

УДК 621.01:534.1

УСЛОВИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ СОВМЕСТНОМ УЧЁТЕ МЕДЛЕННЫХ И БЫСТРЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ

© Иосиф Исаакович Вульфсон

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна,
Санкт-Петербург, Россия.

jvulf@yandex.ru

Аннотация. Исследованы условия динамической устойчивости при совместном учёте быстрых и медленных изменений параметров. На базе метода условного осциллятора показано, что медленное изменение функций, описывающих нестационарные связи, приводит к локальным нарушениям условий динамической устойчивости внутри кинематического цикла и к изменению условий возбуждения параметрических резонансов. Исследован эффект «отрицательного» демпфирования, возникающий из-за гироскопических сил. Получены достаточные условия динамической устойчивости. Результаты исследования иллюстрируются на примерах колебательных режимов цикловых механизмов.

Ключевые слова: колебания, цикловые механизмы, динамическая устойчивость, параметрический резонанс.

CONDITIONS OF DYNAMIC STABILITY AT THE JOINT ACCOUNT OF SLOW AND FAST PARAMETER CHANGES

Iosif I. Vulfson

Saint-Petersburg State University of Technology and Design,
Russia, Saint-Petersburg.

Abstract. In the paper analyzes the conditions of dynamic stability at the joint account of fast and slow parameter changes. Based on the method of conditional oscillator it is shown that the slow change in the equations of non-stationary constraints leads to local dynamic instability within the kinematic cycle and to changes of conditions of the parametric resonances excitation. The effect of "negative" damping and local dynamic instability due to the gyroscopic forces where studied. The sufficient conditions of dynamic stability are considered. Results of the study are illustrated by the examples of the vibrational regimes of cyclic mechanisms.

Key words: vibrations, cyclic mechanisms, dynamic stability, parametric resonance.

1. Данная статья носит достаточно общий характер, однако конкретизирована для моделей при учёте специфики задач динамики машин. С проблемой динамической устойчивости приходится чаще всего сталкиваться в современных цикловых машинах [1 – 8]. В этих машинах исполнительные органы совершают периодические программные движения, которые осуществляются так называемыми цикловыми механизмами – рычажными, кулачковыми, мальтийскими и др. Кинематические характеристики цикловых механизмов являются не только источником возмущений, но и формируют нестационарные динамические связи, которые могут привести к нарушению динамической устойчивости. В цикловых механизмах связь между координатами на «входе» и «выходе» описывается нелинейной функцией положения $\Pi(\varphi)$. Для идеального механизма, в котором отсутствуют зазоры и все звенья принимаются абсолютно жёсткими $\varphi = \varphi_* = \omega t$. Пусть $\varphi = \varphi_* + q$, где q – динамическая ошибка, возникающая при колебаниях. Принимая во внимание, что функция положения непрерывна и дифференцируема, произведём линеаризацию этой функции в окрестности про-

граммного движения: $\Pi(\varphi_* + q) \approx \Pi(\varphi_*) + \Pi'(\varphi_*)q$, где $\Pi' = d\Pi / d\varphi$ – первая передаточная функция механизма (аналог скорости). Таким образом, при малых колебаниях, несоизмеримых с «идеальной» координатой практически без ущерба для точности мы заменили нелинейную связь нестационарной. Нестационарные связи могут быть важным источником повышения виброактивности в цикловых механизмах. В частности, в этом случае эффективный коэффициент диссипации существенно снижается и даже может стать отрицательным, что, вопреки традиционным представлениям, приводит к увеличению амплитуд колебаний. Условия подавления этого эффекта могут быть квалифицированы как *условия квазистационарности* [1, 3, 6, 7].

Наиболее известным примером подобного проявления нестационарных связей является параметрический резонанс, при котором на определённых частотных диапазонах система приобретает способность накапливать энергию. В машинах с цикловыми механизмами обычно имеет место медленное изменение параметров. При этом реализуемый частотный диапазон параметрического возбуждения существенно удалён от наиболее опасного главного параметрического резонанса, а параметрические резонансы высших порядков оказываются подавленными даже при малых диссипативных силах. В практике это нередко приводит к ложному выводу, что влиянием нестационарных связей можно пренебречь.

Однако в современных технологических машинах нередки случаи, при которых возникает необходимость в осуществлении многокомпонентного движения рабочего органа, когда приведенные инерционные и упругие характеристики содержат не только низкочастотные, но и высокочастотные составляющие. Аналогичная ситуация также возникает при использовании вибрационной линеаризации с целью уменьшения эффективных значений сил кулонова трения.

В подобных случаях мы сталкиваемся с проблемой подавления параметрических резонансов при полигармоническом характере параметрического возбуждения. Практические приёмы определения областей динамической неустойчивости обычно базируются либо на различных модификациях метода малого параметра и других асимптотических методах, либо на численных методах [9–12]. Процедура решения подобных задач далеко не элементарна, особенно если иметь в виду не эталонные упрощённые модели с одной степенью свободы, а реальные колебательные системы современных машин и механизмов, в которых параметрическое возбуждение, как уже отмечалось, имеет многокомпонентную структуру. В статье задача решается на базе метода условного осциллятора, что позволяет избежать ряда трудностей, возникающих в данном случае при использовании традиционных методов решения [1–4, 6.13, 14]

2. Параметрическое возбуждение в цикловых механизмах обычно связано с циклической координатой q_0 , которая принимается не зависящей от колебательного процесса. В цикловых системах кинетическая (T) и потенциальная (U) энергия в общем случае определяется следующими зависимостями:

$$T = T_2 + T_1 + T_0; \quad T_2 = 0,5 \sum_{j=1}^H \sum_{k=1}^H a_{jk}(\varphi) \dot{q}_j \dot{q}_k; \quad T_1 = \sum_{j=1}^H a_j(\varphi) \omega \dot{q}_j; \quad T_0 = 0,5 a_0(\varphi) \omega^2;$$

$$U = 0,5 \sum_{j=1}^H \sum_{k=1}^H c_{jk}(\varphi) q_j q_k. \quad (1)$$

Здесь $a(\varphi), c(\varphi)$ – переменные инерционные и квазиупругие коэффициенты при аргументе $\varphi = \omega t$ (здесь и ниже звёздочка при φ опускается).

Функции T_2, U , образующие квадратичные формы, позволяют с достаточной точностью определять спектр переменных «собственных» частот. Функция T_1 формирует гиро-

скопические составляющие, которые могут существенно изменить эффективные диссипативные свойства внутри кинематического цикла. Функция T_0 соответствует кинетической энергии переносного движения, которая при выбранных обобщённых координатах определяет кинематическое возбуждение системы.

На основании (1) изменение полной энергии системы ΔE за период $\tau = 2\pi/\omega$ и dE/dt определяются как [15]

$$\Delta E = 0,5 \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H \int_0^\tau \left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial t} \right) q_i q_j dt - 0,5 \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^H \int_0^\tau \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j dt + \sum_{i=1}^H \int_0^\tau Q_i \dot{q}_i dt, \quad (2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^H Q_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь Q_i – неконсервативные обобщённые силы.

Зависимости (2), (3) могут быть использованы в качестве критериев при определении условий динамической устойчивости. В частности условие $\Delta E < 0$ свидетельствует о том, что отток энергии за один период, возникающий из-за отрицательной работы диссипативных сил, превышает поступление энергии за счёт параметрического возбуждения. В результате параметрические резонансы подавляются и обеспечиваются условия динамической устойчивости. При этом, однако, не гарантируется затухающий характер колебаний внутри кинематического цикла, т.е. могут быть нарушены условия динамической устойчивости на отдельных участках цикла. Это приводит к локальным амплитудным «всплескам». В то же время подобные нарушения устраняются при выполнении условия $dE/dt < 0$. (В дальнейшем этот эффект мы будем квалифицировать как условие локальной динамической устойчивости). Очевидно, что это условие с некоторым запасом также служит критерием для устранения параметрических резонансов. Отметим, что приведенные условия достаточно наглядно отражают физическую сущность наблюдаемых эффектов, но при их реализации в инженерных расчётах вызывают определённые трудности. Ниже подобные условия будут приведены в более удобной форме, допускающей эффективные инженерные оценки.

Принимая во внимание, что целью данного исследования являются параметрические эффекты, обратимся к однородному дифференциальному уравнению

$$a(t)\ddot{q} + b(t)\dot{q} + c(t)q = 0. \quad (4)$$

На основании метода условного осциллятора решение уравнения (4) может быть представлено как

$$q = A_0 \exp\left[-\delta_0 \int_0^t \Omega(u) du\right] \sqrt{\frac{a(0)\Omega(0)}{a(t)\Omega(t)}} \sin\left[\int_0^t \Omega(u) du + \alpha\right]. \quad (5)$$

Здесь $\delta_0 = \psi/(4\pi)$ – диссипативный коэффициент; A_0, α – определяются начальными условиями. (Предполагается, что возбуждение колебаний произошло при $t = 0$; более общий случай см. [6,7].)

Метод условного осциллятора был предложен в статье [13], а также подробно описан в работах [1,3,6,14], поэтому при дальнейшем изложении мы ограничимся лишь краткими сведениями. Связь между функцией $\Omega(t)$, входящей в зависимость (5), и переменной собственной частотой $p(t)$ определяется следующим уравнением:

$$\ddot{z} - 0,5\dot{z}^2 + 2\Omega_*^2 e^{2z} = 2p^2(t), \quad (6)$$

где $z = \ln(\Omega / \Omega_*)$, где Ω_* – произвольный параметр с размерностью частоты, играющий роль нормирующего множителя:

Дифференциальное уравнение (6) соответствует некоторой фиктивной колебательной системе с «жёсткой» нелинейной характеристикой, названной *условным осциллятором*. Роль вынуждающей силы здесь играет функция, пропорциональная квадрату «собственной» частоты. Достаточно располагать частным решением этого уравнения, чтобы формула (5) превратилась в расчетную зависимость, описывающую колебательный процесс. Точность решения (5) зависит от решения уравнения (6). В качестве «удобного» положительного свойства условного осциллятора отметим, что *его параметры, отображённые в левой части уравнения, носят общий характер и не зависят от параметров системы*. При медленном изменении параметров $p = p_0 \approx \Omega$, и решение (5) совпадает с ВКБ–приближением первого порядка [12]. Количественным критерием для рассматриваемого случая может служить неравенство $2,5\ddot{p} / p^3 - 3,75(\dot{p} / p^2)^2 \leq 1$. В этом случае изменение параметров модели за один усреднённый период свободных колебаний можно считать малым по сравнению с их средними значениями на этом периоде (не следует смешивать этот случай с малыми изменениями параметров относительно средних значений на протяжении большого отрезка времени; например, кинематического цикла механизма). При учёте быстрых составляющих, вызывающих параметрические резонансы, вместо фиксированной константы Ω_* следует принять функцию $p_0(t)$, равную медленно меняющейся составляющей функции $p(t)$. В этом состоит существенное отличие рассматриваемой задачи от ранее рассмотренных. Как будет показано ниже, применительно исследованию устойчивости обычно достаточную точность даёт линеаризация уравнения (6) при отображении экспоненциального члена первыми двумя членами ряда Тейлора:

$$\ddot{z} + 4p_0^2(t)z = 2[p^2(t) - p_0^2(t)]. \quad (7)$$

Теперь в левой части уравнения в качестве параметра сохранилась медленно меняющаяся функция. Резонанс линеаризованного условного осциллятора соответствует главному параметрическому резонансу, который возникает в окрестности «плавающей» частоты $2p_0$. Частное решение уравнения (7) имеет вид

$$z = \frac{1}{\sqrt{p_0(t)}} \int_0^t \frac{[p(u)^2 - p_0(u)^2]}{\sqrt{p_0(u)}} \sin\left[2 \int_u^t p_0(\tau) d\tau\right] du. \quad (8)$$

Более полную информацию о частотной характеристике можно получить с помощью метода гармонической линеаризации. В частности, при пульсации функции $p^2(t)$ по гармоническому закону $p^2 = p_0^2 [1 - 2\varepsilon \cos(\omega_p t + \gamma)]$ приближённое решение уравнения условного осциллятора (6) ищем в виде $z = a_{z0} + a_z \cos(\omega_p t)$. Тогда

$$a_z = \frac{\varepsilon \kappa_z^2(a_z)}{\left[\kappa_z^2(a_z) - [\omega_p / (2p_0)]^2 \right]} \frac{a_z I_0(2a_z)}{I_1(2a_z)}; \quad a_{z0} = 0,5 \ln \frac{p_0^2 + 0,125\omega_p^2}{p_0^2 I_0(2a_z)},$$

где $I_k(2a_z) = i^{-k} J_k(2a_z i)$; $i = \sqrt{-1}$; J_k - функция Бесселя первого рода при мнимом аргументе $2a_z i$.

Функция $\kappa_z(a_z)$ отвечает собственной частоте условного осциллятора и определяется зависимостью

$$\kappa_z^2(a_z) = \frac{I_1(2a_z)}{a_z [I_0(2a_z) - 0,5a_z I_1(2a_z)]}, \quad (9)$$

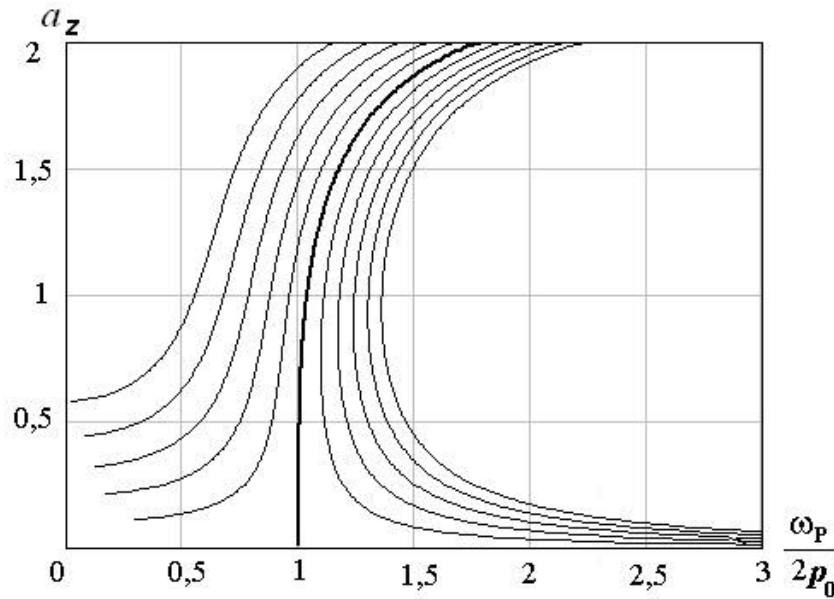


Рис. 1

На рис.1 показана амплитудно-частотная характеристики условного осциллятора при фиксированном значении функции p_0 , отвечающему Π'_{\max} , и варьировании глубиной пульсации $\varepsilon = 0, 2; 0, 4; \dots; 1$ (тонкие линии). С ростом ε кривые удаляются от скелетной кривой (жирная линия). Как показывает анализ, при $z \leq 1$, что соответствует почти трёхкратному изменению частоты, отклонение скелетной кривой от единицы не превышает 3,5%. Это во многих случаях позволяет с достаточным основанием воспользоваться линейным уравнением (7). Напомним, что $p_0(\varphi)$ – медленно меняющаяся функция, поэтому показанная амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сохранит свой вид только при $\omega_p / p_0 = \text{const}$, т.е. при синхронном изменении ω_p . В противном случае график АЧХ будет совершать медленные периодические перемещения вдоль оси абсцисс и колебательная система может пересекать область динамической неустойчивости; следовательно, возможно чередование зон роста амплитуд и зон затухания.

После определения $z(t)$ на основании (5) находим зависимость, описывающую переменную амплитуду колебаний за счёт быстрых составляющих параметрического возбуждения

$$A(t) = A_0 \sqrt{a(0)/a(t)} \exp\{-\delta_0 \Phi_0(t) - 0,5[z(t) - z(0)]\}, \quad (10)$$

где $\Phi_0 = \int_0^t p_0(t) dt$.

Условие $dA/dt < 0$, исключающее возможность параметрического возбуждения, приведём к следующему виду:

$$\delta_0 > \delta_p = -0,5 p_0^{-1} (\dot{a}/a + \dot{z}) = -0,5 [\dot{a}/(ap_0) + \dot{p}/(pp_0) - \dot{p}_0/p_0^2]. \quad (11)$$

Первое слагаемое в формуле (11), строго говоря, не оказывает влияния на возбуждение параметрических резонансов, так как оно связано с составляющей кинетической энергии T_1 и образует гироскопические силы, работа которых за период кинематического цикла равна нулю (см. формулы (2), (3)). Однако, как будет показано ниже, эти силы могут вызвать существенную амплитудную модуляцию внутри кинематического цикла.

При определении функции $z(t)$ по формуле (8) (или непосредственно решая дифференциальные уравнения (6) или (7)) целесообразно прибегать к численным методам. При

этом могут возникнуть сомнения, не следует ли вообще воспользоваться численными методами для решения исходного дифференциального уравнения (4). Эти сомнения можно отвести, если обратить внимание на то обстоятельство, что мы осуществили переход от быстро изменяющейся обобщённой координаты к медленно меняющейся амплитуде. Подобные преобразования весьма эффективны, поскольку именно амплитуда колебаний с инженерных позиций представляет первостепенный интерес. Анализ амплитуд позволяет выявить важные качественные особенности исследуемой задачи и выбрать пути для снижения виброактивности. Отметим, что такая трансформация переменных используется в методе Ван дер Поля, методе гармонического баланса и во многих других методах решения задач нелинейной механики.

При медленном изменении параметров условие $dA/dt < 0$ для произвольного временного отрезка выполняется, если

$$\delta_0 > \delta^*(\varphi) = \delta_g(\varphi) + \delta_p^*(\varphi). \quad (12)$$

Здесь функция δ_g соответствует гироскопическим силам (см.(11)), а

$$\delta_p^*(\varphi) = 0,5 p_0(\varphi)^{-2} \frac{dp_0(\varphi)}{d\varphi} \quad (13)$$

отражает влияние переменности «собственной» частоты колебаний. Максимальное значение функции δ^* соответствует критическому уровню возбуждения. Неравенство (12) совпадает с результатами, полученными на основании прямого метода Ляпунова, устанавливающего достаточное условие динамической устойчивости [2, 6, 7]. Можно показать, что при медленно меняющихся параметрах оно является также и необходимым. Применительно к данной задаче условие (12) можно квалифицировать как *условие квазистационарности*.

3. На рис.2 приведены типовые динамические модели цикловых механизмов, образующие колебательные системы трёх типов: цепную (рис. 2,а), разветвлённую (рис. 2,б) и систему кольцевой структуры (рис. 2,в). Введём следующие условные обозначения: J_j – момент инерции; c_j – коэффициенты жёсткости; ψ_j – коэффициенты рассеяния. Сначала рассмотрим колебательные системы с одной степенью свободы. Примем в модели, показанной на рис. 2,а, $J_1 = 0$. Тогда переменная «собственная» частота равна $p(\varphi) = k_2 / \sqrt{1 + \zeta \Pi'^2(\varphi)}$, где $k_2 = \sqrt{c_2 / J_2}$, $\zeta = c_2 / c_1$. Если в этой модели принять $c_2 \rightarrow \infty$, то $p(\varphi) = k_1 / \sqrt{1 + \mu \Pi'^2(\varphi)}$, где $k_1 = \sqrt{c_1 / J_1}$, $\mu = J_2 / J_1$. В качестве обобщённых координат примем $q_0 = \varphi_*(t), q_i$ ($i = 1, \dots, H$), где H – число степеней свободы колебательной системы.

Для определённости примем $\Pi' = h[\sin \varphi + \varepsilon \sin(\nu \varphi + \gamma)]$; здесь первое слагаемое отвечает «медленной», а второе – «быстрой» гармонике. На рис.3 для ряда типовых случаев приведены графики $p(\varphi_*)$ при $h = 1$; $\varepsilon = 0, 2$; $\nu = 7$. Огибающим для экстремальных значений соответствуют штриховые линии, а медленно меняющейся составляющей – штрихпунктирные.

Двум рассмотренным выше примерам при $k_1 = k_2 = 10$; $\mu = \zeta = 2$ на графике соответствуют группа кривых 3. Поскольку для обоих примеров эти кривые идентичны, на первый взгляд, можно ожидать, что критические значения уровня параметрического возбуждения должны быть одинаковыми. Однако они существенно отличаются из-за гироскопической составляющей в первом случае. Если в модели кольцевой структуры (рис. 2,в) принять $J_2 = 0$, то частотным характеристикам (см.рис.3) соответствует группа кривых 2.

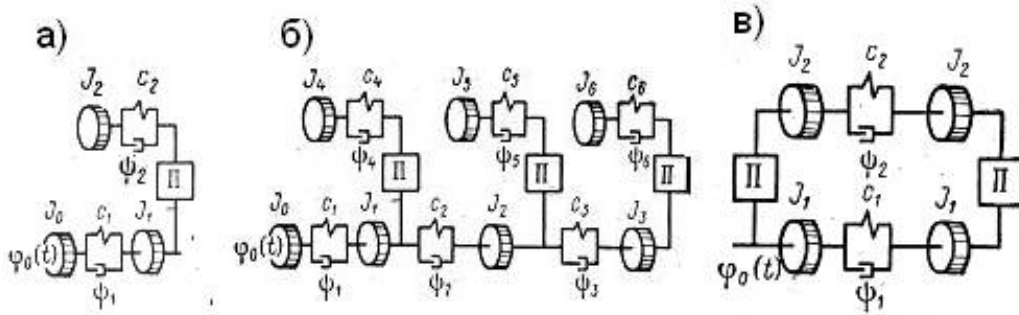


Рис.2

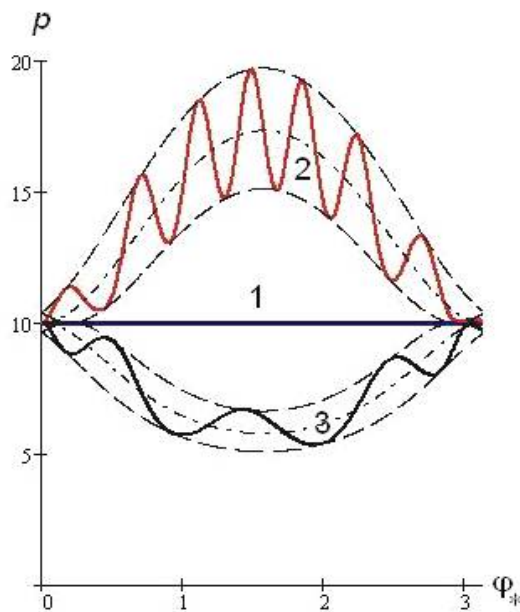


Рис.3

Таблица

Характеристика уровня возбуждения

Условие	Колебания δ^*	Виброускорения δ^*
$p = \text{const}$	$-0,5 a' / \sqrt{a\tilde{c}}$	$-0,5 a' / \sqrt{a\tilde{c}}$
$c = \text{const}$	$-0,25 a' / \sqrt{a\tilde{c}}$	$-2,5 a' / \sqrt{a\tilde{c}}$
$a = \text{const}$	$-0,25 a^{0,5} \tilde{c}^{-1,5} \tilde{c}'$	$0,75 a^{0,5} \tilde{c}^{-1,5} \tilde{c}'$

В таблице приведены расчётные зависимости, определяющие для ряда частных случаев критический уровень параметрического возбуждения для виброперемещений и виброускорений. На рис.4 по этим зависимостям построены графики, которые наглядно показывают роль инерционных и упругих характеристик при подавлении параметрических колебаний в каждом отдельном случае.

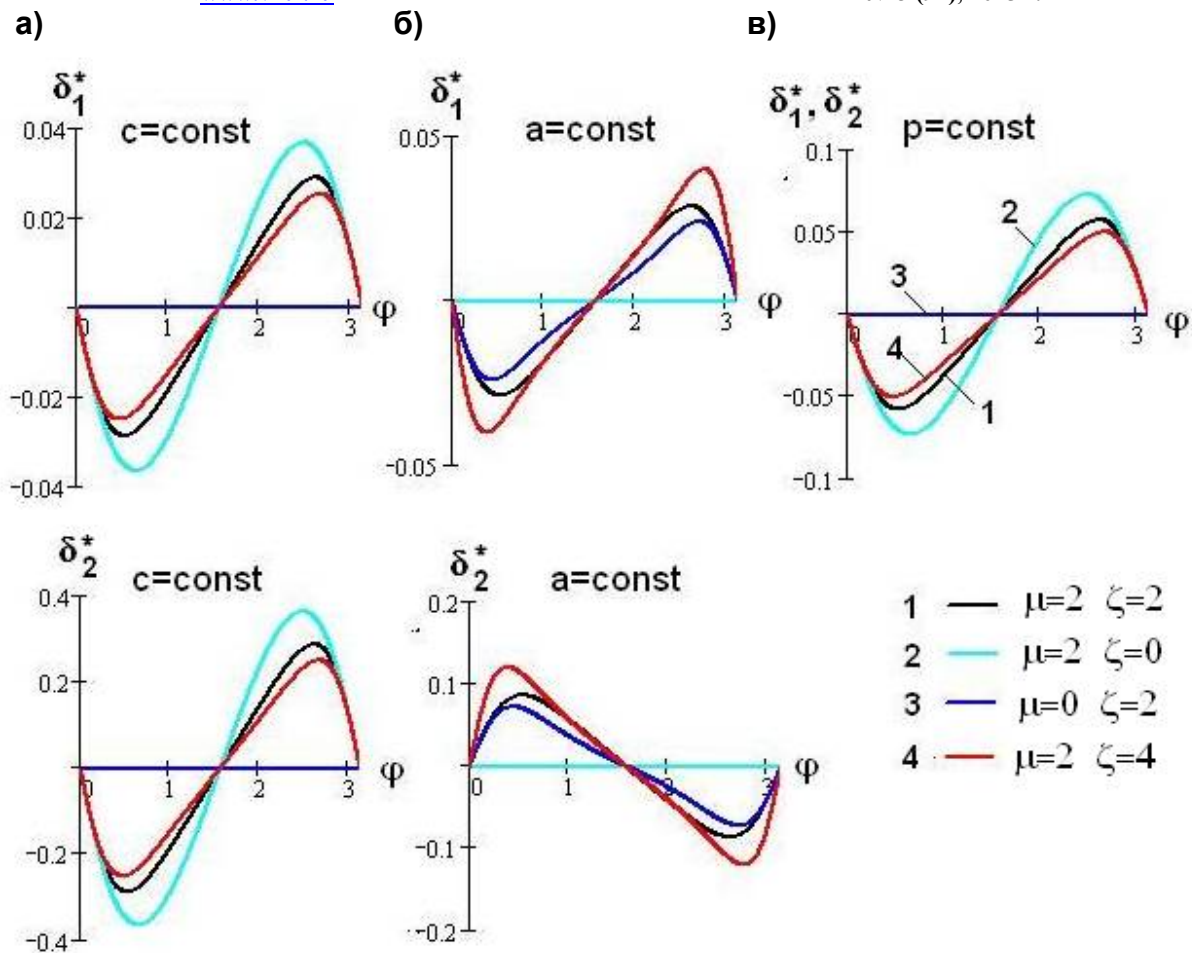


Рис.4

Анализ графиков показывает, что с ростом значений μ и ζ при прочих равных условиях растёт критический уровень возбуждения. Амплитуды ускорений меняются идентично амплитудам колебаний, но, за исключением последнего случая, по величине отличаются почти на порядок.

Случай $\mu = \zeta$ реализуется в системе кольцевой структуры и представляет особый интерес (см. рис. 2, в). В этом случае динамическая модель трансформируется в систему, состоящую из вала с приведенным коэффициентом крутильной жёсткости $c_* = c_1 + c_2\Pi'^2(\varphi_*)$ и исполнительного органа с приведенным моментом инерции $J_* = J_1 + J_2\Pi'^2(\varphi_*)$. Эта система имеет две степени свободы, причём одна из обобщенных координат является циклической. Тогда единственная частота свободных колебаний («собственная» частота) определяется как

$$p(\varphi_*) = \sqrt{c_*(\varphi_*)/J_*(\varphi_*)} = k_1 \sqrt{[1 + \zeta\Pi'^2(\varphi_*)]/[1 + \mu\Pi'^2(\varphi_*)]}, \quad (14)$$

где $k_1 = \sqrt{c_1/J_1}$; $\zeta = c_2/c_1$; $\mu = J_2/J_1$.

Из-за переменности функции $\Pi'(\varphi_*)$ «собственная» частота p в общем случае также оказывается переменной, однако при $\zeta = \mu$ имеем $p = \text{const}$ (см. рис.3, линия1). Легко заметить, что условие $\mu = \zeta$, совпадает с равенством парциальных частот $\sqrt{c_1/J_1} = \sqrt{c_2/J_2}$. При этом в зависимости (3) $\partial T/\partial t = \partial U/\partial t$. Для другого предельного случая при относительно малой динамической жёсткости привода получаем качественно идентичный результат

$p \approx k_1 \sqrt{2} = \text{const}$. При $\mu = \zeta$ согласно (7), (8) $z = 0$, следовательно, $\Omega = \text{const}$. Отсюда на основании (10), (11) можно утверждать, возбуждение параметрического резонанса невозможно даже при отсутствии диссипации. Это очень важно, так как «управлять» диссипативными характеристиками практически достаточно сложно. Установка специальных регулируемых демпферов нежелательна из-за сопутствующего роста энергетических потерь и соответствующего уменьшения коэффициента полезного действия. К тому же требуемый уровень диссипации δ_0 может оказаться весьма высоким, а иногда даже нереализуемым.

На рис. 5 показаны графики $z(\varphi)$, полученные при $\mu = 2, \zeta = 0$ (кривые 1) и при $\mu = \zeta = 2$ (кривые 2). Помимо роста амплитудного уровня от цикла к циклу на графике чётко видна амплитудная модуляция внутри каждого цикла, что связано с локальными нарушениями условий динамической устойчивости, возникающими из-за гироскопических составляющих (см. выше).

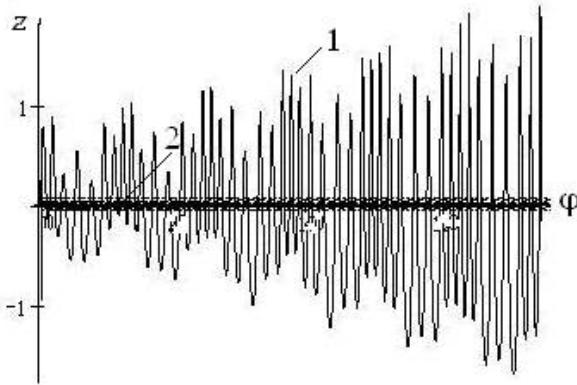


Рис.5

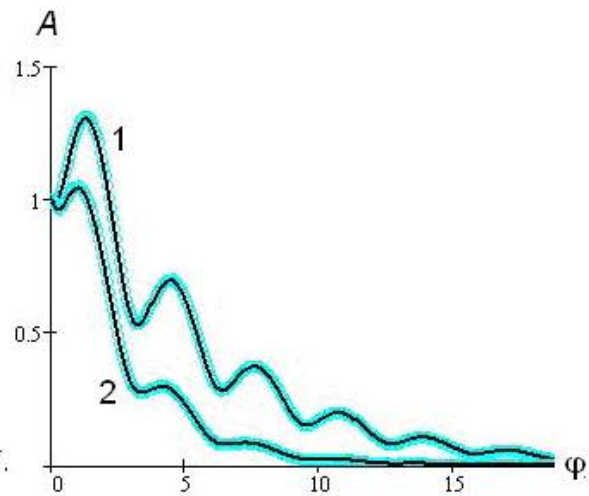


Рис.6

На рис.6 приведены графики $A(\varphi)$ при $\mu = 2, \zeta = 0$ и коэффициентах диссипации $\delta_0 = 0,02$ (кривая 1) и $\delta_0 = 0,04$ (кривая 2). В первом случае параметрический резонанс подавляется, но при $\delta_0 < \delta_1^* \approx 0,05$ (см. рис. 4, а; кривая 2) условия локальной устойчивости на отдельных участках нарушены, что привело к немонотонному затуханию колебаний. Во втором случае эти условия практически почти соблюдены. Этот пример ещё раз подтвердил, что условия локальной устойчивости для подавления параметрического резонанса являются достаточными.

4. Если динамическая модель имеет H степеней свободы, то система уравнений в матричной форме может быть представлена как

$$\mathbf{a}(\varphi)\mathbf{q}'' + \mathbf{b}(\varphi)\mathbf{q}' + \mathbf{c}(\varphi)\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\varphi). \quad (15)$$

Здесь в целях удобства анализа осуществлён переход к «безразмерному времени» $\varphi = \omega t$. При этом $(\)' = d/d\varphi$, $\mathbf{q}' = \dot{\mathbf{q}}/\omega$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}/\omega$, $\mathbf{c} = \mathbf{c}/\omega^2$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}/\omega^2$ (В дальнейшем будут использованы эти нормированные значения). Некоторые затруднения могут возникнуть при определении матрицы $\mathbf{b}(\varphi)$. Дело в том, что при позиционных силах сопротивления, свойственных механизмам, диссипация имеет частотно независимый характер и определяется на базе экспериментальных данных, полученных при моногармонических колебаниях. Поэтому для этих сил, равно, как и для гироскопических составляющих, приходится использовать процедуру приведения к определённой форме колебаний. При этом мы располагаем диагональ-

ной матрицей приведенных коэффициентов \mathbf{b}^* , на базе которой определяем матрицу \mathbf{b} (подробнее см. [6, 7])

$$\mathbf{b} = (\boldsymbol{\beta}^T)^{-1} \mathbf{b}^* (\boldsymbol{\beta})^{-1}. \quad (16)$$

Здесь $\boldsymbol{\beta}$ матрица коэффициентов форм колебаний

Таким образом, для определения \mathbf{b}^* и $\boldsymbol{\beta}$ требуется предварительный частотный и модальный анализ, что нетрудно осуществить, принимая во внимание, что при медленном изменении параметров «собственные» частоты и нестационарные формы колебаний могут быть получены как собственные значения и собственные векторы матрицы $\Gamma(\varphi) = \mathbf{a}(\varphi)^{-1} \mathbf{c}(\varphi)$, т.е. при $\mathbf{b} \equiv 0$.

Существенным дополнительным источником периодического возбуждения колебаний нередко являются соударения при переключке в зазорах и динамические эффекты, связанные с псевдоударом [6, 7].

Система уравнений (15) в квазинормальных координатах $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}^{-1} \mathbf{q}$ имеет вид

$$a_r^*(\varphi) \eta_r'' + b_r^*(\varphi) \eta_r' + c_r^*(\varphi) \eta_r = M_r(\varphi) \quad (r = 1, \dots, H), \quad (17)$$

где a_r^*, c_r^* – соответствующие элементы диагональных матриц $\mathbf{a}^* = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{a} \boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{c}^* = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\beta}$.

Таким образом, задача сведена к рассмотренной ранее, т.е. к анализу уравнения (4). Приведенная процедура была использована применительно к динамическим моделям, показанным на рис. 2,б,в. Эта модель одновременно соответствует фрагменту многосекционных машин регулярной структуры [3,4,6,7]. Подобные системы встречаются во многих современных машинах текстильной, полиграфической, лёгкой и ряда других отраслей промышленности, когда технологические операции выполняются длинными исполнительными органами, совершающими заданное программное движение [4 – 7]. Для обеспечения достаточной жёсткости системы исполнительные органы в таких машинах приводятся в движение многократно сдублированными цикловыми механизмами. При этом колебательная система имеет структуру решётки, в которой каждый повторяющийся элемент образует замкнутый контур, отображающий инерционные и упругодиссипативные характеристики главного вала, исполнительного органа и циклового механизма. Для данного класса систем ввиду идентичности цикловых механизмов критический уровень возбуждения на основании (15), (16), (17) также может быть определён следующим образом:

$$\delta_r^* = 0,5 \Pi'' \left(v \frac{\partial p_r}{\partial \Pi'} p_r^{-2} - \frac{\partial a_r}{\partial \Pi'} p_r^{-1} \right), \quad (18)$$

где $v = -1$ соответствует амплитуде колебаний, $v = 1$ – виброскоростей, $v = 3$ – виброускорений.

Если система состоит из двух секций, то при $\mu = \zeta$, $c \rightarrow \infty$ колебательная система имеет две степени свободы и следующие частотные характеристики:

$$p_1 = k_1 \sqrt{0,5(3 - \sqrt{5})}; \quad p_2 = k_1 \sqrt{0,5(3 + \sqrt{5})}.$$

Как показал анализ систем кольцевой структуры, выявленные особенности, при которых инерционное и позиционное параметрическое возбуждение компенсируют друг друга, имеют место и для моделей более сложной регулярной структуры. При этом в формуле (18) сохраняется лишь второе слагаемое.

В заключение отметим, что в проведённом исследовании вне поля зрения остались комбинационные резонансы, при которых происходит «обмен» энергией между различными формами колебаний. В работе [16] для комбинационных резонансов были получены опти-

мальные соотношения между обоими видами параметрического возбуждения, однако при $\delta_{0r} > \delta_r^*$ условия подавления этих резонансов обычно удовлетворяются.

Список литературы

1. Вульфсон И. И. Динамические расчеты цикловых механизмов. - Л.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
2. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамика машин.– Л.:Машиностроение. 1968. –284 с.
3. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение. 1990. – 309 с.
4. Vulfson, I.I. Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives.– New York, London: Hemisphere Publ. Corp. 1988.– 99 p.
5. Dresig, H., Vulfson I.I. Dynamik der Mechanismen.–Wien, New York :Springer, 1989.– 328 S.
6. Вульфсон И.И. Динамика цикловых машин.– СПб.: Политехника. 2013. – 425 с.
7. Vulfson, I.I. Dynamics of cyclic machines. (Expanded edition of the monograph [7] translation). – Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. – 410 p.
8. Вульфсон И.И. К проблеме динамической устойчивости многосекционных технологических машин в окрестности программного движения исполнительных органов. – Теория механизмов и машин. 2006. №2(8).– С. 7-12.
9. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М.: Мир. 1978. – 336 с.
10. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз. 1958. – 408 с.
11. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. — М.: Наука. 1964. – 432 с.
12. Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ - приближение. – М.: Мир, 1967. – 168 с.
13. Вульфсон И.И. О колебаниях систем с параметрами, зависящими от времени.// Прикладная математика и механика.1969. Т.33, №2.– С. 331–337.
14. Vulfson I. I. On the analytical investigation of nonstationary vibratory regimes by the method of fictitious oscillator. // Вестник научно-технического развития. №3(7), 2008. – Pp.26 –38.
15. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
16. Вульфсон И.И. Исследование пороговых условий возбуждения комбинационных резонансов.// Машиноведение. 1980. №3. – С.19 – 24.