

УДК 534.1

## АВТОКОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ДВУМЯ ПРЯМЫМИ ПРОТЯЖЕННЫМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

© Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН  
[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

**Аннотация.** Рассмотрены автоколебательные сильно нелинейные процессы в системе с распределенным ударным элементом – струной, вибрирующей между двумя симметричными ограничителями хода. Сила возбуждения зависит от скорости струны и в системе в каждый момент времени осуществляется компенсация сил диссипации. Находятся точные представления для стоячих волн, которыми оказываются изученные ранее трапецевидные формы - «хлопки». Устойчивость решений анализируется посредством численной процедуры. Указывается класс задач, который может быть исследован посредством развиваемой теории.

**Ключевые слова:** авторезонанс, струна, распределенный ударный элемент, формы нелинейных колебаний, устойчивость, длинноволновое приближение, возбуждение, трапецевидные профили.

## SELF-OSCILLATIONS OF THE STRING, INTERACTING WITH TWO STRAIGHT LONG OBSTACLES

V.L. Krupenin

IMASH RAS, Moscow, Russia

**Abstract.** Considered strongly nonlinear oscillatory processes in the system with distributed impact elements - string vibrating between two symmetric motion obstacles. Excitation power dependent on the speed of the string and in the system at each moment of time compensates for the forces of dissipation. Are accurate representations for standing waves, which are explored before trapezoidal - "claps". The stability of solutions is analyzed by the numerical procedure. Specifies the class of problems that can be investigated by the developed theory.

**Keywords:** autoresonance, string, distributed impact element, forms of nonlinear vibrations, stability, long-wave approximation, excitation, trapezoidal profiles.

1. В этом и следующих двух п. п. обсуждаются результаты, полученные ранее и необходимые для дальнейших рассмотрений, целью которых является изучение автоколебательных виброударных процессов в системах, с распределенными ударными элементами. В данном случае, в системах с двусторонними ограничителями.



Рис.1.

В работах [1-12] и др. теоретически и экспериментально изучались виброударные системы с распределенными ударными элементами, а также их дискретные аналоги (рис. 1). Система рис. 1 определяет длинноволновое приближение системы рис. 2. На обоих рисунках показан трапецевидной профиль, возникающий при реализации периодических режимов движения

(стоячих волн) типа "хлопков", возможность существования хлопков была установлена ранее. При их реализации относительно удаленные части ударных элементов - сосредоточенных или распределенных – могут синхронно соударяться с соответствующими частями различного рода ограничителей.

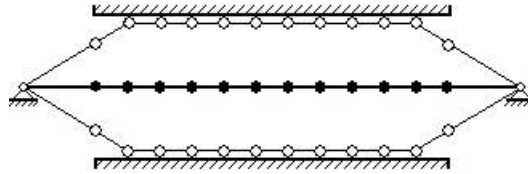


Рис.2

Рассмотрим малые поперечные колебания струны, расположенной между двумя абсолютно жесткими ограничителями хода, установленными параллельно оси ее статического равновесия (рис. 1). В консервативной модели трапециевидный профиль стоячей волны реализуется при начальных условиях специального вида (см. ниже).

На рис. 3 показан профиль экспериментально полученной стоячей волны-хлопка в режиме вынужденных колебаний. На врезе дана фотография зависимости угла поворота жгута в заделке от времени. Видимые скачки свидетельствуют о быстром изменении знака этого угла после прохождения жгутом положения равновесия. Такая ситуация как раз и характерна для трапециевидных профилей. Экспериментально, в режиме вынужденных колебаний трапециевидные профили полученных стоячих волн-хлопков, по-видимому, впервые было получены на стенде А.М. Веприка. Их описание дано, в частности, в работе [11].



Рис.3.

Формализуем постановку задачи. Пусть система - консервативна, когда препятствия неподвижны и возбуждение от внешних источников отсутствуют.

Обозначив  $u(x,t)$  искомый прогиб, описанные выше ограничения запишем как:

$$|u(x,t)| \leq \Delta < l; \quad x \in [-l/2, l/2], \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Между касаниями струны с ограничителями, когда первое неравенство (1) – строгое, уравнение движения записывается в виде линейного волнового уравнения:  $\square u \equiv u_{tt} - u_{xx} = 0$ .

Примем, далее, следующие граничные и начальные условия:

$$u(\pm l/2, t) = 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = v_0(x). \quad (2)$$

При этом предполагается, что гладкость функции  $v_0(x)$  (начальной скорости) такова, что, обеспечено существование и единственность непрерывного решения задачи Коши для линейного волнового уравнения  $\square u = 0$  и дополнительных условий (2).

Если в первом неравенстве (1) реализуется знак равенства, то происходит взаимодействие струны и ограничителя, который должен действовать на струну «от себя». Поэтому, если  $u \geq 0$  или  $u \leq 0$ , то соответственно

$$\square u \leq 0; \quad \square u \geq 0 \quad (3)$$

Оперируя с решениями, имеющими разрывы производной, потребуем, чтобы носитель сингулярной обобщенной функции [4] выражающей силу ударного взаимодействия

$$\text{supp } \square u \subset \{(x,t); |u(x,t)| = \Delta\}. \quad (4)$$

Считая, что при взаимодействии энергия не теряется, постулируем здесь выполнение, имеющего место в соответствующей линейной системе, соотношения, выражающего закон сохранения энергии, то есть именно постулируем, что и в данном нелинейном случае в смысле обобщенных функций [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u_x|^2 + |u_t|^2) = \frac{\partial}{\partial x} (2u u_x) \quad (5)$$

Отсюда легко выводится:

$$u_t(x, t-0) = -u_t(x, t+0), \quad (x, t) \in \text{supp } \square u, \quad |u(x, t)| = \Delta. \quad (6)$$

То есть постулирование (5) приводит к континуальному аналогу гипотезы Ньютона для абсолютно упругого удара, который в данном случае и рассматривается. Вопрос о введении каких-либо гипотез рассеяния энергии при взаимодействиях такого рода представляет собой самостоятельную и нетривиальную проблему.

Условия типа (3) – (6) в случае одностороннего ограничителя рассматривались ранее в работах [3-5]. Используя один из результатов работы [4], можно показать, что неравенства (5) эквивалентны условию дозвукового распространению взаимодействий: если  $|u[x, t(x)]| = \Delta$ , то  $|t'(x)| \leq 1$ . (В принятых единицах измерения скорость звука равна единице).

Условия ударного взаимодействия (3) - (5) определяют обобщенную функцию, описывающую ударное взаимодействие и обозначаемую ниже как  $\Phi(u)$ . При помощи этой функции уравнение можно записать как нелинейное уравнение Клейна – Гордона [2, 5-7]

$$\square u + \Phi(u) = 0. \quad (7)$$

Для принятой гипотезы во время контакта и какого-либо из ограничителей:

$$|\Phi\{u[x, t(x)]\}| = J\delta[t-t(x)], \quad |u[x, t(x)]| = \Delta, \quad (8)$$

где плотность ударного импульса [6 - 8]

$$J = 2|u_t[x, t(x)-0]|.$$

В дальнейшем, изучению будут подлежать системы, в которых колебания струны возбуждаются сторонними источниками. Тогда вместо (7) модель будет представлять собой нелинейное уравнение Клейна-Гордона с правой частью:

$$\square u + \Phi(u) = h(t, u, u_t, \dots),$$

где вид функции  $h(\dots)$  обсуждается ниже.

В частности, для автоколебаний струн, например, находящихся в набегающих потоках газа или жидкости часто принимается [13 - 15]  $h = h(u_t)$ , где  $h(y)$  – полином нечетной степени с вещественными коэффициентами.

2. В работе [6], имея в виду изучить стоячие волны в определенном смысле соответствующие собственным формам линейной струны, выбирались начальные условия вида

$$v_0(x) = 2 \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} N [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})]. \quad (9)$$

Здесь  $\eta(x)$  - функция Хевисайда; отрезок  $[-1/2, 1/2]$  разбит на  $N$  равных частей  $\square l = N^{-1}$ ; принято  $x_j = x_l + (j-1)N^{-1}$ ,  $j=1, \dots, N$ ;  $x_1 = -1/2$ .

Выбранные начальные условия действительно в определенном смысле отвечает тем, что дают синусоидальные формы колебаний линейной струны и порождают семейство стоячих волн, имеющих «пилообразные» профили [16] (рис. 4 – штриховые линии). Периоды колебаний, естественно, совпадают с периодами колебаний линейных форм  $T_{0N} = 2N^{-1}$ .

При установке вблизи струны двусторонних ограничителей, условиям (2) и (9) отвечает семейство  $T_N$  – периодических ( $T$  – периодических) стоячих трапециевидных волн  $u(x, t) = A_N(x, t) T_N = 2\Delta N^{-1}$  [6] (рис.4).

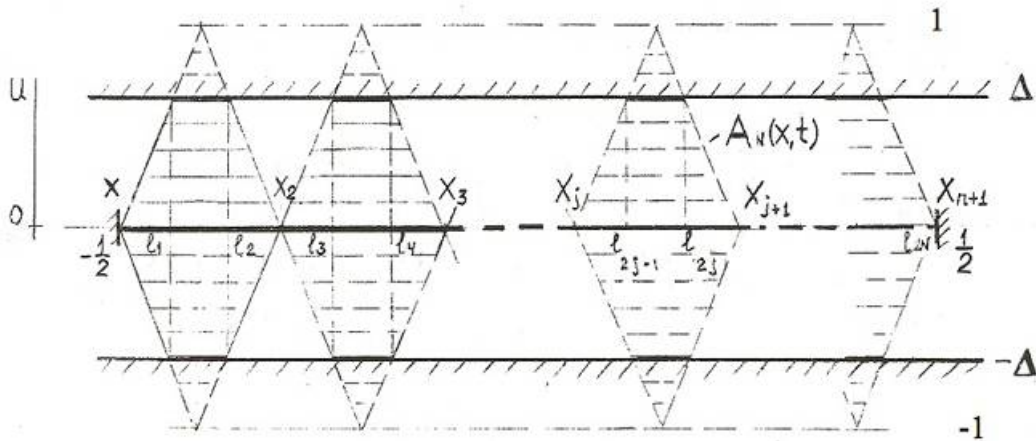


Рис.4.

С соответствующих сторон к ограничителями со скоростями  $v = \pm 2N$  подходят прямолинейные отрезки струны  $[l_j^-, l_j^+] \subset [x_j, x_{j+1}]$ , причем, используя элементарные построения, найдем:  $l_j^- = -1/2[2(j-1) - N + \Delta]N^{-1}$ ;  $l_j^+ = 1/2(2j - N - \Delta)N^{-1}$

Затем эти участки в соответствии с (6) мгновенно отскакивают от ограничителей и совершают движения в обратном направлении. То есть через время  $1/2 T_N$  те же участки соударяются с противоположенными ограничителями и так далее.

Аналитические выражения для членов семейства высших форм хлопков  $\{A_N\}$  можно получить при помощи методов частотно-временного анализа [2, 5, 8]. Так как найденные стоячие волны, очевидно, удовлетворяю условию  $u(x,t) = -u(x, t + 1/2 T_N)$ , то периодические волны семейства  $\{A_N\}$ , удовлетворяющие уравнению (7), должны удовлетворять интегральному уравнению вида [2, 5, 8]:

$$A_N(x,t) = - \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{1/2 T} \chi(x,y;t-s) \Phi[A_N(y,s)] ds dy \quad (10)$$

Учитывая условие (9) и представление (8), для плотности силы  $\Phi$ , запишем

$$\Phi[A_N(y,s)] = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} J_N \delta^{T/2}(t-t_0) [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})], \quad (11)$$

где плотность ударного импульса  $J_N = 2N$ ; момент первого подхода струны к ограничителю  $t_0 = 0,5 \Delta N^{-1}$ ; симметричная T-периодическая последовательность  $\delta$ -функций дается, например, обобщенным рядом Фурье вида:

$$\delta^{T/2}(t) = 2T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[(2k+1)i\omega t]; \quad \omega = 2\pi T^{-1};$$

соударения происходят при  $t_{0q} = t_0 + 0,5 T q$  ( $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

В (10) также входит  $\chi(x,y;t)$  – симметричная периодическая функция Грина (ПФГ) линейной задачи, представимая в виде ряда

$$\chi(x,y;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(t) \sin[(\pi n(x+1/2))] \sin[(\pi n(y+1/2))].$$

Здесь обозначено  $\chi_n(t)$  – симметричные ПФГ линейных осцилляторов с собственными частотами  $\Omega_n = \pi n t^{-1}$ . При  $t \in [0, 1/2 T]$  указанные ПФГ даются конечными формулами [5, 7, 8]:

$$2\chi_n(t) = \sin \Omega_n(t - 1/4 T) [\Omega_n \cos 1/4 \Omega_n T]^{-1}, \quad (12)$$

причем это представление имеет место только в пределах указанного полуинтервала. Для получения полного представления необходимо продолжить функцию (12) для всех  $t$ , исходя из условий  $\chi_n(t) = -\chi_n(t + 1/2 T)$  [8].

Принимая во внимание сказанное, а также пользуясь вычислениями, проделанными ранее в [6], получим после ряда преобразований:

$$A_N(x,t) = \sum_{k=1}^N k^{-1} \Lambda_{kN} \sin[1/2 N^1 k \pi (1-\Delta)] \sin[1/2 N^1 k \pi (x+1/2)] \chi_k(t-t_0), \quad (13)$$

$$\Lambda_{kN} = 4\pi \sum_{j=1}^N (-1)^j \sin \frac{1}{2} (2j-1) \pi k N^{-1}$$

Отметим, что для получения конечного выражения  $\chi_k(t-t_0)$  необходимо учесть, что представление (12) верно только при  $(t-t_0) \in [0, 1/2 T]$ . Вне данного полуинтервала формула (12) нуждается в корректировке (см. [5, 7, 8]).

Стоячие волны  $A_N(x,t)$  удовлетворяют сформулированным условиям удара (3) – (6) [6].

Стоячие волны  $A_N(x,t)$  жестко анизохронны. Чтобы в этом убедиться, введем параметр, однозначно связанный с полной энергией стоячей волны – полный импульс удара:

$$I_N = N J_N \sum_{j=1}^N (I_j^+ - I_j^-) \geq 0.$$

При этом считаем, что величины  $J_N$  - не фиксированы, а зависят от частоты колебаний  $\omega$ . Формула (13) останется в силе, но изменятся значения, определяющих её параметров. Так как значение  $J_N$  численно равно удвоенной скорости каждого из  $N$  ударяющихся участков струны, то, посредством простых вычислений, можно показать для всех  $j$ :

$$I_{Nj}^0 \equiv I_{Nj}^+ - I_{Nj}^- = N^{-1} - 4\Delta J_N^{-1},$$

и, следовательно,

$$J_N = 4\Delta \pi^{-1} \omega; I_{Nj}^0 = N^{-1} - \pi \omega^{-1}; I_N = 4\Delta \pi^{-1} (\omega - \pi N) \geq 0, \quad (14)$$

то есть импульс прямо пропорционален частоте движения и  $N$ -я трапециевидная форма волны может существовать лишь справа от  $N$ -й формы линейных колебаний:  $\omega \geq \pi N$ . В случае нефиксированной полной энергии будем обозначать:  $A_N(J_N; x, t)$ , причем  $A_N(4N; x, t) \equiv A_N(x, t)$ .

Заметим также, что в этом случае предположение  $\Delta < 1$ , вообще говоря, несущественно.

**3.** Специфические начальные условия (9), вообще говоря, представляются весьма трудно реализуемыми на практике. Однако семейство решений  $\{A_N\}$  играет в теории подобных систем совершенно особую роль. Рассмотрим начальные условия, приводящие в линейном случае к стоячим волнам с профилями, в определенном смысле подобным высшим синусоидальным формам линейной задачи.

Простейший пример: в условиях (2) примем  $v_0(x) = N\pi \sin[N\pi(x+1/2)]$ ;  $N = 1, 2, \dots$ . Более общие начальные условия данного типа, определяются следующим образом.

Снова разобьем отрезок  $[-1/2, 1/2]$  на  $N$  отрезков  $[x_j, x_{j+1}]$  и положим теперь:

$$v_0(x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} v_j(x) [\eta(x-x_j) - \eta(x-x_{j+1})]; \quad v_j(x) \geq 0; \quad \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_j(x) dx = 2. \quad (15)$$

Подобные начальные условия порождают стоячие волны, аналитическое представление которых было дано в [6].

Было доказано, что периодичность трансформированных форм стоячих волн возможна лишь при соизмеримости периодов колебаний линейной струны  $T_0 = 2$  и периодов форм  $\{A_N\}$   $T_N = 2\Delta N^{-1}$ , то есть при рациональных значениях зазора  $2\Delta$ . В общем случае формула начальные условия (14) приводят к почти - периодической стоячей волне [3, 6, 9, 10].

Таким образом, оказывается, что для данного достаточно общего класса начальных условий, семейство  $\{A_N\}$  поставляет пример единственного периодического виброударного процесса, сохраняющего периодичность вне зависимости от значения зазора. Показывается, что этот факт остается в силе и при более общих, нежели (15), начальных условиях. Таким образом, в определенном смысле, именно семейство  $\{A_N\}$  обладает в определенном смысле «структурной

устойчивостью». Было показано, что этот факт остается в силе и при более общих, нежели (15), начальных условиях

4. Обратимся к автоколебаниям струны (абсолютно гибкого стержня). Будем рассматривать струну, колеблющуюся между двумя прямыми протяженными ограничителями (см. п.п. 1-3). Рассмотрению подлежат авторезонансные режимы [17]. Предположим, что перпендикулярно линии оси её статического положения имеет место набегающий стационарный поток жидкости или газа, приводящий к возбуждению стационарных автоколебаний [13-15]. Предполагая возбуждаемые волны плоско поляризованными и происходящими в плоскости  $(x, u)$ , обратимся к уравнению движения.

$$\square u + \Phi(u) = h(u_t), \quad (16)$$

где  $h(y)$  – гладкая при всех  $y \in \mathbf{R}$  нечетная полиномиальная функция нечетной степени. Обычно плотность силы  $h$  аппроксимируют кубической параболой вида:

$$h(u_t) = \alpha u_t - \beta u_t^3 + \dots (\alpha, \beta > 0). \quad (17)$$

Существуют эффективные экспериментальные методы, позволяющие измерить значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  в зависимости от параметров набегающего потока [13-15]. В представление (17) могут быть добавлены и высшие члены; обычно, их влияние оказывается пренебрежимо малым.

При переходе к уравнениям движения типа (17), строго говоря, должны быть скорректированы условия (3) и (5), понимаемые в смысле обобщенных функций. Именно: если  $u \geq 0$  или  $u \leq 0$ , то соответственно

$$\square u - h(u_t) \leq 0; \quad \square u - h(u_t) \geq 0.$$

Постулированное уравнение баланса мощностей (5) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (|u_x|^2 + |u_t|^2) - \frac{\partial}{\partial x} (2u u_x) = 2 h(u_t) u_t \quad (18)$$

Из дальнейшего будет видно, что возбуждающий фактор может записываться в более общем виде, например как  $h_1(t, x, u, u_t)h(u_t)$ , где непрерывная по совокупности переменных функция  $h_1$  – описывает распределение возбуждения вдоль струны.

При изучении автоколебаний вначале предположим, что и струна, и протяженные преграды – неограниченны по длине. Будем искать решения уравнения (16) в виде периодических волновых пакетов  $u(x, t) = U(kx - \omega t)$ , где предполагается, что функция  $U(\theta)$  имеет некоторый период  $\tau$ . Подставив  $U$  в (16) и, учитывая (8) и (11), получим уравнение движения «традиционной» виброударной системы:

$$(k^2 - \omega_0^2)U''(\theta) + J_0 \delta^{\tau/2}(\theta - \theta_0) = h[\omega_0 U'(\theta)],$$

где  $J_0 = 2(k^2 - \omega_0^2)|U'(\theta_0 - 0)|$  – импульс описывающей частицы в сопровождающей системе координат. Удары происходят поочередно через каждые полпериода с верхним и нижним ограничителями:  $\Delta = U(\theta_0 + q\tau)$ ,  $\Delta = U(\theta_0 + q\tau + \tau/2)$ , причем, в виду автономности системы, без ограничения общности, можно положить  $\theta_0 = 0$ .

Последнее уравнение легко проинтегрировать, понизив его порядок. В данном случае для «кубического трения» (17) задача сводится к хорошо известной задаче. Стационарный авторезонансный процесс имеет вид:  $U(\theta) = -J_0 \chi_0^*(\theta)$ , где «пилообразная» функция  $\chi_0^*(\theta) = (k^2 - \omega_0^2)^{-1}(0,5t - 0,25\tau)$ , причем  $t \in [0, 0,5\tau]$ , вне этого полуинтервала предыдущее равенство распространяется по периодичности, исходя из условий симметрии для всех  $t \in \mathbf{R}$ . Стационарному значению «импульса» и зависимости «импульса» от «частоты движения»  $\omega_1 = 2\pi/\tau$  отвечают соотношения:

$$J_0 = 2\sqrt{\alpha/\beta}; J_0 = 4\Delta\pi^{-1}\omega_1(k^2 - \omega_0^2), \quad (19)$$

причем второе равенство, представляющее из себя дисперсионное соотношение, с точностью до множителя («массы частицы» в сопровождающей системе координат), совпадает с

выражением для плотности ударного импульса, отвечающего в исходной ограниченной системе семейству форм  $\{A_N(J_N; x, t)\}$ ; см. (14).

5. Вернемся к исходной задаче об автоколебаниях струны, находящейся между двумя протяженными (но ограниченными по длине) ограничителями. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что семейство  $\{A_N(J_N; x, t)\}$  удовлетворяет уравнению движения

(16) так как при  $J_N \equiv J_0 = 2\sqrt{\alpha/\beta}$  для стоячих волн  $u(x, t) \equiv A_N(J_0; x, t)$  одновременно:

$$\square u + \Phi(u) \equiv 0, h(u_t) = \alpha u_t - \beta u_t^3 \equiv 0 \quad (20).$$

Последнее тождество иллюстрирует рис. 5. Здесь сплошными линиями при помощи стрелок показан разрывный профиль  $u_t(x, t) = A_N(J_*; x, t)$  при некотором значении  $J_0 = J_*$ ; пунктиром показан профиль  $[-u_t(x, t)]$ . Ясно, что всегда можно так выбрать числа  $\alpha, \beta > 0$ , чтобы второе тождество (20) действительно имело место.

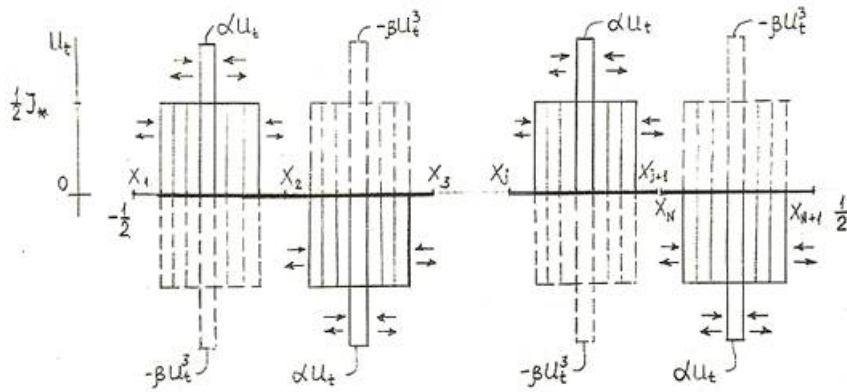


Рис. 5

В данном случае параметры авторезонансных процессов определяются из (14) и найденного представления для  $J_N$ . После простых вычислений для  $j$ -го участка струны, взаимодействующего с ограничителем и частоты авторезонанса, находим соотношения:

$$I_{Nj}^0 \equiv I_{Nj}^+ - I_{Nj}^- = N^{-1} - 2\Delta\sqrt{\beta\alpha^{-1}}; \omega_N = \pi N\sqrt{\alpha}[\sqrt{\alpha} - N(\sqrt{\alpha} - 2\Delta\sqrt{\beta})]^{-1}. \quad (21)$$

Форма  $A_N$  может реализовываться только, если  $\omega_N \geq \pi N$ , то есть, если  $\sqrt{\alpha}N^{-1} > \sqrt{\alpha} - 2\Delta\sqrt{\beta} > 0$ .

Стационарные значения полного импульса удара

$$I_N^* = 4\Delta\pi^{-1}(\omega_N - \pi N).$$

Авторезонансные режимы типа найденных обеспечивают баланс работ неконсервативных сил на периодическом движении  $u(x, t)$  за период (полупериод) движения, получаемых двукратным интегрированием соотношения (18):

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_0^T h[u_t(x, t)] u_t(x, t) dt dx = 0. \quad (22)$$

И кроме того, как это видно из соотношений (20), эти режимы осуществляют и баланс самих сил. Это означает, что система относится к классу систем с компенсацией сил диссипации в каждый момент времени – (КСД – системам [18]); они также получили наименование «псевдоконсервативных».

Для изучения вопроса устойчивости найденного решения система анализировать методом конечных разностей. Струна единичной длины дискретизировалась по стандартной (и потому подробно не описываемой) схеме и при моделировании удара заменялась системой  $n$  упруго связанных сосредоточенных тел равной  $M_0 = n^{-1}$ . Пусть координата (скорость)  $q$ -го тела во

время  $j$ -го шага по времени, продолжительность которого равна  $\Theta$ , есть  $u_q^j(v_q^j)$ . По выполнению условия  $|u_q^{j+1}| > \Delta$  полагалось  $|u_q^{j+1}| = \Delta, v_q^{j+1} = 0$  и при этом считалось, что на каждое из соударяющихся тел действует сила реакции, равная импульсу, отнесенному к шагу по времени  $f_{qj} = M_0 v_q^j \Theta^{-1} \text{sign } u_q^{j+1}$ . Выбиралось:  $n=60, h=n^{-1}; \Theta=0,75h$ ; значение зазора варьировалось в широких пределах. При соответствующем задании начальных условий были получены формы  $A_N(x, t)$  (при нескольких первых значениях  $N$ ) и установлена их устойчивость.

Аналитическое исследование устойчивости авторезонансных режимов в частном случае силы возбуждения, приложенной в единственной точке, выполнено в классической работе А. А. Витта [19], посвященной динамике скрипичных струн полуэкспериментальное изучение которых восходит к Г. Гельмгольцу [20]. В этих работах естественно не рассматривались какие-либо ограничители хода струны.

**6.** В заключении сделаем ряд замечаний.

**А.** При рассмотрении подобных автоколебательных моделей распределенных систем представляют интерес и другие задачи, связанные с взаимодействием струн с ограничителями хода более сложных структур: прямые ограничители малой длины, точечные ограничители, выпуклые, вогнутые, наклонные, тавровые и другие ограничители. Задачи такого рода предполагаются рассмотреть в дальнейшем. Необходимо отметить, что подобные системы весьма часто оказываются КСД - системами.

**Б.** Рассматриваемое свойство автоколебательных систем достаточно чувствительно к структуре выбранной модели. Если, например, в разделе отказаться от гипотезы об отсутствии потерь энергии при взаимодействии и каким-то образом учитывать эти потери, то проведенные рассуждения могут рассматриваться только как приближенные.

Это касается и механизма возбуждения автоколебаний. Например, если обратится к Ван-дер-Полевскому типу возбуждению  $h(u, u_t) = (a - bu^2)u_t$ , где  $a, b > 0$ , то можно установить, что такая система не является КСД – системой. Поиск точных аналитических решений здесь проблематичен, однако хорошо развиты многочисленные приближенные методики.

Выделение данного класса моделей имеет смысл не только в связи с возможностью построения эталонных точных решений сильно нелинейных задач динамики, но и (как в случае со струнами и стержнями) для объяснения экспериментально наблюдаемых динамических эффектов (например, возникновения трапециевидных волн). Кроме того, можно синтезировать возбуждающее воздействие так, чтобы система целенаправленно реализовывала авторезонансный КСД - режим. При практическом использовании эти режимы оказываются эффективными и экономичными.

**В.** Физическое обоснование существования волн с изломанными профилями в струнных системах, впервые, по-видимому, дал А.А. Витт [19]. Он объяснял это эквидистантностью спектра собственных частот линейной струны, так как широкополосные воздействия (здесь – и удары, и механизм возбуждения автоколебаний) в этом случае способны одновременно возбудить большое число мод колебаний. А. А. Витт провел аналитическое исследование подобных волн и их устойчивости.

Заметим, что подобные трапециевидные волны возникают и при автоколебаниях струн, вибрирующих в потоке жидкости или газа и без ограничителей [16].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-08-01235-а ).

### Список литературы.

1. Веденова Е.Г. Маневич Л.И. Периодические и локализованные волны в виброударных системах с ргулярными структурами// Машиноведение. 1984. № 4. С.21-30.
2. Крупенин В.Л. К теории виброударных систем с распределенными ударными элементами // Изв. АН СССР.МТТ. 1986.№1.С.25-32.



3. Cabannes H. Cordes Vibrantes avec Obstacles//Acustica. 1984. V.55.P.14-20.
4. Bamberger A., Schatzman M. New results of a string vibrating against the obstacles // Saim. J. Math. Anal. 1983. Vol. 14. № 3. P. 560-595.
5. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. №5 С.13-30.
6. Крупенин В.Л. Трансформация форм колебаний струны, взаимодействующей с двумя протяженными преградами.// ДАН СССР.1990.Т.313.№6.С.1394-1394.
7. Krupenin V.L., Veprik A.M. Vibroconductors equipped with impact elements and distributed vibroimpact systems // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V.1. Czech Prague: CTU, 1996, P. 229-234.
8. Крупенин В.Л. Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2001, №3. - С.20-28
9. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей// Доклады Российской Академии наук. 2003. № 388 (3).
10. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Продольные колебания тонкого стержня, взаимодействующего с неподвижным ограничителем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. №6. С. 41-48.
11. Крупенин В.Л. Об эффекте возникновения высших нелинейных форм стоячих волн в виброударных системах с распределенными ударными элементами и большим числом ударных пар // Интернет- журнал. «Вестник научно-технического развития». №8. 2010.С.31-40.
12. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Эксперименты с протяженными виброударными системами (резонансные движения)// Интернет- журнал. «Вестник научно-технического развития». №7. 2010.С.3-10.
13. Махутов Н.А., Каплунов С.М., Прусс Л.В. Вибрация и долговечность судового энергетического оборудования. Л.: Судостроение, 1985. 302 с.
14. Аксиса Ф., Антунеш Дж., Виллар Б. Обзор методов расчета гидродинамических возбуждаемых вибраций // Теоретические основы инженерных расчетов. М.: Мир, 1988, № 4. С. 109 – 123.
15. Паркинсон Г.В., Брукс Н.П. Аэроупругая неустойчивость плохо обтекаемых цилиндров // Труды американского общества инженеров-механиков: Прикладная механика. Сер.Б. 1961. Т. 28. С. 115-123.
16. Крупенин В.Л. Стоячие волны с пилообразными профилями, возбуждаемые набегающими потоками жидкости или газа.// Интернет-журнал «Вестник научно - технического развития». 2014. №10. С. 10 –14.
17. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 905 с.
18. Крупенин В.Л. К динамике автоколебательных систем с компенсацией сил диссипации в каждый момент времени.// Интернет-журнал «Вестник научно - технического развития». 2014. №6. С. 10 –15.
19. Витт А. А. К теории скрипичной струны//ЖТФ. 1936. Т. 6. Вып. 9. С. 1459— 1479.
20. Helmholtz H. L. F. On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music. London: Longmans, Green and Co. 1895