}U_{xxxx}(x,t)+\frac{\mu I}{\rho}U_{xxxxt}(x,t)+\frac{k_0}{\rho}U(x,t)=0. \quad (1)$$

Граничные условия с возмущением гармонического вида на движущейся границе можно записать следующим образом:

$$U(0,t)=0;\ U_{xx}(0,t)=0; \quad (2)$$

$$U(l_0(t),t)=B\cos W_0(\omega_0 t);\ U_x(l_0(t),t)=0. \quad (3)$$

Начальные условия не оказывают влияние на резонансные свойства линейных систем, поэтому в данной задаче они не рассматриваются [12].

В задаче (1) – (3) используются следующие обозначения:

$U(x,t)$ - поперечное смещение точки каната с координатой x в момент времени t; $E-$ модуль упругости материала каната; I - осевой момент инерции сечения каната; μ - коэффициент, характеризующий вязкоупругость объекта; λ - сила сопротивления среды, действующая на единицу длины каната при единичной скорости поперечного движения; ρ - линейная плотность массы каната; k_0 - жесткость подложки; $a=\sqrt{T/\rho}$ - минимальная скорость распространения волн; T - сила натяжения; $l_0(t)=L_0-v_0t$ - закон движения границы каната; L_0- начальная длина каната; $W_0(z)$ - функция класса C^1; B,ω_0 - постоянные величины.

Если ввести в задачу (1) - (3) безразмерные переменные:

$$\xi=\omega_0 x/a;\ \tau=\omega_0 t+\frac{\omega_0 L_0-a}{-v_0};\ U(x,t)=Bu(\xi,\tau)$$

и новую функцию

$$u(\xi,\tau)=e^{-\alpha\tau}V(\xi,\tau),\ \text{где}\ \alpha=\lambda/(2\omega_0\rho),$$

задача примет вид:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)-V_{\xi\xi}(\xi,\tau)-\sigma^2V(\xi,\tau)+(\beta^2-\alpha\gamma^2)V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau)+\gamma^2V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi,\tau)=0; \quad (4)$$

$$V(0,\tau)=0;\ V_{\xi\xi}(0,\tau)=0; \quad (5)$$

$$V(l(\varepsilon\tau),\tau)=e^{\alpha\tau}\cos W(\tau);\ V_\xi(l(\varepsilon\tau),\tau)=0, \quad (6)$$

где

$$\beta^2=\frac{EI}{\rho}\frac{\omega_0^2}{a^4};\ \gamma^2=\frac{\mu I}{\rho}\frac{\omega_0^3}{a^4};\ l(\varepsilon\tau)=1+\varepsilon\tau;\ \sigma^2=\alpha^2-\frac{k_0}{\rho\omega_0^2};$$

$$W(\tau)=W_0(\tau-\gamma_0);\ \gamma_0=\frac{\omega_0 L_0-a}{-v_0};\ \varepsilon=-v_0/a.$$

Для большинства материалов силы вязкости значительно меньше упругих сил, поэтому γ можно считать малым параметром.

Для решения задачи (4) - (6) воспользуемся методом Канторовича-Галеркина. Решение будем искать в виде

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau).$$

Обозначим $\delta^2 = (\beta^2 - \alpha\gamma^2)$ и $\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \sigma^2$, где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ - собственные частоты задачи (4) - (6).

Из решения задачи:

$$\delta^2 X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) - X_{n\xi\xi}(\xi,\varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi,\varepsilon\tau) = 0;$$
$$X_n(0,\varepsilon\tau) = 0; \qquad X_{n\xi\xi}(0,\varepsilon\tau) = 0;$$
$$X_n(l(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau) = 0; \quad X_{n\xi}(l(\varepsilon\tau),\varepsilon\tau) = 0$$

найдем выражение для динамических мод $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ и функций $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$:

$$X_n(\xi,\varepsilon\tau) = A_n\{\sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau) sh[k_2(\varepsilon\tau)\xi]\};$$
$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = [\omega_{1n}(\varepsilon\tau) + d_n(\varepsilon\tau)]\sqrt{1 + \delta^2[\omega_{1n}(\varepsilon\tau) + d_n(\varepsilon\tau)]^2},$$

где

$$A_n = 1/\max\{\sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau) sh[k_2(\varepsilon\tau)\xi]\};$$
$$k_1(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\delta}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}};\ k_2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\delta}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}};$$
$$c_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\sin[k_1(\varepsilon\tau) l(\varepsilon\tau)]}{sh[k_2(\varepsilon\tau) l(\varepsilon\tau)]};\ \omega_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)};$$
$$d_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{l(\varepsilon\tau)} arctg \frac{\delta\omega_{1n}(\varepsilon\tau)}{\sqrt{1 + \delta^2\omega_{1n}^2(\varepsilon\tau)}}.$$

Примем $\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau)$, где функция $y_n(\tau)$ удовлетворяет следующему уравнению, записанному с точностью до величин порядка ε^2:

$$y_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \tag{7}$$

Производя вычисления, для функций $Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau)$, A_{0n} получим:

$$Q_{n_{21}}(\varepsilon\tau) = \frac{-k_1(\varepsilon\tau)\sqrt{1 + 4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau)} \cos[k_1(\varepsilon\tau) l(\varepsilon\tau)];$$
$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\tau)};$$
$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{1}{2} l(\varepsilon\tau)[1 - c_n^2(\varepsilon\tau)] - \frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau) l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta}.$$

Два линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего (7), имеют вид:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau); \quad y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\sin w_n(\tau).$$

Применяя метод малого параметра, получим следующие формулы для функций $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$:

$$a_n(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)};\quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)d\zeta.$$

После преобразований с учётом (6) получим формулу амплитуды колебаний, соответствующих n-ной динамической моде [12]:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)\left\{\left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)};$$

$$\Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta);$$

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\zeta)Q_{n_{21}}(\varepsilon\zeta)e^{\alpha\varsigma}\sqrt{A_{1n}(\varepsilon\zeta)/\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Установившийся резонанс в рассматриваемой системе наблюдается, если: $W_n(\tau) = w_n(\tau) + \gamma$, где γ - постоянная величина.

Амплитуда при этом имеет вид

$$A_n(\tau) = E_n(\varepsilon\tau)\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)d\zeta.$$

Явление прохождения через резонанс может возникнуть на любой из динамических мод, при воздействии на систему гармонического возмущения с частотой ω_0, когда $W(\tau) = \tau$.

Точка резонансной области τ_0 приближенно определяется по следующей формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{\frac{2\delta^2}{-1+\sqrt{1+4\delta^2(1+\sigma^2)}}}\cdot\pi n - 1\right].$$

Выражение для максимально возможной амплитуды при прохождении через резонанс имеет вид:

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2) = E_n^2(\varepsilon\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\cos\varPhi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\sin\varPhi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}.$$

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, колебания в которых описывает задача (1) - (3).

Список литературы

1. *Весницкий А.И., Потапов А.И.* Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках // Динамика систем. Горьковский университет. – 1975. – №7. – С. 84-89.
2. *Колосов Л.В.* Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. вузов: Горный журнал. – 1981. – №3. – С. 83-86.

3. *Литвинов В.Л.* Исследование прохождения через резонанс вязкоупругого каната переменной длины в грузоподъемных механизмах // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации – 2008: XI Всероссийская научно-техническая конференция. – Пермь, 2008.
4. *Zhu W.D., Chen Y.* Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control = Теоретическое и экспериментальное исследование динамики и управления каната лифта // Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust. . N 1 .— 2006 .— 66-78 .— J06006563 .— Общие вопросы механики. Общая механика .— 2006 .— N 09.
5. *Самарин Ю.П., Анисимов В.Н. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне* // Изв. вузов. Машиностроение, 1986, (12), 17-21.
6. *Ryue J., Thompson D.* Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies = Скорость задержки распространения волн в железнодорожных рельсах на высоких частотах // J. Sound and Vibr. № 4-5. — 2009.— 955-976.— J08608129. — Общие вопросы механики. Общая механика. — 2010. — № 07.
7. *Lei Xiao-yan.* Влияние резких изменений жесткости основания железнодорожного полотна на его вибрацию при движущейся нагрузке // Zhendong gongcheng xuebao = Journal of Vibration Engineering. № 2. — 2006. — 195-199. — J06316562. — Общие вопросы механики. Общая механика. — 2010. — № 03.
8. *Мулухов К.К.* Особенности динамического расчета ленточно-колесных конвейеров // Труды Северо-Кавказского государственного технологического университета № 7. - 2000. - 266-269: 3 ил. - J03419859. - Общие вопросы механики. Общая механика. - 2004. - № 5.
9. *Самарин Ю.П.* О волновых явлениях в областях с подвижными границами // Волжский математический сборник. – Куйбышев, 1967. – В. 5. – С. 337-340.
10. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
11. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки», 2012, 3 (28), 145-151.
12. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 стр.
13. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159-161.
14. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». №2 (19). – 2009.
15. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – 358 с.