

УДК 534.1

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СТЕРЖНЕ

©Алексей Михайлович Доронин, Владимир Иванович Ерофеев,

Владимир Владимирович Кажаяев

*Институт проблем машиностроения Российской академии наук**Нижний Новгород, Россия*[erf04@sinn.ru](mailto:erf04@sinn.ru)

**Аннотация.** Показано, что в стержне могут формироваться продольные нелинейные стационарные упругопластические волны. Волны могут быть как периодическими, так и уединенными, что определяется показателем деформационного упрочнения материала, а скорость их распространения меньше скорости упругой сдвиговой волны.

**Ключевые слова:** стержень, нелинейность, упругопластическая волна.

## LONGITUDINAL NONLINEAR STATIONARY ELASTOPLASTIC WAVES IN THE ROD

© Alexey M. Doronin, Vladimir I. Erofeev, Vladimir V. Kazhaev

*Mechanical Engineering Research Institutes, Russian Academy of Sciences**Nizhny Novgorod, Russia*[erf04@sinn.ru](mailto:erf04@sinn.ru)

**Abstract.** It is shown that the rod can be formed longitudinal stationary nonlinear elastic-plastic wave. Waves can be both periodic and solitary, as determined by the strain hardening of the material, and the speed of their propagation velocity is less elastic shear wave.

**Keywords:** rod, nonlinearity, elastic-plastic wave.

Основные задачи о распространении упругопластических волн в средах, обладающих нелинейной зависимостью напряжений от деформаций, при продольном и поперечном ударе рассматривались в работах [1–3]. Аналитическое решение таких задач возможно лишь при рассмотрении максимально простых соотношений, определяющих поведение материала. Рассмотрение реальных реологических моделей приводит к необходимости использования численных методов [4].

В настоящей работе показано, что качественные методы теории нелинейных колебаний могут быть эффективно применены для анализа особенностей распространения упругопластических волн в элементах конструкций.

Распространение продольной волны в стержне с учетом высокочастотной дисперсии ее фазовой скорости (модель Бишопа) описывается уравнением [5]:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho v^2 I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + v^2 \mu I_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = F \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1)$$

Здесь  $u(x,t)$  – продольное перемещение точек срединной линии стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения стержня,  $\rho$  – плотность материала,  $v$  – коэффициент Пуассона,  $I_0$  – полярный момент инерции сечения стержня,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\sigma$  – осевое напряжение.

В случае одноосного напряженного состояния  $\sigma_i = \sigma$ , соотношение, связывающее деформацию  $\varepsilon = \varepsilon_i$  и перемещение  $u$ , имеет вид [6]:

$$\varepsilon = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

Зависимость напряжений от деформаций задается уравнением Холломона [7]:

$$\sigma = K \varepsilon^n, \quad (3)$$

где  $K$  – модуль упрочнения. Через  $n$  обозначается показатель деформационного упрочнения. Значения этой константы лежат в интервале от нуля до единицы. Значение  $n=0$  соответствует идеально пластическому материалу,  $n=1$  – идеально упругому материалу.

Большинство металлов и их сплавов имеют значение  $n$  от 0,1 до 0,5. Известны следующие значения: для отожженной низкоуглеродистой стали  $n=0,21$ ,  $K=600$  МПа; для отожженной легированной стали 4340  $n=0,12$ ,  $K=2650$  МПа; для отожженной нержавеющей стали 304  $n=0,44$ ,  $K=1400$  МПа; для отожженной меди  $n=0,44$ ,  $K=530$  МПа; для бронзы Naval brass  $n=0,21$ ,  $K=585$  МПа; для алюминиевого сплава 2024, подвергнутого термической обработке (ТЗ)  $n=0,17$ ,  $K=780$  МПа; для отожженного магниевого сплава  $n=0,16$ ,  $K=450$  МПа [8].

Учет соотношений (2), (3) (при условии наличия пластических деформаций) приводит (1) к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{K}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^n \right), \quad (4)$$

где  $r = \sqrt{\frac{I_0}{F}}$  – полярный радиус инерции,  $c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  – скорость распространения сдвиговой волны в материале.

Решение уравнения (4) ищем в классе стационарных волн  $u=u(\xi)$ , где  $\xi=x-Vt$  – “бегущая” координата,  $V$  – скорость волны.

Для величины  $U=du/d\xi$  уравнение в частных производных (4) сведется в этом случае к обыкновенному дифференциальному уравнению

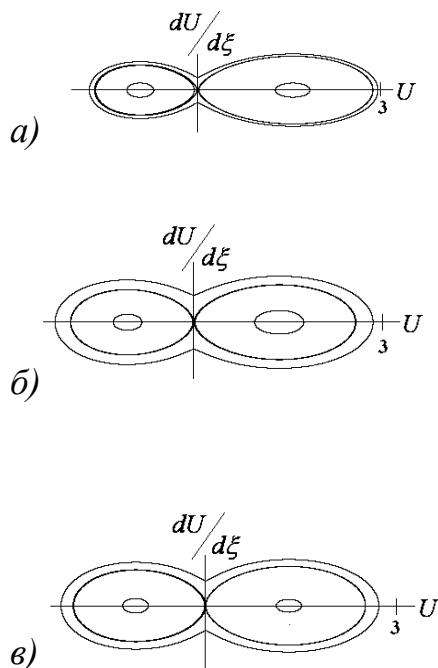
$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + m_1 U + m_2 \left( U + \frac{1}{2} U^2 \right)^n = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$m_1 = \frac{V^2}{v^2 r^2 c_\tau^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c_\tau^2} \right)}, \quad m_2 = \frac{K}{\rho v^2 r^2 c_\tau^2 \left( \frac{V^2}{c_\tau^2} - 1 \right)} \quad (6)$$

О возможности существования нелинейных стационарных волн и разновидностях их качественно-различного поведения можно судить по знакам коэффициентов  $m_1$ ,  $m_2$  и величине  $n$ . Физически очевидным представляется случай, когда волна пластической деформации распространяется медленнее, чем упругая волна ( $V < c_\tau$ ). Тогда из (6) следует, что  $m_1 > 0$ ,  $m_2 < 0$ .

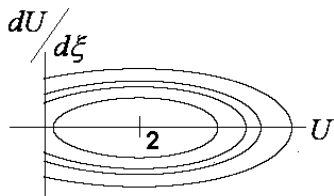
Если  $n$  представляется в виде дроби, в числителе и знаменателе которой стоят нечетный числа, то на фазовой плоскости уравнения (5) ( $U$ ,  $dU/d\xi$ ) точка  $(0,0)$  является неустойчивым положением равновесия типа «седло», слева и справа от нее по оси абсцисс находятся устойчивые положения равновесия типа «центр». Фазовый портрет (рис.1)



**Рис. 1.** Фазовый портрет уравнения (5) при  $m_1=1$ ,  $m_2=-1$   
 а)  $n=1/3$ , б)  $n=1/5$ , в)  $n=1/7$ .

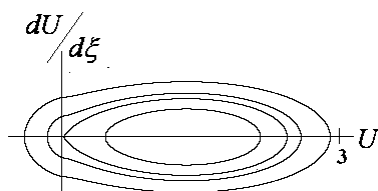
показывает, что в стержне могут существовать как периодические стационарные волны (им соответствуют движения по фазовым траекториям вокруг устойчивых положений равновесия), так и уединенные стационарные волны (движения по сепаратрисе, идущей из «седла» в «седло»). Фазовый портрет несимметричен относительно оси абсцисс, это означает, что при фиксированной скорости стационарной волны, волна положительной полярности имеет большую амплитуду, чем волна отрицательной полярности. Несимметричность фазового портрета увеличивается с ростом  $n$ .

Если  $n = (2k+1)/2m$ , т.е. числитель дроби является нечетным числом, а знаменатель – четным, то на фазовой плоскости уравнения (5) существует устойчивое положение равновесия типа «центр» (рис.2). Неустойчивые положения равновесия и связанные с ними сепаратрисы отсутствуют. Уединенных стационарных волн в этом случае не существует. Могут существовать только периодические стационарные волны и лишь при  $U > 0$ . При  $U < 0$  периодических движений нет, а при  $-2 < U < 0$  уравнение (5) вообще не имеет решений.



**Рис. 2.** Фазовый портрет уравнения (5) при прежних значениях  $m_1$ ,  $m_2$   
 и  $n=1/2$ .

Если  $n = 2k / (2m+1)$ , т.е. числитель дроби является четным числом, а знаменатель – нечетным, то фазовый портрет уравнения (5) (рис.3) содержит одно положения равновесия, являющееся устойчивым («центр»). В этом случае в стержне могут существовать периодические стационарные волны.



**Рис. 3.** Фазовый портрет уравнения (5) при прежних значениях  $m_1$ ,  $m_2$  и  $n=4/9$ .

*Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-08-01836).*

### Список литературы

1. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Логос, 1961. – 512 с.
2. Новацкий В. К. Волновые задачи и теории пластичности. М.: Мир, 1978. – 308 с.
3. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во литературы по строительству, 1965. – 448 с.
4. Molinari A., Ravichandrana G. Fundamental structure of steady plastic shock waves in metals // Journal of Applied Physics. 2004. Volume 95. No 4. P.1718-1732.
5. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.
6. Мастиновский Ю.В., Паршуков А.В. Упругопластические волны в стержне, свойства материала которого зависят от скорости деформирования // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2008. №2. С.126-129.
7. Kleemola H.J., Nieminen M.A. On the strain-hardening parameters of metals // Metallurgical Transactions. 1974. Volume 5. P.1863-1866.
8. Callister, Jr., William D. (2005), Fundamentals of Materials Science and Engineering (2nd ed.). United States of America: John Wiley & Sons. 2005. 200 p.