УДК 531

Построение усредненной динамики в задаче о существовании вращательных режимов в периодически возмущенном уравнении синус-Гордон

©В.Ш. Бурд

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
vburd1@gmail.com

Аннотация.
Рассматривается уравнение синус-Гордон с дополнительными членами, описывающими динамику в длинной джозефсоновской линии. На систему действует периодическое возмущение, представляющее собой быстро осциллирующую периодическую функцию с нулевым средним значением и большой амплитудой. Исследуется вопрос о существовании сложных вращательных режимов возмущенного урпвнения синус-Гордон. Для построения усредненной динамики применяется классический метод усреднения.

Ключевые слова: уравнение синус-Гордон, периодическое возмущение, метод усреднения, вращательные режимы, функции Беселя.

Construction of the averaged dynamics in the problem of the existence of rotary regimes in periodically perturbed sine-Gordon equation

V.Sh. Burd

Demidov Yaroslavl State University

Abstract
We consider the sine-Gordon equation with additional terms which describe the dynamics in a long Josephson line in presence ac driven of rapidly varying periodic perturbations. The problem of the existence of complex rotary regimes of the perturbed sine-Gordon equation. The method of average is used to construct the averaged dynamics.

Key words: sine-Gordon equation, periodic perturbation, method of averaging, rotary regimes, Bessel functions.

1. Введение

Как хорошо известно, эффект быстро изменяющихся возмущений на динамику нелинейных систем может привести к существенному изменению поведения системы в смысле усредненной динамики. В частности, привести к стабилизации некоторых типов динамических режимов. С начала 90-х годов прошлого века такие задачи стали исследоваться для дифференциальных уравнений с частными производными, близких к интегрируемым. В частности, большое внимание уделялось уравнению синус-Гордон (см. [2–101. Основной аналитический метод исследования соответствущих задач в работах [2-4] состоит в следущем. Приближенное решение соответствующего уравнения ищется в виде ряда Фурье с медленно меняющимися коэффициентами. Метод часто приводит к громоздким вычислениям и неясным результатам. В работах [5–8] усредненные уравнения строятся следующим образом. Вводится гамильтониан системы и выполняется несколько канонических преобразований, которые позволяют устранить быстро осциллирующие слагаемые из гамильтониана. В [9–10] для построения усредненных уравнений применяется классический метод усреднения (см. [11–12]). Вводится малый параметр ε, что позволяет сделать предположения о величине, входящих в уравнение синус-Гордон слагаемых.

2. Усредненная динамика вращательных режимов уравнения синус-Гордон в присутствии вынужденной быстро осциллирующей периодической силы с большой амплитудой

Рассмотрим уравнение синус-Гордон с дополнительными членами, описывающими динамику в длинной джозефсоновской линии в нормализованной форме (см. [1]) при действии быстроосциллирующего периодического возмущения с большой амплитудой

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = -\alpha u_t + \beta u_{xxt} + \eta + K f(t). \tag{1}$$

Здесь слагаемое αu_t появляется из-за туннелирования квазичастиц. второе слагаемое βu_{xxt} появляется из-за поаерхностного сопротивления сверхпроводника. Постоянная η представляет собой нормализованную плотность подмагничивающего тока. Общим свойством параметров α, β, η является их достаточная малость. Далее, $f(t)$ - периодическая функция с большой частотой и нулевым средним значением, K - постоянная.

Введем малый параметр ε и положим, что $f(t) = g(t/\varepsilon)$, где $g(t)$-2π-периодическая функция. Будем предполагать, как и в [4], что амплитуда K равна по величине квадрату частоты, т.е.

$$K = \frac{M}{\varepsilon^2},$$

а M - постоянная. Теперь уравнение (1) запишем в виде

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = -\varepsilon\alpha u_t + \varepsilon\beta u_{xxt} + \eta + \frac{M}{\varepsilon^2} g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \tag{2}$$

Мы также считаем, что слагаемые αu_t и βu_{txx} пропорциональны малому параметру ε.

В уравнении (2) сделаем замену

$$u = v + \nu\frac{t}{\varepsilon} + G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{3}$$

где ν - постоянная, а функция $G(t)$ является решением уравнения

$$G''\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \alpha G'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{M}{\varepsilon^2}g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Получим уравнение

$$v_{tt} - v_{xx} + \varepsilon\alpha v_t + \sin\left(v + \nu\frac{t}{\varepsilon} + G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) + \nu\alpha = \varepsilon\beta v_{xxt} + \eta. \tag{4}$$

Переход от уравнения (3) к уравнению (4) показывает как внешняя возмущающая сила ведет к параметрическому эффекту подобному тому, который вызывается параметрически возмущенным уравнением синус-Гордон.

Уравнение (4) можно записать в виде

$$v_{tt} - v_{xx} + \varepsilon\alpha v_t + A\left(\frac{t}{\epsilon}\right)\sin v + B\left(\frac{t}{\epsilon}\right)\cos v + \nu\alpha = \varepsilon\beta v_{xxt} + \eta, \tag{5}$$

где

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left[\nu\frac{t}{\varepsilon} + G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right], \quad B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left[\nu\frac{t}{\varepsilon} + G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right].$$

В уравнении (5) сделаем замену времени $\tau = t/\varepsilon$. Получим уравнение

$$v_{\tau\tau} - \varepsilon^2 v_{xx} + \varepsilon^2\alpha v_\tau + \varepsilon^2[A(\tau)\sin v + B(\tau)\cos v + \varepsilon^2\nu\alpha = \varepsilon^2\beta v_{xx\tau} + \varepsilon^2\eta. \tag{6}$$

От уравнения (6) перейдем к системе уравнений

$$\begin{aligned} &v_\tau = \varepsilon z, \\ &z_\tau = \varepsilon v_{xx} - \varepsilon\alpha v_\tau - \varepsilon[A(\tau)\sin v + B(\tau)\cos v + \nu\alpha] + \varepsilon\beta v_{txx} + \varepsilon\eta. \end{aligned} \tag{7}$$

Система (7) имеет стандартную форму для применения метода усреднения (см. [11–12]). Усредненная система имеет вид

$$\begin{aligned} &\overline{v}_\tau = \varepsilon\overline{z}, \\ &\overline{z}_\tau = \varepsilon\overline{v}_{xx} - \varepsilon\alpha\overline{v}_\tau - \varepsilon[\langle A(\tau)\rangle\sin\overline{v} + \langle B(\tau)\rangle\cos\overline{v} + \nu\alpha] + \varepsilon^2\beta\overline{v}_{\tau xx} * \varepsilon\eta. \end{aligned} \tag{8}$$

где $\langle A(\tau)\rangle$, $\langle B(\tau)\rangle$ - средние значения функций $A(\tau)$, $B(\tau)$ соответственно.

Отметим следующее обстоятельство, относящееся к функциям $A(\tau)$ и $B(\tau)$. Функция $A(\tau)$ имеет вид

$$A(\tau) = \cos[\nu\tau + Mf(\tau)] = \cos\nu\tau\cos Mf(\tau) - \sin\nu\tau\sin Mf(\tau).$$

Если периоды $T_1 = 2\pi/\nu$ и $T_2 = 2\pi/\Omega$, входящих в $A(\tau)$ функций соизмеримы, то функция $A(\tau)$ будет периодической, если же периоды несоизмеримы, то функция $A(\tau)$ будет почти периодической. Аналогичное утверждение справедливо и для функции $B(\tau)$.

Усредненную систему (8) можно записать в виде одного уравнения второго порядка

$$\overline{v}_{\tau\tau} - \varepsilon^2 \overline{v}_{xx} + \varepsilon^2 \alpha \overline{v}_\tau + \varepsilon^2 [\langle A(\tau)\rangle \sin \overline{v} + \langle B(\tau)\rangle \cos \overline{v} + \nu\alpha] = \varepsilon^2 \beta \overline{v}_{\tau xx} + \varepsilon^2 \eta.$$

В исходном времени t получим уравнение

$$\overline{v}_{tt} - \overline{v}_{xx} + \alpha \overline{v}_t + [\langle A(\tau)\rangle \sin \overline{v} + \langle B(\tau)\rangle \cos \overline{v} + \nu\alpha] = \varepsilon \beta \overline{v}_{txx} + \overline{\eta} = 0, \tag{9}$$

которое и определяет усредненную динамику в рассматриваемой задаче.

В качестве примера возьмем функцию

$$f(t) = -\sin \Omega t.$$

Функцию $G(t)$ вычисляем из уравнения

$$G'' + \varepsilon \alpha G(t) = -\frac{M}{\varepsilon^2} \sin \frac{\Omega t}{\varepsilon}.$$

Легко видеть, что

$$G(t) = \frac{M}{\Omega^2 + \alpha^2\varepsilon^2} \sin \frac{\Omega t}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon M \alpha \Omega}{\Omega^2 + \alpha^2\varepsilon^2} \cos \frac{\Omega t}{\varepsilon} = \frac{M}{\Omega^2 + \alpha^2\varepsilon^2} \sin \frac{\Omega t}{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

Теперь нам нужно вычислить средние значения функций

$$A(\tau) = \cos \nu\tau \cos G(\tau) - \sin \nu\tau \sin G(\tau)$$

и

$$B(\tau) = \sin \nu\tau \cos G(\tau) + \cos \nu\tau \sin G(\tau).$$

Нам понадобятся следующие известные соотношения для функций Бесселя (см., напр. [13])

$$\begin{array}{l} \cos(z \sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z)\cos(2k\theta), \\ \sin(z\sin\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z)\sin[(2k+1)\theta], \end{array}$$

где $J_k(z)$ - функция Бесселя целого порядка k. Из них вытекает, что

$$A(\tau) = \cos\nu\tau \left[J_0(\Gamma) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\Gamma)\cos 2k\Omega\tau \right] - \sin\nu\tau \left[2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\Gamma)\sin(2k+1)\Omega \right],$$

$$B(\tau) = \sin\nu\tau \left[J_0(\Gamma) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\Gamma)\cos 2k\Omega\tau \right] + \cos\nu\tau \left[2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\Gamma)\sin(2k+1)\Omega\tau \right],$$

где

$$\Gamma = -\frac{M}{\Omega^2 + \alpha^2\varepsilon^2}.$$

Если отношение
$$\frac{\nu}{\Omega} = k, \tag{10}$$
где k - целое число, то среднее значение функции $A(\tau)$ отлично от нуля. Среднее значение $\langle A(\tau)\rangle = J_{2k}(\Gamma)$ при $\nu = 2k\Omega$ и $\langle A(\tau)\rangle = -J_{2k+1}(\Gamma)$ при $\nu = (2k+1)\Omega$. Если выполняется соотношение (10), то среднее значение функции $B(\tau)$ равно нулю. Если соотношение (10) не выполняется, то средние значения функций $A(\tau)$, $B(\tau)$ равны нулю. Усредненное уравнение имеет вид

$$\overline{v}_{tt} - \overline{v}_{xx} + \varepsilon\alpha\overline{v}_t + J_{2k}(\Gamma)\sin\overline{v} + \nu\alpha] - \varepsilon\beta\overline{v}_{txx} - \eta = 0, \tag{11}$$

или,
$$\overline{v}_{tt} - \overline{v}_{xx} + \varepsilon\alpha\overline{v}_t - J_{2k+1}(\Gamma)\sin\overline{v} + \nu\alpha] - \varepsilon\beta\overline{v}_{txx} - \eta = 0. \tag{12}$$
Если в уравнении (1) отбросить малые по величине слагаемые и возмущение, то получим уравнение
$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0,$$
кинки которого определяются формулами

$$u(x,t) = 4\sigma \operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{x-ct}{\sqrt{1-c^2}} + \delta\right)\right],$$

где $\sigma = \pm$. Если отбросить малые слагаемые в уравнении (11), то кинки этого уравнения имеют вид
$$\overline{v}(x,t) = 4\sigma \operatorname{arctg}\left[\exp\left(\frac{x-ct}{l_0\sqrt{1-c^2}} + \delta\right)\right],$$
где $l_0 = [J_{2k}(\Gamma)]^{-1/2}$.

В [4] для построения усредненных уравнений в рассматриваемой задаче использовалось разложение решения в ряд Фурье с медленно меняющимися по времени коэффициентами. Усредненное уравнение имеет вид

$$\overline{v}_{tt} - \overline{v}_{xx} + \alpha\overline{v}_t + J_k(A)\sin\overline{v} + \nu\alpha] + \eta = 0,$$

где $A(t,x)$ определяется из сложной системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Отметим еще, что при $\nu = 0$ мы получаем усредненные уравнения первого приближения совпадающие с усредненными уравнениями, полученными в [10] другим методом.

Если амплитуда внешней силы имеет порядок $1/\varepsilon$ или является постоянной, то нужно построить усредненные уравнения второго и третьего приближений. Для этого лучше перейти от уравнения (5) к эквивалентной системе уравнений. Соответсвующий переход описан в [10].

Литература

1. Браун О.М., Кившарь Ю.С. Модель Френкеля - Конторов. Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008.- 536 с.
2. Gronbech-Jensen N., Kivshar Yu. S., Samuelsen M.R. Stabilization breathers in a parametrically driven sine-Gordon system with loss // Physical Review B, 1991, vol. 43, no. 7, pp. 5698–5701.
3. Kivshar Yu. S., Gronbech-Jensen N., Samuelsen M.R. π kinks in a parametricaly driven sine-Gordon chain // Physical Review B, 1992, vol. 45, no. 14, pp. 7789–7794.
4. Kivshar Yu. S., Gronbech-Jensen N., Parmentier R. D. Kinks pn the presence of rapidly varying perturbations // Physical Review E., 1994, vol. 49, no. 5, pp. 4542–4551.
5. Rasmussen K., Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N. High-order effects on Shapiro steps in Josephon junctions, Physical Review B, 1999, vol. 59, n. 1, p. 58–61.
6. Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M. Parametrically forced sine-Gordon equation and domain wall dynamics in ferromagnets, Physical Review, 1998, vol. 57, no. 9, pp. 5033–5035.
7. Mitkov I., Zharnitsky V. π-Kinks in parametrically driven sine-Gordon equation and application, Physica D, 1998, vol. 123, pp. 301–307.
8. Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N. π kinks in strongly ac driven sine-Gordon systems, Physical Review E, 1998, vol. 58, n 1, R52–R55.
9. Бурд В.Ш. π-кинки в параметрически возбужденном уравнении синус-Гордон, ВНТР, N 9(61), 2012, с. 1–7, Электронный журнал, http://vntr.ru/
10. Бурд В.Ш. Кинки в сильно периодически возмущенном уравнении синус-Гордон, ВНТР, N 3(79), март 2014, Электронный журнал, http://vntr.ru/
11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М.: Наука, 1974.- 411 с.
12. Burd V. Method of averaging for differential equations on an infinite interval. Theory and applications, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 255. Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2007, 356 c.
13. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами под ред. М. Абрамовица и Стигун И.- М.: Наука, 1979.- 832 с.