УДК 531

К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛЕЙ МНОГОМЕРНЫХ ВИБРОУДАРНЫХ 2D СИСТЕМ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

© Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

krupeninster@gmail.com

Аннотация. *Проведено построение некоторых моделей многомерных виброударных 2D систем сложной структуры. Использованы модели сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры и их дискретных аналогов. Даны соотношения для описания процессов образования в таких системах специфических виброполей. Указаны связи таких объектов с системами, содержащие распределенные ударные элементы*

Ключевые слова: *системы простой структуры, системы сложной структуры, двухмерные модели, дискретные модели нелинейных сред, структуры вибрационных полей.*

ABOUT CREATING MULTIDIMENSIONAL MODELS VIBRO-IMPACT 2D SYSTEMS WITH COMPLEX STRUCTURE

V.L. Krupenin

IMASH RAS, Moscow, Russia

Annotation. *We construct some models multidimensional vibro-impact 2D systems with complex structure. Used model is strongly nonlinear continuum of complex structures and their discrete analogues. Given relations for the description of processes of formation in such systems specific vibropile. Stated communication of such objects with systems containing distributed impact elements*

Keywords. *system of simple structure, complex structure, two-dimensional model, discrete model of nonlinear continua, patterns of vibration fields*

1. Продолжим рассмотрение класса достаточно общих задач, анализ которых поможет дать описание механизма генерирования широкополосных колебаний в пространственно протяженных машинных конструкциях. Известно [1 - 2], что вибрация распространяется посредством виброводов (волноводов) — упругих сред, в которых волны из-за наличия ограничивающих поверхностей распространяются в, вообще говоря, произвольных направлениях, зависящих только конструктивных особенностей вибропроводящего объекта и от характера взаимодействия элементов конструкций между собой. Разработанные в последнее время методы акустической динамики машин, включающие в себя, в частности, методы анализа механизма распространения вибрации и борьбы с нею, основаны на предположении о линейности виброводов [1, 2] или их слабой нелинейности. Однако, появление в виброводе хотя бы одного разрыва [3, 4], приводящего к соударениям элементов его конструкции, вызывает существенное изменение динамических качеств системы в целом. То же происходит и в случае, когда соударяются элементы, непосредственно связанные с виброводом. Если подобные («паразитные») ударные пары редки и от точек ударов до точек наблюдения вибровод линеен, то генерируемая широкополосная вибрация после прохождения через реально присутствующие механические фильтры может рассматриваться как некий высокочастотный шум малой интенсивности. При наличии же большего числа ударных пар, каким-либо образом присоединенных к виброводу и непосредственно связанных с процессом передачи вибрации, упругая передающая среда из линейной превращается в сильно нелинейную. В этом случае традиционные методы расчета - неприемлемы.

В работе [1] рассмотрены, в частности, линейные (или близкие к таковым) специфические модели сплошных сред сложной структуры. Одной из особенностей этих моделей, оказывается наличие двух своеобразных "частей среды" - "несущей" и "присоединенной". Соответственно уравнения динамики таких сред содержат две группы уравнений. Первая - "отвечает" за несущую часть, вторая за - присоединенную. Как и всякая модель мультиполярной механики здесь существенной ревизии подвергается понятие точки, состояние которой может определятся произвольным числом кинематических параметров. В работах [3-8] рассмотрены сильно нелинейные модели подобных сред, в которых, в частности, для учета множественных соударений в элементах присоединенного оборудования использовались распределенные ударные элементы. Такие модели позволяют дать описание процесса формирования, а также и распространения вибрационных полей в сложных составных конструкциях. Кроме того, указанные модели позволяют получить ряд расчетных формул и значимых определяющих соотношений. Необходимость обращения к данным моделям диктуется, прежде всего, тем обстоятельством, что в реальных машинных конструкциях именно множественные систематические соударения элементов подсистем весьма часто "ответственны" за вид формируемых глобальных виброполей и за виброактивность конструкций в целом.

Возвращаясь к упомянутым выше двум группам уравнений движения, во-первых, как обычно, постулируем существование упругой (упруго-вязкой) несущей среды. То есть модель необходимо содержит уравнения движения несущих частей (примеры: классическое уравнение Ламе, уравнение продольных или поперечных колебаний стержня, etc.), к которым добавляются, ставящиеся стандартным образом, граничные условия.

Во-вторых, в предположении, что соударения как бы "размазаны" по некоторой, вообще говоря, пространственной области, к уравнениям несущих частей добавляются уравнения движения присоединенного оборудования с ударными элементами. Механизм связи несущей и присоединенной частей определяет глобальную структуру индуцируемого объектом вибрационного поля.

В данной работе рассмотрены модели, в дискретном случае, представляющие собой 2D решетчатые конструкции, оснащенные ударными осцилляторами.

2. Рассмотрим так называемую струнную решетку [9], составленную из двух взаимно перпендикулярных семейств упругих линейных струн, защемленных на концах и имеющих

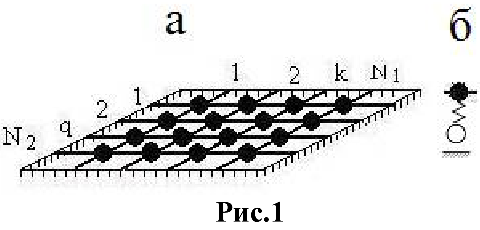

Рис.1

соответственно длины L_1 и L_2 (рис. 1,а). Каждая струна нумеруется при помощи индексов k = 0,1,2,., N_1 и q = 0,1,2.. N_2. В вершинах решетки помещены точечные абсолютно твердые тела с одинаковыми массами m.

Предполагается, что прямоугольные ячейки решетки одинаковы, но длины и ширины их сторон, вообще говоря, не равны между собой и сама решетка (дискретный аналог мембраны) - анизотропная. Струнные элементы предполагаются безынерционными. Крепления струн в узлах считаются абсолютно жесткими, а их натяжения - настолько большими, что возможными изменениями при линейных колебаниях можно пренебречь.

Пусть каждая «горизонтальная сторона» ячеек имеет длину ΔL_1; «вертикальная» - ΔL_2 .(рис1). Кроме того, пусть безынерционные «горизонтальные участки» имеют натяжение T_1 , а «вертикальные участки» - соответственно T_2.

Таким образом, динамика решетчатой конструкции может быть описана посредством функций смещения узлов решетки $u_{kq}(t)$, где индексы k=0,1,2,.. N_1; q=0,1,2,.. N_2. При этом каждая из функций $u_{kq}(t)$ изменяется вдоль некоторой оси, перпендикулярной плоскости статического равновесия решетки. Будем считать, что первый по счету индекс (в данном случае k – нумерует струну, расположенную «слева направо» или наоборот), а второй индекс (в данном случае q – «сверху вниз» или наоборот).

Пусть силы диссипации, вынуждающие силы, а также любые другие неконсервативные силы, действующие в решетке на каждое из массивных точечных тел – малы. Обозначив их $\varepsilon g_{kq}(t, u_{kq}, \dot{u}_{kq},\ldots)$, где многоточие обозначает прочие неучитывыемые сейчас переменные, ε - малый параметр, модель системы построим следующим образом. Так как каждая частица лежит одновременно на двух струнах, то для всех значений индексов имеем N уравнений:

$$m_{kq}\ddot{u}_{kq} + c_1(2u_{kq}-u_{(k-1,q)}- u_{(k+1,q)})+c_2(2u_{kq}-u_{(k,q-1)}-u_{(k,q+1)})= \varepsilon g_{kq}(t,u_{kq},\dot{u}_{kq},\ldots)+F_{kq}. \qquad (1)$$

Здесь соответственно обозначено: $c_{1,2} = T_{1,2}/\Delta L_{1,2}$ – коэффициенты упругости. Граничные условия защемления можно записать как (ср. [9]) $u_{kq}=0$, при k=0;N_1; q=0;N_2. Поэтому $N= (N_1 -1)(N_2-1)$. Описание сил F_{kq} будет дано ниже.

При необходимости сюда могут быть добавлены ещё начальные условия. Однако далее рассматриваются установившиеся режимы движения. И поэтому вид начальных условий - несущественен.

Уравнения (1) представляют собой первую группу уравнений; в дискретной модели они описывают несущую часть среды сложной структуры. Пусть с каждым узловым телом решетки связан так называемый ударный осциллятор [4] (рис. 1, б). Пусть далее: w_{kq} - - координата тела, образующего осциллятор; M_{kq} – его масса; Ω_{kq} - собственная частота соответствующего при отсутствии ударов (линейный случай); Δ_{kq} – значения установочных зазоров (натягов); R_{kq} –коэффициенты восстановления; k=0,1,2,.. N_1; q=0,1,2,.. N_2. Таким образом, уравнения движения присоединенного оборудования будут такими:

$$M_{kq}\ddot{w}_{kq} + M_{kq}\Omega_{kq}^2 (w_{kq} - u_{kq})+ \Phi_{kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq}) =\varepsilon_1 f_{kq}(t, w_{kq},\dot{w}_{kq},\ldots), \qquad (2)$$

где ε_1 – малый параметр; $f_{kq}(t,w_{kq},\dot{w}_{kq},\ldots)$– дополнительные силы, действующие на осциллятор.

Отсюда видно, что в уравнении (1) силы $F_{kq}= M_{kq}\Omega_{kq}^2 (w_{kq} - u_{kq})$, где знак перед последним выражением выбран с учетом того, что в (1) силы F_{kq} отнесены к правым частям.

Силы удара $\Phi_{kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq})$, определяемые в данном случае гипотезой Ньютона, то есть цепочкой выражений, выполняемой при всех k и q:

$$w_{kq}(t_{kq0})=\Delta_{kq},\ \dot{w}_{kq}(t_{kq0}-0)=-R_{kq}\dot{w}_{kq}(t_{kq0}+0)<0;\ 0<R_{kq}\le 1;\ w_{kq}(t)\le\Delta_{kq},$$

Здесь t_{kq0} – некоторый момент удара в ударной паре (k, q); R_{kq}- коэффициенты восстановления. В соответствии с [10, 11] можно записать выражение для силы удара в окрестности произвольного момента t_{kq0}:

$\Phi_{kq}(w_{kq}, \dot{w}_{kq})|_{t=tkq0}=J_{kq}\delta(t-t_{kq0})$; $J_{kq}=M_{kq}(1+R_{kq})|\dot{w}_{kq}(t_{kq0}-0)|\geq 0$,

где J_{kq} – импульс удара в ударной паре (k, q); $\delta(t)$ - δ-функция Дирака.

Ставится задача: дать описание полей перемещений $\{u_{kq}, w_{kq}\}$ при заданных полях сил $\{g_{kq}, f_{kq}\}$.

3. Рассмотрим континуальный аналог модели (1), (2). Будем считать, для большей простоты что при всех k и q: m_{kq}=m, т.е. массы точечных тел одинаковы. Пусть число струн в обоих семействах достаточно велико и, следовательно, величины $\Delta L_{1,2}$ достаточно малы. Пусть в то же время, величины $\gamma=m/(\Delta L_1\Delta L_2)$– масса единицы площади решетки, а также $\theta_x=T_1/\Delta L_1$, $\theta_y=T_2/\Delta L_2$ - погонные натяжения – не малы и имеют порядок O(1).

Систему уравнений движения (1) можно континуализировать [3], рассматривая его как конечно-разностный аналог гладкой системы с распределенными параметрами.

Проводя континуализацию, обычно рассматривают достаточно гладкую функцию u(x, y, t), совпадающую (в данном случае) в узлах решетки с исходными функциями $u_{kq}(t)$.

Входящие в уравнения движения (1) выражения $[2u_{kq}-u_{(k-1,q)}-u_{(k+1,q)}]$ и $[2u_{kq}-u_{(k,q-1)}-u_{(k,q+1)}]$ заменим их аналогами вида:

$$2u_{kq}-u_{(k-1,q)}-u_{(k+1,q)}=2u(x, y, t)-u(x-\Delta L_1, y, t)-u(x+\Delta, y, t);$$

$$2u_{kq}-u_{(k,q-1)}-u_{(k,q+1)}=2u(x, y, t)-u(x, y-\Delta L_2, t)-u(x, y-\Delta L_2, t)$$

Тогда (1) можно представить как

$$\gamma\Delta L_1\Delta L_2u_{tt}=\Delta L_1\Delta L_2(\theta_xu_{xx}+\theta_yu_{yy})+(\Delta L_1)^3(\Delta L_2)(\theta_x/12)u_{xxxx}+(\Delta L_1)(\Delta L_2)^3(\theta_y/12)u_{yyyy}+\ldots.$$

В этом уравнении вместо разностей, определяющих (1) выписаны отвечающие им ряды Тейлора по степеням ΔL_1 и ΔL_2.

В данном случае с точностью до малых порядка $O[(\Delta L_{1,2})^2]$, в исходном континуальном приближении будем иметь уравнение анизотропной мембраны:

$$\gamma u_{tt}-\theta_xu_{xx}-\theta_yu_{yy}+\ldots=\varepsilon g(t, u, \dot{u},\ldots),$$

где многоточие в левой части уравнения обозначает отбрасываемые здесь члены $O[(\Delta L_{1,2})^2]$.

Если рассмотреть наиболее популярную модель изотропной мембраны, когда натяжения равны: $\theta_x=\theta_y\equiv\theta\equiv T$ при $\varepsilon=0$, приходим к хорошо известному и досконально изученному уравнению классической натянутой по контуру мембраны, прогиб которой суть u=u(t,x,y):

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad c^2=\theta\gamma^{-1}.$$

В данном случае исходные граничные условия приводят к прямоугольной, защемленной по всем краям мембране. Если длины сторон мембраны есть l_1 и l_2, то условия защемления записываются так:

$$u(0, y, t)=u(l_1, y, t)=u(x, 0, t)=u(x, l_2, t)=0$$

Таким образом, учитывая представления для фигурирующей в (1) силы F получим уравнение несущей части среды:

$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy})+M(x,y)\Omega^2(x,y)(w-u)+\varepsilon g(t,u,\dot{u},.),\qquad(3)$$

Здесь силы и другие физические факторы заменены их распределениями по площади. Континуальный аналог уравнений (2) выписывается элементарно:

$$M(x,y)w_{tt}(t,x,y) + M(x,y)\Omega^2(x,y)[w(t,x,y) - u(t,x,y)] + \Phi(w, w_t) = \varepsilon_1 f(t,w,w_t,\ldots), \qquad (4)$$

При этом условия удара трансформируются, так:

$$w[x,y,t_0(x,y)]=\Delta(x,y), w_t[x,y,t_0(x,y)-0]=-R(x,y)\, w_t[x,y,t_0(x,y)+0]<0;$$
$$0<R(x,y)\le 1;\ w(x,y,t)\le \Delta(x,y). \qquad (5)$$

Здесь осуществляется переход к распределениям величин по площади: распределению зазоров, коэффициента восстановления, моментов удара. Для плотности ударной силы имеем:

$$\Phi(w, w_t)=J(x,y)\delta[t- t_0(x,y)];\ J(x,y)= M(x,y)[1+ R(x,y)]|\, w_t[x,y,t_0(x,y)-0]| \ge 0, \qquad (6)$$

где $J(x,y) \ge 0$ –плотность импульса удара в точке (x,y); первое соотношение отвечает акту взаимодействия, определяемого распределением фазы удара $t_0(x,y)$.

Уравнения (3), (4) вместе с соотношениями (6) и дают модель сильно нелинейной двумерной среды сложной структуры.

Следует отметить, что, строго говоря, здесь необходимо указать области изменения переменных, функциональные классы гладкости фигурирующих функций и т. д. Следуя традициям, сложившимся в физике, будем предполагать, что все необходимые математические формальности соблюдаются.

4. Имея целью получить соотношения удобные для анализа виброударных процессов, перейдем к операторным уравнениям движения [3,.4, 10, 11].

При этом сразу внесем упрощающие предположения. Во-первых, положим, $\varepsilon_1=0$, т.е. предположим, что неконсервативные силы действуют только на несущую часть среды. Во-вторых, положим, что $g(t, u, u_t,.)=A_1(x,y)\cos(\omega_0 t+\varphi_1)$, где ω_0 и $\varphi_1(x,y)$ – частота и распределение фазы внешнего синусоидального воздействия; $A_1(x,y)$ – распределение интенсивности внешнего воздействия по площади несущей мембраны, при этом предполагаем, что диссипативные силы – линейны и могут быть учтены при записи операторов динамической податливости или в начальном приближении вообще проигнорированы.

Переходя к операторным уравнениям, из (3) получим:

$$[1+M\Omega^2 L(p,x,z,y,h)]u(t,x,y)=\varepsilon L(p,x,z,y,h)\, g(t,u,\dot u)+ M\Omega^2 L(p,x,z,y,h)w(t,x,y), \qquad (7)$$

Причем здесь и далее рассматриваются проходные операторы динамической податливости $L(p,x,z,y,h)$ из точки (z,h) в точку (x,z) или, в частности, локальные операторы $L(p,x,x,y,y)$. Иногда, за очевидностью, независимые переменные далее не указываются.

Из формулы (7) с учетом сделанных предположений находим:

$$u=A_2(x,y)\cos(\omega t+\varphi_2)+ M\Omega^2 L((p,x,z,y,h))\,[1+ M\Omega^2 L((p,x,z,y,h))]^{-1} w, \qquad (8)$$

где $L(p,x,z,y,h))$ – оператор несущей части среды (мембраны) – [12];

$A_2(x,y)=\mathrm{mod}\{L(i\omega, x,z,y,h)[1+M\Omega^2 L(i\omega,x,z,y,h)]^{-1}\}A_1((z,h));$

$\varphi_2(x,y)=\varphi_1+\arg\{L(i\omega,x,z,y,h)[1+M\Omega^2 L(i\omega, x,z,y,h)]^{-1}\}.$ (9)

Из (4) находим:

$$w= M\Omega^2(Mp^2+M\Omega^2)(u-\Phi). \quad (10)$$

Внося (10) в (8) получаем:

$$u=A_3(x,y)\cos(\omega t+\varphi_3)- L_3(p,x,z,y,h)L_1(p, x,z,y,h)\Phi(w, w_t),\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(11)$$

где функции A_3 и φ_3 получаются из формул (9) с заменой $L \to L_3$ и очевидной заменой индексов. Операторные функции

$$L_1(p, x,z,y,h)= M^2\Omega^4[1+ M\Omega^2 L(p, x,z,y,h)]^{-1} [Mp^2+M\Omega^2]^{-1}; \quad (12)$$

$$L_3(p,x,y)=\frac{(1+M\Omega^2 L)(Mp^2+M\Omega^2)}{(1+M\Omega^2 L)(Mp^2+M\Omega^2)-M\Omega^2}. \quad (13)$$

Здесь, как и везде ряд аргументов для простоты не указывается. Теперь (11) внесем в (10) и получим:

$$w= A_4(x,y)\cos(\omega t+\varphi_4)- L_4(p, x,z,y,h)L_3(p, x,z,y,h)L_1(p, x,z,y,h)\Phi(w, w_t)-$$
$$- L_4(p,x,z,y,h)\Phi(w, w_t), \quad (14)$$

где обозначено:

$$L_4(p, x,z,y,h)= M\Omega^2 (Mp^2+M\Omega^2)^{-1}. \quad (15)$$

При выбранном типе начальных условий (защемление мембраны по всем краям) представление определяющего оператора L(p, x,z,y,h) дано, например, в [12]

$$L(p, x,z,y,h)=\frac{4}{l_1 l_2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin{}^{k\pi x}/_{l_1}\sin{}^{n\pi y}/_{l_2}\sin{}^{k\pi z}/_{l_1}\sin{}^{n\pi h}/_{l_2}}{c^2\pi^2({}^{k^2}/_{l_1^2}+{}^{n^2}/_{l_2^2})+p^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .(16)$$

Тем самым все параметры определяющих операторных уравнений определены. Эти уравнения могут анализироваться численно, но могут быть подвергнуты дальнейшим полезным трансформациям в соответствии с формализмом методов частотно-временного анализа [10, 11].

5. Для получения представления периодических виброударных процессов, индуцированных, действующим в системе силовым фактором g, перейдем от операторных к интегральным уравнениям периодических колебаний [10, 11]. Интересуясь T-периодическими решениями ($T=2\pi\omega^{-1}$), введем периодическую функцию Грина (ПФГ):

$$\chi_0(t,x,z,y,h)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}L_0(i\omega i\, x,z,y,h)\exp(ik\omega\, t), \qquad (17)$$

причем $L_0=L_3L_2$. Периодические функции Грина представляют собой реакции линейных систем на периодические последовательности δ-функций Дирака [10, 11].

Аналогично (17) для операторов L_4 и $L_*=L_4L_3L_1$, вводятся ПФГ χ_4 и χ_*. Тогда для T-периодических процессов u и w будем иметь:

$$u(t,x,y)= A_3(x,y)\cos(\omega t+\varphi_3)+\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\chi_0(t-s,x,z,y,h)\Phi(w,w_t)\,dzdhds, \qquad (18)$$

$$w(t,x,y)= A_4(x,y)\cos(\omega t+\varphi_4) - \int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\chi_*(t-s,x,z,y,h)\Phi(w,w_t)\,dzdhds-$$

$$-\int_0^T\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\chi_4(t-s,x,z,y,h)\Phi(w,w_t)dzdhds. \qquad (19)$$

Внесем первое соотношение (6) в уравнения (18) и (19). Имеем:

$$u(t,x,y)= A_3(x,y)\cos(\omega t+\varphi_3)+\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\chi_0[t-t_0(z,h),x,z,y,h]\,J(z,h)dzdh, \qquad (20)$$

$$w(t,x,y)= A_4(x,y)\cos(\omega t+\varphi_4) - \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\chi_*[t-t_0(z,h),x,z,y,h]\,J(z,h)dzdh-$$

$$-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\chi_4[t-t_0(z,h),x,z,y,h]\,J(z,h)dzdh. \qquad (21)$$

Таким образом, получены определяющие представления (20), (21), названные в работах [3, 5-8] двухфункциональным. Если оказываются известными две функции – плотность ударного импульса J(x,y) и распределение фазы $t_0(x,y)$ - то искомые поля перемещений становятся полностью определенными, так как ПФГ χ_0, χ_* и χ_4 определены только операторами линейных систем и являются вычисляемыми, несмотря на свою громоздкость. Именно в силу указанной громоздкости анализ определяющих представлений будет приведен в последующих работах.

6. Сделаем принципиальные заключительные замечания.

6.1. Методы нахождения определяющих функций были разработаны в работах [3, 5-8]. В данном случае двумерной модели несущей части среды сложной структуры проблема существенно усложняется и приобретает самостоятельный интерес. Однако, как и рассмотренные ранее одномерные аналоги таких сред сохраняются их общие важнейшие черты. Например, все такие модели в определенном смысле отвечают моделям традиционных виброударных систем типа «линейная безударная система + ударные пары». Здесь тип модели «линейная среда сложной структуры + распределенный ударный элемент»; теория распределенных ударных элементов развита, в частности, в работах [13-16].

6.2. Физически рассматриваемая нами модель описывает, процесс вибропередачи в плоском изотропном объекте с большим числом ударных пар. Виброполе в данном объекте определяется двумя основными механизмами.

Присоединенное оборудование действует на несущую часть подобно ударным гасителям колебаний (ср. [1, 3.]).

Несущая часть осуществляет фильтрацию проходящей вибрации. Именно эти механизмы, проявляясь по-разному, в разных точках несущей конструкции и могут порождать специфические динамические эффекты.

6.3. Анализ определяющих соотношений здесь возможен только численный. Тем не менее существует возможность, используя аналитические схемы, основанные на частотно-временном анализе и методах форм нелинейных колебаний [3, 6, 8] и получить часть информации аналитически.

Это, как указывалось, будет сделано в последующих работах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № № 13-08-01235-а, 13-08-90419-Укр-а).

Список литературы

1. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел.-М.: Наука, 1976. 328 с.
2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных виброводов // Машиноведение. 1987. N 1. С..25-32.
4. Веприк А.М. , Litigation Вознюк П.Д. , Крупенин В.Л. и др. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний.- Л.:Машиностроение,1987. -87 с.
5. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. 1995. Т. 343. №6. С. 759-763.
6. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1)//Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www. vntr. ru). 2011. №6. С. 26-33.
7. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 2)//Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www. vntr. ru). 2011. №7. С. 3-16.
8. Крупенин В.Л. Об описании виброводов со структурными разрывами при помощи виброударных систем с распределенными ударными элементами // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www.vntr.ru). 2014. №3 (79) С. 23-30.
9. Нагаев Р.Ф., Ходжаев К.Ш. Колебания механических систем с периодической структурой. Ташкент: ФАН, 1973. 272 с.
10. Крупенин В.Л Представление виброударных процессов через определяющие физические параметры движения «импульс – фаза» (часть I) // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www.vntr.ru). 2010. №2 (30) С. 44-53.
11. Крупенин В.Л Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами // Проблемы

машиностроения и надежности машин. 2001. №3. С.20-28.
12. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М: Наука, 1979. 234 с.
13. Крупенин В.Л. К теории виброударных систем с распределенными ударными элементами // Изв. АН СССР.МТТ. -1986.-№1.-С.25-32.
14. Cabannes H. Cordes Vibrantes avec Obstacles//-Acustica.-1984.-V.55.-P.14-20.
15. Bamberger A., Schatzman M. New results of a string vibrating against the obstacles // Saim. J. Math. Anal. 1983. Vol. 14. № 3. Pp. 560-595.
16. Krupenin V.L., Veprik A.M. Vibroconductors equipped with impact elements and distributed vibroimpact systems // Proceedings of the 2-nd European Nonlinear Oscillations Conference. V.1. Czech Prague: CTU, 1996, pp. 229-234.