УДК 330.4

ОЦЕНКА РИСКОВ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТИ ДОХОДА И РИСКА

© Н.В.Катаргин

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации", Москва, Россия

nnnkkk@yandex.ru

Аннотация: *Предложена технология оценки рисков в моделях с произвольным распределением плотности вероятности дохода и риска и формирования портфелей кредитов и инвестиций с учётом возможного дохода и риска.*

Ключевые слова: *оценка рисков, эмпирическое распределение вероятностей, портфель инвестиций.*

RISK ESTIMATION IN ANY DISTRIBUTION LOWS OF INCOME AND RISK

© N.V.Katargin

Financial University under the Government of Russian Federation, Moscow

Abstract: *The procedure of risk estimation in models with any distributions of probability density of income and risk and the formation of portfolios of loans and investments with regard to possible income and risk.*

Keywords: *risk management, empirical probability distribution, the portfolio of investments.*

В стохастических моделях риск является случайной величиной и описывается распределением вероятностей на заданном множестве. Необходимой предпосылкой для обоснованного применения стохастических моделей считается наличие статистически значимой информации о прошлых реализациях неопределённых переменных. Но в отличие от физики, где эксперименты можно проводить многократно, условия экономической деятельности постоянно меняются, и повторение опыта в одинаковых условиях практически неосуществимо. Математический аппарат тот же, но об отличиях надо помнить. Законы распределения вероятностей рисковых событий, как правило, не соответствуют закону нормального распределения Гаусса (ЗНР), и вероятности больших потерь гораздо больше, чем следует из ЗНР. Это называется “толстый хвост” функции распределения. Обычно в учебниках и статьях исследуют функцию распределения только рисков. Мы будем использовать функцию распределения норм доходностей, левый хвост которой будем интерпретировать как вероятности потерь. Это позволит калибровать функцию по всем статистическим данным или экспертным оценкам, относящимся как к доходам, так и к рискам. Таких точек, как правило, мало, чтобы оценить вид распределения, но мы будем предполагать, что вид распределения нам известен из теоретических работ или нарисован экспертами. В этом случае немногих точек хватит для оценки параметров распределения, его построения, экстраполяции на левый хвост и оценки вероятности рисковых событий. Вопрос о чувствительности оценки риска к изменению или погрешности реперных точек исследован методом Монте Карло.

Предположим, что на основе предыдущего опыта или экспертных оценок мы можем оценить плотности вероятностей трёх возможных норм доходности двух проектов. В дальнейшем будем называть их вероятностями и обозначать p. Использованы данные задачи из [1]. Требуется оценить вероятность того, что ожидаемая доходность каждого проекта будет ниже заданного значения (риск) и сформировать портфель с заданной суммой инвестиций и минимальным соотношением риск/доход. В данной работе мы будем обозначать термином "риск" вероятность того, что норма доходности $x<5$. Она вычисляется как отношение площади под кривой распределения нормы доходности при $x<5$ ко всей площади. Мы считаем, что при $x=5$ рентабельность равна нулю, и надо резервировать средства для компенсации возможных потерь.

Имеются два проекта с предполагаемыми вероятностями доходностей:

Таблица 1. Исходные данные проектов.

Проект 1		Проект 2	
x	*p*	*x*	*p*
10	0,2	11	0,25
17	0,6	16	0,7
25	0,2	20	0,05

Рассмотрим три варианта распределений вероятностей доходностей: 1)ЗНР, 2)логнормальное, 3)произвольное распределение.

ЗНР, в принципе, можно откалибровать по трём точкам. Возникает вопрос об устойчивости решения, но это выходит за пределы данной работы. Для настройки моделей мы использовали метод наименьших квадратов и сервис "Поиск решения" (Solver) Excel. Технология ясна из таблицы 2:

Таблица 2. Оценка параметров ЗНР методом наименьших квадратов.

x	*p*	*p*x*	*Gauss*	e^2
10	0,2	2	0,2	2,67E-15
17	0,6	10,2	0,6	2,43E-13
25	0,2	5	0,1999	2,56E-12
	A	*Mx*	*СКО*	Сумма
	7,63	17,5	5,05	2,8E-12
		*Mx по p*x*		
		17,2		

Задаются произвольные значения параметров ЗНР: амплитуда *A*, ожидаемое значение *Mx,* оцениваемое средним значением *Xср,* и среднеквадратическое отклонение *СКО.* В столбце Gauss вычисляем ЗНР с амплитудой *A*, используя функцию НОРМ.РАСП с параметрами (*x, Mx, СКО, 0*). В последнем столбце вычисляются квадраты отклонений $e^2 = (p - Gauss)^2$ и их сумма, которая в "Поиске решения" объявляется целевой функцией; её надо минимизировать, изменяя ячейки *A, Mx, СКО*. Ограничений нет, но надо учесть, что задача нелинейная, и при неправильном выборе исходных значений варьируемых параметров компьютер может не найти решения и выдаст сообщение об ошибке. Надо их поменять и опять запустить "Поиск решения". Аналогично получим для Проекта 2: *A=4,87; Mx=14,57; СКО = 2,28*. Построенные по этим параметрам функции *p(x)* можно использовать для оценки рисков отдельных проектов и их совокупности.

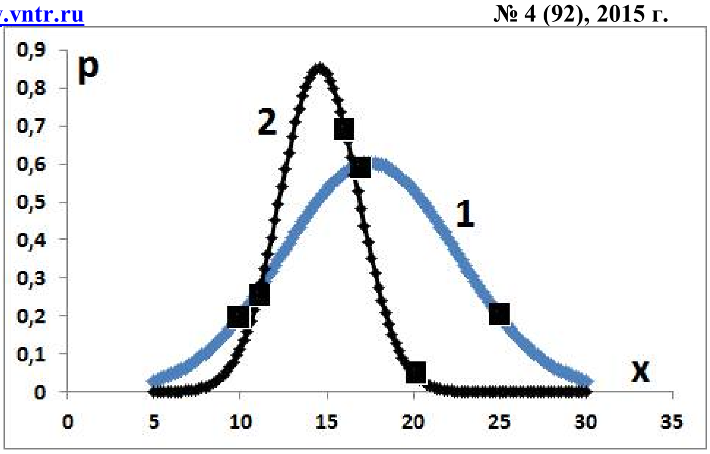

Рис.1. Настройка моделей с ЗНР.

В природе и экономике достаточно часто встречаются распределения частот по логнормальному закону, который сводится к ЗНР заменой *x* на *ln(x)*. Проводим оценку параметров модели методом наименьших квадратов:

Таблица 3. Оценка параметров логнормального распределения.

x	*p*	*p*x*	*ln(x)*	*Gauss(ln)*	*e^2*
10	0,2	2	2,302	0,199999	1,46E-12
17	0,6	10,2	2,833	0,599998	5,95E-12
25	0,2	5	3,219	0,199993	4,34E-11
	A_{ln}	Mx_{ln}	$СКО_{ln}$		
	0,472	2,760	0,305		5,08E-11

Для Проекта 2 получим $A_{ln}=0,38$; $Mx_{ln}=2,64$; $СКО_{ln}=0,14$. Параметры получены для логарифмической шкалы по оси *x*; график функции НОРМ.РАСП, построенной по этим параметрам, будет симметричный колоколообразный. Теперь надо вернуться к натуральным значениям *x*, вычислив экспоненты. Проблема заключается в том, что логнормальное распределение имеет толстый хвост справа, то есть в области доходов, а мы предполагаем, что он должен быть слева, в области возможных потерь. Чтобы доходы были справа, а потери слева, надо график зеркально отразить. Значения *x* станут отрицательными с центром –*Mx*. Добавив *2Mx,* мы вернём график в привычные оси координат, то есть преобразование идёт по формуле

$$x = 2\ Mx - exp(x_{ln})$$

Mx возьмём из расчётов ЗНР. Возможно, необходимая точность не будет обеспечена, в этом случае можно подобрать *Mx* вручную. Результаты представлены на рисунке 2.

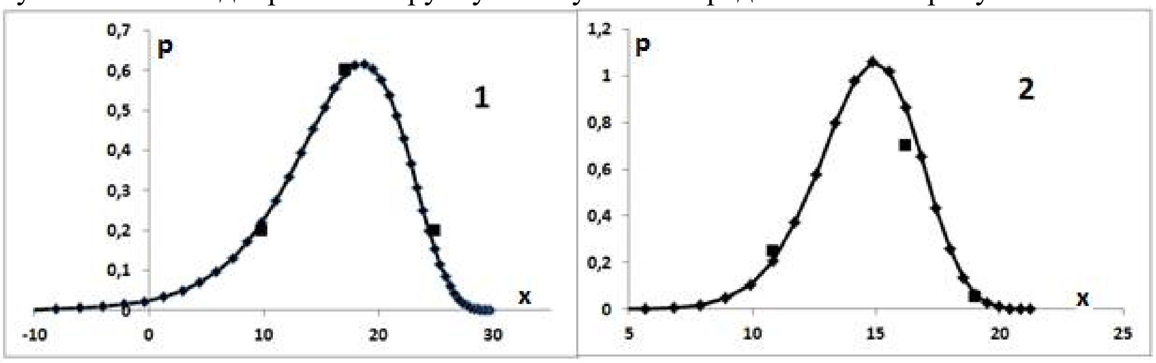

Рис.2. Настройка моделей с логнормальным законом распределения.

Наибольший интерес с точки зрения практического применения представляет оценка рисков с использованием законов распределения, которые нельзя аппроксимировать одной функцией, и нарисованных экспертами, обладающими большим опытом. В качестве примера мы рассмотрим функцию Гаусса с экспоненциальным хвостом слева. При этом возможны два варианта: 1)оценка параметров хвоста по экспериментальным точкам на хвосте; 2) изменение масштабов по осям *x* и *p* с целью привязки произвольного распределения к экспериментальным точкам, может быть, находящимся вне хвостов.

Вариант 1. Предполагается, что при $x=-20$ $p=0$, добавлены точки $x=4$ $p=0,1$ в Проект 1 и $x=3,5$ $p=0,05$ в Проект 2. Считаем, что точки $x=10$ $p=0,2$ в Проекте 1 и $x=11$ $p=0,25$ в Проекте 2 относятся и к гауссиане, и к экспоненциальному хвосту. Настройку гауссианы проводим как в модели с ЗНР, калибровку экспоненты $a{\cdot}exp(bx)$ проводим методом наименьших квадратов с использованием “Поиска решения”, где $e^2=(p- a{\cdot}exp(bx))^2$:

Таблица 4. Оценка параметров экспоненты

x	*p*	$a{\cdot}exp(bx)$	e^2
-20	0	0,00568	3,23E-05
4	0,1	0,09835	2,69E-06
10	0,2	0,20064	4,14E-07
	a	*b*	$Sum(e^2)$
	0,061	0,119	3,54E-05

В варианте 2 $a=0,017$ $b=0,244$. Графики представлены на рисунке 3.

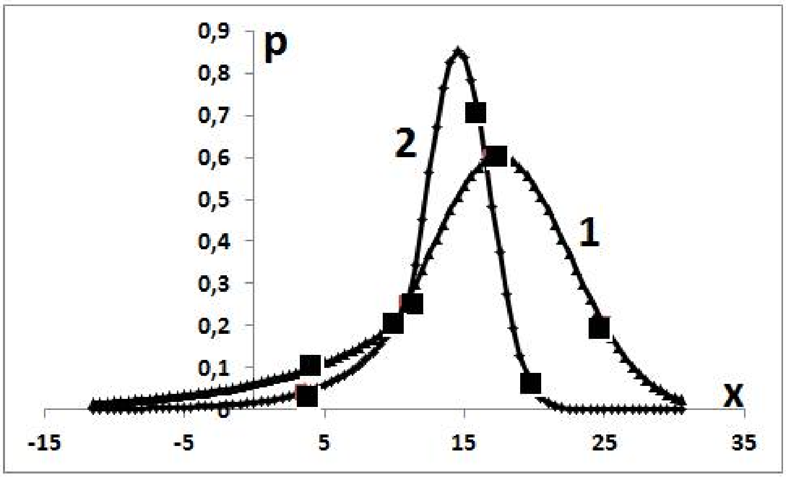

Рис.3. Настройка моделей с законом распределения: ЗНР + экспонента.

Вариант 2. Закон распределения может быть задан таблично. Мы в качестве произвольного эталонного закона распределения используем гауссиану в диапазоне $x \geq Mx - 2СКО$ с экспонентой в диапазоне $x < Mx - 2СКО$. Задаём диапазон по оси абсцисс -6 … +3, строим стандартную гауссиану с $Mx_{эт}=0$ и $СКО_{эт}=1$, используя функцию НОРМ.РАСП($x_{эт}$, 0, 1, 0). Слева строим экспоненту $a_{эт}{\cdot}exp(b_{эт}x_{эт})$, подбирая параметры, чтобы кривые стыковывались. В данном случае параметры экспоненты: $a_{эт}=0,13$; $b_{эт}=0,5$.

Предполагаем, что закон распределения задан, но мы можем изменять масштабы по осям, используя реперные точки, в данном случае *Mx, Mx–СКО, Mx+СКО*. В других случаях реперные точки могут быть другими. Для Проекта 1: $Mx=17,2$; $СКО=5,06$; соответственно $Mx–СКО=12,14$; $Mx+СКО=22,26$. Для Проекта 2: $Mx=14,57$; $СКО=2,28$; соответственно $Mx–СКО=12,3$; $Mx+СКО=16,85$. Эти точки соответствуют $x_{эт}= -1;\ 0;\ 1$ шкалы, по которой строилось эталонное распределение. Реальные шкалы x для двух проектов строятся путём линейных преобразований $x=c+d\cdot x_{эт}$. Коэффициенты c и d можно получить, решая системы линейных уравнений, или используя метод наименьших квадратов и "Поиск решения": минимизируется сумма квадратов отклонений реперных точек гауссианы от соответствующих значений на оси x, изменяя c и d. Для Проекта 1:

$$(c+d\cdot(-1) - 12{,}4)^2 + (c+d\cdot 0 - 17{,}2)^2 + (c+d\cdot 1 - 22{,}26)^2 \to min$$

Аналогично для проекта 2:

$$(c+d\cdot(-1) - 12{,}3)^2 + (c+d\cdot 0 - 14{,}57)^2 + (c+d\cdot 1 - 16{,}85)^2 \to min$$

Для оценки рисков важно соотношение площади левого хвоста в заданном диапазоне и всей площади под кривой распределения вероятностей. Масштаб по оси ординат не важен. В данном случае для наглядности мы изменили масштаб по оси ординат, чтобы точки, по которым калибровались гауссианы, оказались на графиках.

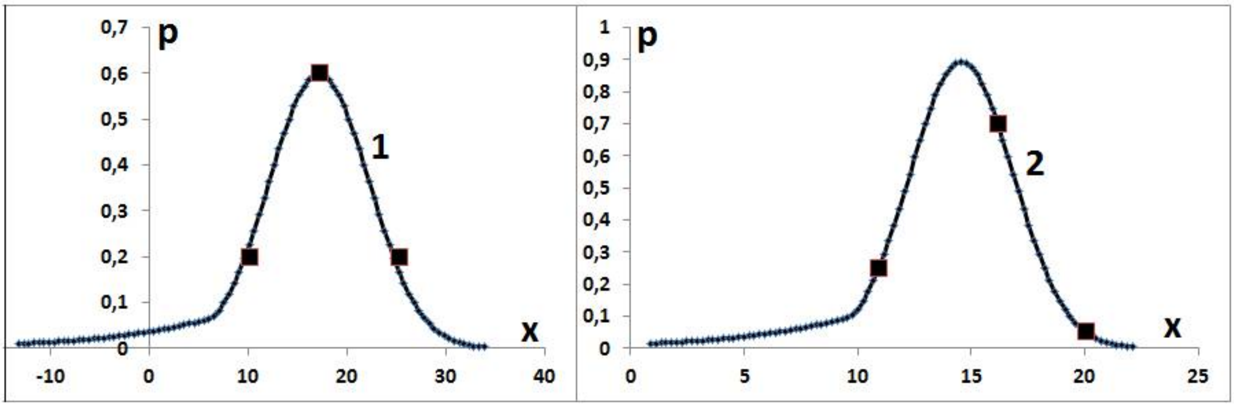

Рис.4. Настройка моделей с эмпирическим законом распределения.

Составим оптимальный портфель инвестиций в два проекта по критерию Риск/Доход → min, сумма инвестиций $Z_1+Z_2 = 100$. Результаты расчётов в Excel представлены в таблице 5. Порядок расчётов: задаются произвольные значения Z_1 и Z_2 (опорный план), они умножаются на средние доходности, сумма характеризует доход: $Z_1Mx_1 + Z_2Mx_2$. В качестве рисков по проектам в данном случае приняты отношение площади под кривой распределения в диапазоне $x<5$ ко всей площади; в данном случае 6% и 1,88%. Предполагается, что риски пропорциональны инвестициям, независимы, и квадрат суммарного риска равен сумме квадратов рисков по проектам: $Риск^2=Z_1^2R_1^2 + Z_2^2R_2^2$. Минимизируемая целевая функция *Риск/Доход,* Изменяя ячейки Z_1 и Z_2, ограничения: $Z_1, Z_2 \geq 0$, $Z_1 + Z_2=100$.

Таблица 5. Оптимизация плана инвестиций в Excel.

Z1	*Z2*		*Z1+Z2*	
9,74	90,25		100	
17,2	14,57	*Средние доходности Xcp*		
6,0%	1,88%	*Риски R %*		
*Z1*Xcp1*	*Z2*Xcp2*		*Доход = Z1*Xcp1 + Z2*Xcp2*	
170,5	1315		1485,5	
*Z1*R1*	*Z2*R2*			*Риск/Доход*
58,4	169,6	*Риски*		0,121→ min
Риски^2			*Риск^2=Сумма(Риски^2)*	Риск
3417	28792		32209	179,7

В течение времени нормы доходности и, соответственно, параметры распределения могут меняться. Исследуем вопрос чувствительности дохода и риска к этим изменениям, используя последнюю модель и полученный оптимальный план инвестиций в проекты: $Z_1 = 10$, $Z_2 = 90$. Предполагаем, что средние значения норм доходности изменяются случайным образом, отклонения распределены по закону ЗНР+экспонента, представленному на рисунке 4, $СКО_{Mx} = 1$. Исследования проведены методом Монте Карло: осуществлялась имитация случайных значений *Mx*, и соответственно смещалась вся функция распределения. В принципе, возможно варьировать и ширину распределения, но мы этого не делали. Для имитации случайных значений *Mx,* вычисления доходов и рисков, сохранения их значений был разработан программный модуль на языке Visual Basic for Applications (Excel). Выполнены 10000 имитаций.

На рисунке 5 представлены распределения рисков для двух проектов при оптимальном инвестировании: 10% в более рискованный Проект 1 и 90% в Проект 2. Мера риска – отношение площади под кривой распределения при $x<5$ ко всей площади. Получилось двугорбое распределение с хвостом для Проекта 1 (что странно, но метод Монте Карло даёт имитацию реальности) и асимметричное распределение с хвостом для Проекта 2 и Проектов 1+2. Параметры распределений рисков: Проект 1: 6±1,17 ; Проект 2: 1,9±1,13; Проект 1+2: 2,33±1,03.

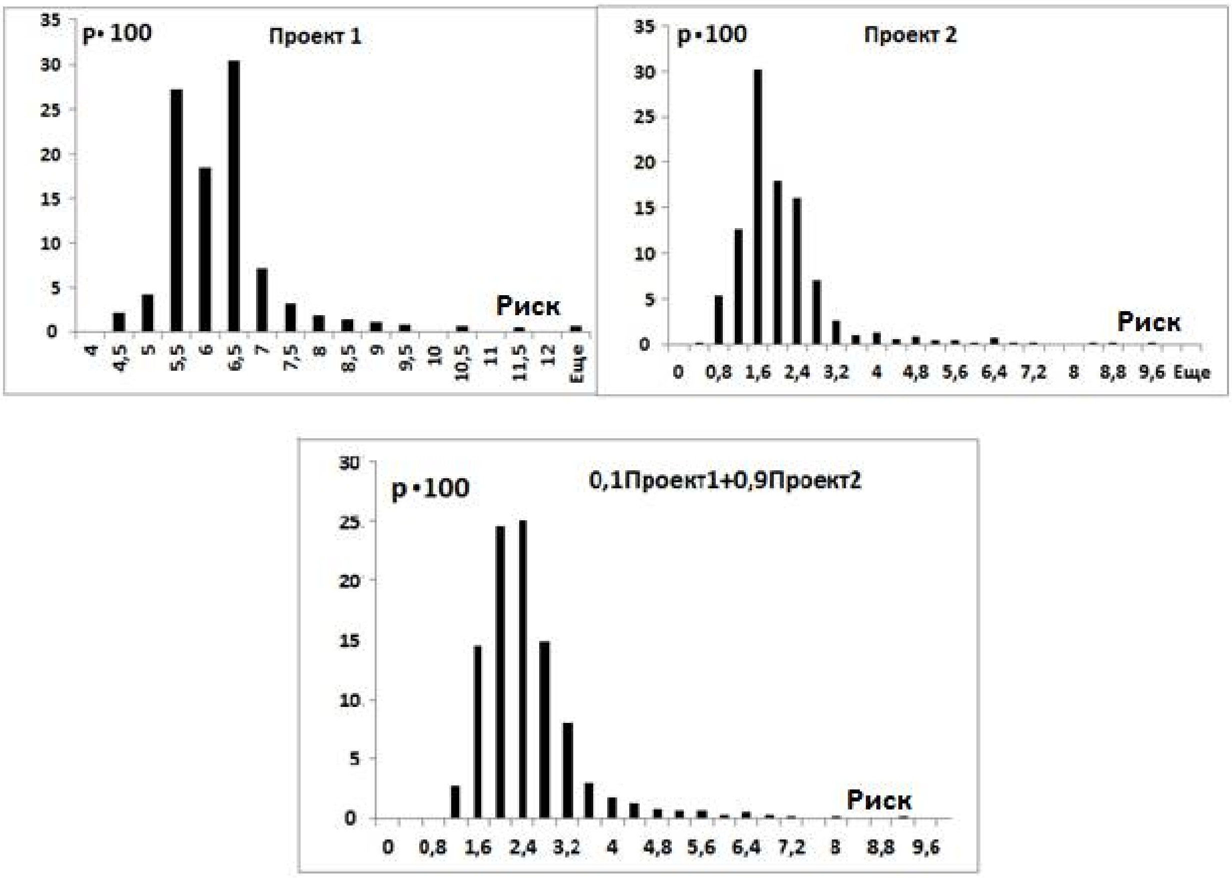

Рис. 5. Частотные распределения рисков.

На рисунках 6,7 представлены частотные распределения дохода, риска, отношения Риск/Доход и зависимость риска от *Mx* Проекта 2 при оптимальных инвестициях *Z1=10* и *Z2=90*. Корреляционной зависимости риска от *Mx1* не выявлено, зависимость от *Mx2* прослеживается, но могут быть аномальные выбросы, обусловленные влиянием *Mx1*.

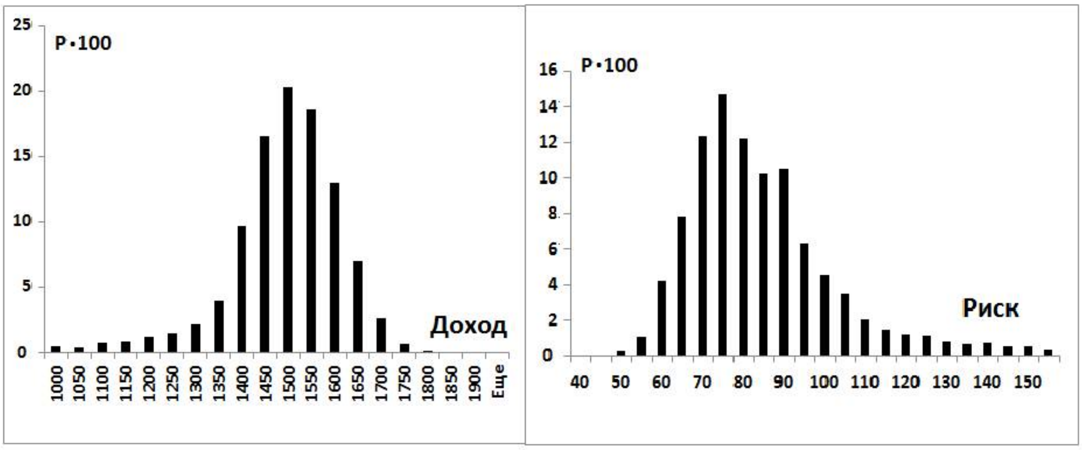

Рис. 6. Частотные распределения дохода и риска при инвестициях $Z_1=10$ и $Z_2=90$.

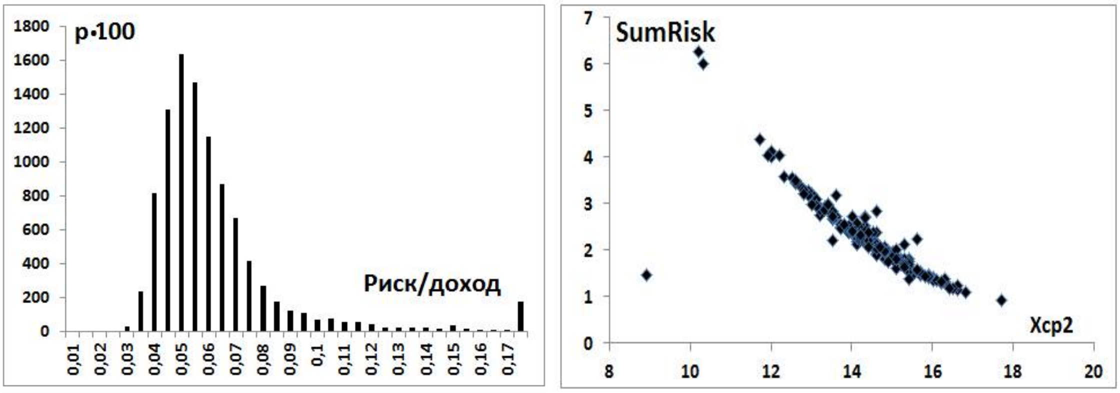

Рис. 7. Частотное распределение отношения Риск/Доход и зависимость риска от *Mx2* при инвестициях $Z_1=10$ и $Z_2=90$.

Возникает вопрос о целесообразности корректировки плана Z_1, Z_2 в зависимости от колебаний средней нормы доходности *Mx1* и *Mx2*. Были проведены расчёты оптимальных планов в зависимости от случайных значений *Mx1* и *Mx2* (200 имитаций). Результаты, представленные на рисунке 8 показывают, что корреляционной зависимости, то есть чувствительности, нет, и корректировать планы “на ходу” нецелесообразно.

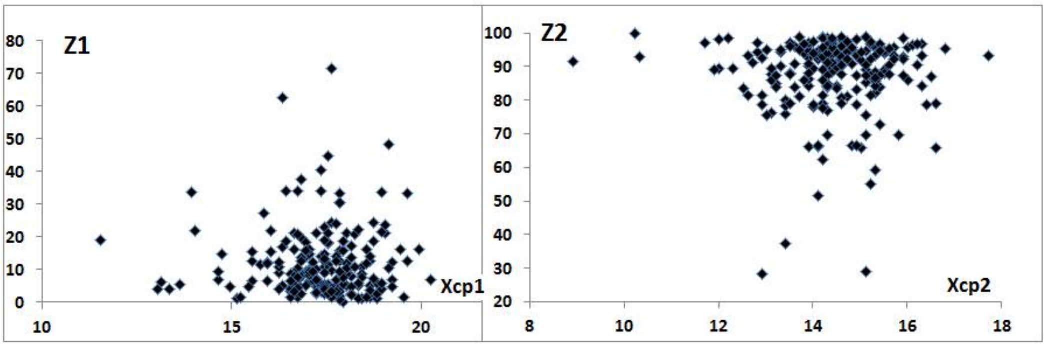

Рис. 8. Зависимость оптимальных инвестиций Z_1, Z_2 от колебаний средней нормы доходности.

Данные расчёты дают основания для оценки резервов для покрытия возможных убытков при хаотическом движении нормы доходности в зависимости от состояния внешней среды (рынка). Представленные технологии могут быть полезны для риск-менеджеров банков и инвестиционных компаний. Разумеется, в реальных компаниях и банках много проектов и факторов риска, но предложенный подход может быть использован при любых распределениях вероятностей доходов и рисков в разных проектах.

Список литературы

1. Ступаков В.С., Токаренко Г.С. Риск-менеджмент. М. – Финансы и статистика, 2005, с. 132-133.