УДК 531

Анализ периодических колебаний в автономных виброударных системах с одной степенью свободы

Владимир Шепселевич Бурд[1], Виталий Львович Крупенин[2]

[1]Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

[2]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук,Москва, Россия
krupeninster@gmail.com

Аннотация.
Рассматривается кваэиконсервативный ударный осциллятор с возмущением, зависящим только от фазовых координат системы. Исследуется вопрос о существовании и устойчивости периодических режимов движения с соударениями. Используется классический метод усреднения.

Ключевые слова: ударный осциллятор, автономная система, периодические решения, метод усреднения.

Analysis of periodic oscillations in autonomous vibroimpact system with one degree of freedom

[1] Vladimir Sh. Burd
[2]Vitaly L. Krupenin

[1]Demidov Yaroslavl State University
[1]Federal Budget-Funded Mechanikel Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia

Abstract
We consider quasiconservative impact oscillator with perturbation depending only from phase coordinates of system. The problem of existence and stability periodic regimes of motion is investigated. The classical method of average is used.

Key words: impact oscillator, autonomous system, periodic solution, method of averaging.

1. Введение

В этой работе рассматривается применение метода усреднения к изучению вопроса о существовании и устойчивости периодических решений квазиконсервативного ударного осциллятора, модель которого детально описана в [1]. Эта задача сводится к иссследованию двумерной системы дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой и разрывами по фазе.

2. Консервативный ударный осциллятор

Рассмотрим линейный консервативный осциллятор с уравнением

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0.$$

В точке $x = \Delta$ устанавливается **неподвижный ограничитель**. Предполагается, что по достижении координатой x в системе происходит мгновенный упругий удар. Если $x = \Delta$ в момент времени t_α, то выполняется соотношение

$$\dot{x}(t_\alpha - 0) = -\dot{x}(t_\alpha + 0).$$

При $\Delta > 0$, если уровень энергии в линейной системе недостаточен для выхода на уровень $x = \Delta$, то происходят лтнейные колебания с частотой Ω. При наличии соударений частота колебаний $\omega > \Omega$ и удовлетворяет неравенству

$$\Omega < \omega < 2\Omega.$$

При $\Delta < 0$ частота колебаний ω удовлетворяет неравенству

$$2\Omega < \omega < \infty.$$

При $\Delta = 0$ частота колебаний равна 2Ω. Уравнения движения вместо условий удара можноззаписать в виде

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0 = 0,$$

где Φ_0 - функция описывающая силу удара. Изменение импульса силы Φ_0 в окрестности момента $t\alpha$ имеет вид

$$J = \dot{x}_- - \dot{x}_+, \quad \dot{x}_- > 0,$$

где $\dot{x}_\mp = \dot{x}(t_\alpha \mp 0)$.

Результирующая сила оказывается локализованной при $t = t\alpha$. Поэтому

$$\Phi_0 \,|_{t=t\alpha} = J\delta(t - t_\alpha),$$

где $\delta(t - t_\alpha)$ - δ-функция Дирака. Удары происходят периодически, когда $t_\alpha = t_0 + \alpha T$, где α - целое число, а T - период между ударами. Под решением уравнения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0$$

можно понимать T-периодическую функцию $x(t)$, которая, будучи подставленной в это уравнение, обращает его в верное (в смысле теории обобщенных функций) равенство вида

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + J\delta_T(t - t_0) = 0,$$

где t_0 - произвольная постоянная, и для всех $\alpha = 0, \pm 1, \ldots$

$$x(t_0 + \alpha T) = \Delta, \quad J = 2\dot{x}_-(t_0 + \alpha T).$$

При этом выполняются ограничения

$$x(t) \leq \Delta, \quad \dot{x}_- > 0.$$

Для аналитического описания решения положим $t_0 = 0$. Тогда при $0 \leq t < T_0$ решение уравнения (6) имеет вид

$$x(t) = -J\kappa[\omega_0(J)(t-t_0), \omega_0(J)], \quad \kappa(t,\omega_0) = \tfrac{1}{2\Omega}\tfrac{\cos[\Omega(t-T_0/2)]}{\sin(\Omega T_0/2)}, J(\omega_0) = -2\Omega\Delta\tan\tfrac{\Omega T_0}{2}, \quad J \geq 0,$$

причем третье соотношение определяет здесь при $\Delta \neq 0$ гладкую зависимость $\omega_0(J)$, а при $\Delta = 0$ получаем $\omega_0 = 2\Omega$.

Найденное представление следует продолжить по периодичности. Получим

$$\kappa(t,\omega_0) = \frac{\omega_0}{2\pi\Omega^2} + \frac{\omega_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\omega_0 t}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2}.$$

3. Возбужденный ударный осциллятор

Рассмотрим теперь возбужденный ударный осциллятор

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x,\dot{x}) = \varepsilon g(x,\dot{x}), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $g(x,\dot{x})$ - достаточно гладкая функция переменных x, $\dot{x}$, которая ограничена в некоторой ограниченной области этих переменных.

Положим $\psi = \omega_0 t$ и от уравнения (1) перейдем к системе в переменных J, ψ (импульс-фаза) с помощью замены

$$\begin{aligned} x &= -J\kappa[\psi, \omega_0(J)], \\ \dot{x} &= -J\omega_0(J)\kappa_\psi[\psi, \omega_0(J)], \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\kappa[\psi,\omega_0(J)] = \kappa(\psi, J) = \omega_0(J)^{-1}\left[\frac{1}{2\pi\Omega_0^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{\Omega_0^2 - k^2}\right], \quad \Omega_0 = \frac{\Omega}{\omega_0(J)}.$$

Замена (2) - негладкая; при $\psi = 2l\pi$, где l - целое число, функция κ_ψ имеет конечные разрывы, поэтому в новых переменных удары происходят, когда $\psi = 2l\pi$. Производя замену (2), придем к системе (см. [1])

$$\tfrac{dJ}{dt} = -4\varepsilon\omega_0(J)g(-J\kappa[\psi,\omega_0(J)], -J\omega_0(J)\kappa_\psi[\psi,\omega_0(J)])\kappa_\psi(\psi,J) = \varepsilon H_1(J,\psi)$$

$$\tfrac{d\psi}{dt} = \omega_0(J) - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}g(-J\kappa[\psi,\omega_0(J)], -J\omega_0(J)\kappa_\psi[\psi,\omega_0(J)])(-J\kappa(\psi,J))_J = \tag{3}$$

$$\omega_0(J) + \varepsilon H_2(J,\psi.$$

Получили систему с быстро вращающейся фазой, где правые части периодичны по ψ и имеют конечные разрывы (κ_ψ) в точках $\psi = 2l\pi$. Зависимости $\omega_0(J)$ имеют вид

$$\begin{array}{l} \omega_0(J) = \frac{\pi\Omega}{\pi - \arctan[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta > 0, \quad \Omega < \omega_0 < 2\Omega, \\ \omega_0(J) = -\frac{\pi\Omega}{\arctan[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta < 0, \quad 2\Omega < \omega_0 < \infty, \\ \omega_0(J) = 2\Omega = const, \quad \Delta = 0. \end{array}$$

Отметим два обстоятельства, которые важны в последующем. Во-первых, $\omega(J) > 0$. Во-вторых, функция $\kappa_\psi(\psi, J)$, которая представима в виде ряда Фурье

$$\kappa_\psi(\psi, J) = -\frac{\omega_0(J)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin k\psi}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2(J)}$$

диффERECцируема во внутренних точках интервалов $[2l\pi, 2(l+1)\pi]$.

Разделим первое уравнение системы (3) на второе. Получим уравнение первого порядка

$$\frac{dJ}{d\psi} = \varepsilon \frac{H_1(J, \psi)}{\omega_0(J) + \varepsilon H_2(J, \psi)} = \varepsilon \omega_0(J)^{-1}[H_1(J, \psi) - O(\varepsilon)]. \tag{4}$$

Уравнение (4) - это уравненение в стандарной форме для применения метода усреднения. Кроме того, правая часть уравнения (4) периодична по ψ с периодом 2π. Усредненное уравнение первого приближения имеет вид

$$\frac{d\overline{J}}{d\psi} = \varepsilon H_0(\overline{J}),$$

где

$$\begin{array}{l} H_0(\overline{J}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \omega^{-1}(\overline{J}) H_1(\overline{J}, \psi) d\psi = \\ -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(-\overline{J}\kappa[\psi, \omega_0(\overline{J})], -\overline{J}\omega_0(\overline{J})\kappa_\psi[\psi, \omega_0(\overline{J})])\kappa_\psi(\psi, \overline{J}) d\psi. \end{array}$$

Из теоремы Боголюбова об усреднении на бесконечном промежутке следует, что каждому стационарному решению $\overline{J} = J_0$ уравнения

$$H_0(\overline{J}) = 0,$$

для которого $H_{0\overline{J}}(J_0) \neq 0$ соответствует 2π-периодическое решение уравнения (3). Это решение асимптотически устойчиво, если

$$H_{0\overline{J}}(J_0) < 0$$

и неустойчиво, если

$$H_{0\overline{J}}(J_0) > 0.$$

Пусть $J^*(\psi, \varepsilon)$ - 2π-периодическое решение уравнения (4), соответствующее стационарному решению J_0 усредненного уравнения. Перейдем снова к переменной t и рассмотрим функции

$$\begin{array}{l} x^*(t, \varepsilon) = -J^*\kappa[\psi, \omega_0(J^*)], \\ \dot{x}^*(t, \varepsilon) = -J^*\omega_0(J^*)\kappa_\psi[\psi, \omega_0(J^*)], \end{array}$$

Покажем, что полученные таким образом функции будут также периодическими, но период будет зависеть от параметра ε и начальных условий. С этой целью обратимся ко второму уравнению системы (3), определяющему ψ как функцию t. Предположим, что t и ψ одновременно обращаются в нуль. Тогда

$$t(\psi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\omega_0(J^*) + \varepsilon H_2(J^*, \phi, \varepsilon)}. \tag{5}$$

Отсюда получаем, что

$$t(\psi + 2\pi) - t(\psi) = \int_{\psi}^{\psi+2\pi} \frac{d\phi}{\omega_0(J^*) + \varepsilon H_2(J^*, \phi, \varepsilon)}. \tag{6}$$

Так как $J^*(\psi, \varepsilon)$ - 2π-периодическая функция, то производная интеграла (6) равна нулю. Поэтому

$$t(\psi + 2\pi) - t(\psi) = T(\varepsilon), \tag{7}$$

где $T(\varepsilon)$ завистит только от ε и начального условия. Соотношение (7) показывает, что при изменении t на величину $T(\varepsilon)$ величина ψ изменяется на величину 2π, и, следовательно, функции $x^*(t,\varepsilon)$ и $\dot{x}^*(t,\varepsilon)$ не изменяются. Поэтому $x^*(t,\varepsilon)$ и $\dot{x}^*(t,\varepsilon)$ - периодические функции с периодом $T(\varepsilon)$. Мы выбрали $\psi(0) = 0$. Отсюда заключаем, что $x^*(0,\varepsilon) = J^*(0,\varepsilon)$, $\dot{x}^*(0,\varepsilon) = 0$.

Следовательно, уравнение (1) при выполнении условия $H_{0\overline{J}}(J_0) \neq 0$ для стационарного решения J_0 имеет при достаточно малых ε периодическое решение $x^*(t,\varepsilon)$ с периодом $T(\varepsilon)$. При $\varepsilon = 0$ это решение превращается в периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0.$$

Заметим, что фунция $x^*(t+h,\varepsilon)$ при любом вещественном h также является решением уравнения (1). Следовательно, в силу автономности уравнения (1) существует однопараметрическое семейство периодических решений.

Исследуем теперь вопрос об устойчивости решения $x^*(t,\varepsilon)$. Как было замечено,если уравнение (1) имеет периодическое решение, то существует однопараметрическое семейство периодических решений и, следовательно, это периодическое решение не может быть асимптотически устойчиво, а только устойчиво по Ляпунову. Очевидно, устойчивость периодического решения $J^*(\psi,\varepsilon)$ уравнения (4) влечет устойчивость периодического решения $x^*(t,\varepsilon)$ уравнения (1). Аналогично утверждение справедливо в случае неустойчивости периодического решения $J^*(\psi,\varepsilon)$.

Таким образом, неравенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g(-J\kappa[\psi, \omega_0(J)], -J\omega_0(J)\kappa_\psi[\psi, \omega_0(J)])\kappa_\psi(\psi, J) d\psi < 0$$

влечет устойчивость периодического решения $x^*(t,\varepsilon)$, а неравенство

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(-J\kappa[\psi,\omega_0(J)],-J\omega_0(J)\kappa_\psi[\psi,\omega_0(J)])\kappa_\psi(\psi,J)d\psi>0$$

влечет неустойчивость этого решения.

Замечание. Кроме устойчивости по Ляпунову периодического решения можно утверждать, что каждое решение уравнения (1), достаточно близкое к периодическому решению, стремится при $t\to\infty$ к одному из решений семейства $x^*(t+h,\varepsilon)$.

В качестве примера (см. [1]) рассмотри авторезонасную систему

$$\ddot{x}+\Omega^2x+\Phi_0(x,\dot{x})=\varepsilon(\alpha-\beta x^2)\dot{x}.$$

Здесь α, β - положительные постоянные. $\Phi_0(x,\dot{x}$ описывает упругий удар в системе. В этом случае первое уравнение системы (3) принимает вид

$$\frac{dJ}{dt}=-4\varepsilon\omega_0(J)\{[\alpha-\beta(-J\kappa[\psi,\omega_0(J)]\kappa_\psi(\psi,J)\}^2\{-J\omega_0(J)\kappa_\psi[\psi,\omega_0(J)]\kappa_\psi(\psi,J)\}. \quad (7)$$

Чтобы получить усредненное уравнение нам нужно вычислить среднее значение по периоду 2π правой части уравненя (7). В соответствующем интеграле сделаем замену перемнных. От переменной $\psi=\omega t$ перейдем к переменной t. Мы получим интеграл по промежутку $[0,T=\frac{2\pi}{\omega}]$. Используя представление решений невозмущенной системы на этом промежутке, вычисляем интеграл. Получим усредненное уравнение

$$\frac{d\overline{J}}{dt}=\varepsilon(\overline{J}\alpha A-\overline{J}^3\beta B), \quad (8)$$

где

$$A=\frac{1}{2\sin^2(1/2\Omega T)}\left(1-\frac{\sin\Omega T}{\Omega T}\right),$$

$$B=\frac{1}{2\sin^2(1/2\Omega T)}\left[\frac{1-\frac{\sin @\Omega T}{2\Omega T}}{16\Omega^2(1/2\Omega T)}\right].$$

Длч определения стационарных решениц уравнения (8) получим трансцендентное уравнение. Отметим, что Уравнение (8) было получено в [1]. При некоторых физически осмысленных упрощающих предположениях усредненное уравнение (8) можно записать в виде

$$\frac{d\overline{J}}{dt}=\frac{1}{3}\varepsilon\overline{J}\left(\alpha-\frac{1}{4}\beta\overline{J}^2\Omega^{-2}-\beta\Delta^2\right). \quad (9)$$

Приравнивая нулю правую часть уравнения (9), получим уравнение для определения стационарных решений уравнения (9). Из последнего уравнения следует, что уравнение (9) имеет стационарное решение $J_0=0$ при всех значениях параметров и стационарное решение $J_1=2\Omega\sqrt{\alpha-\beta\Delta^2}$ при выполнении неравенства

$$\alpha-\beta\Delta^2>0. \quad (10)$$

Неравенство (10) обепечивает неустойчивость состояния равновесия J_0 и асимптотическую устойчивость состояния равновесия J_1. Следовательно, при достаточно малых *varepsilon* состоянию равновесия J_1 усредненного уравнения (9) соответствует устойчивое по Ляпунову периодическое решения исходного авторезонансного уравнения.

Отметим, что в том случае, когда правая часть уравнения (A) не содержит $\dot{x}$, то

$$H_0(\overline{J}) \equiv 0,$$

Такой случай Малкин (см. [2]) назвал особым. Особый случай может встретится и при зависимости правой части от $\dot{x}$.

Литература

1. В.И. Бабицкий, В.Л. Крупенин Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985, 384 с.
2. И.Г. Малкин Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат. 1956, 492 с.