УДК 534.1

УТОЧНЕННЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

© Наталья Игоревна Архипова[1], Владимир Иванович Ерофеев[1,2], Владимир Михайлович Сандалов[2]

[1]ФГБУН Институт проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород
[2]ФГАОУВО Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского г. Нижний Новгород
united-friends@bk.ru, erf04@sinn.ru

Аннотация. *В статье показано, что уточненные (неклассические) стержневые модели могут быть применены для описания динамических процессов в слоистых элементах конструкций. Рассуждения проводятся на примере двухслойного стержня, совершающего продольные колебания.*
Ключевые слова: *стержень, уточненная модель, упругая волна, слоистая конструкция.*

MODEL SPECIFIED IN PROBLEMS ON THE PROPAGATION OF ELASTIC WAVES IN THE LAMINATED ELEMENT DESIGNS

© NI Arkhipova[1], VI Erofeev[1,2], VM Sandalov[2]

[1]Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences,
[2]Lobachevsky State University of Nizhny Novgorog

Abstract. *The article shows that sophisticated (non-classical) core models can be used to describe the dynamic processes in layered structural elements . Arguments are the example of a two-layer rod committing longitudinal vibrations .*
Keywords: *rod, improved model , the elastic wave, layered design .*

1. ВВЕДЕНИЕ

Наряду с инженерными (классическими) моделями в динамике стержней существуют, так называемые, уточненные или неклассические модели [1]. Эти модели учитывают дополнительные факторы, влияющие на динамический процесс, или свободны от некоторых гипотез, принятых в инженерных теориях и ограничивающих область их применимости.

Классическую теорию Д. Бернулли, принятую при описании продольных колебаний стержня, обобщают модели Релея-Лява (учет кинетической энергии поперечных движений частиц стержня), Бишопа (учет еще и потенциальной энергии сдвиговых деформаций), Миндлина-Германа (свобода от гипотезы об одноосности деформированного состояния стержня) [2,3].

Уточненные модели применяют, как правило, при описании высокочастотных волновых процессов, когда длина волны становится сравнимой с диаметром поперечного сечения стержня и инженерные модели принципиально неприменимы. Однако в упомянутом частотном диапазоне следует учитывать многомодовость волнового процесса и предпочтение, чаще всего, отдается не уточненным стержневым моделям, а моделям твердотельных многомодовых волноводов – упругий слой (задача Лэмба) и толстостенный цилиндр (задача Похгаммера-Кри)[5,6].

В публикуемой работе показано, что уточненные стержневые модели могут быть применены для описания динамических процессов в слоистых элементах конструкций. Рассуждения проводятся на примерах двухслойного стержня, совершающего продольные колебания. Задачи рассмотрены в упругой, вязко-упругой и нелинейно-упругой постановках.

2. СОСТАВНОЙ СТЕРЖЕНЬ

В работе [7] рассматривается распространение одномерных продольных волн по составному (двухслойному) полубесконечному стержню. Составной (двухслойный) стержень представляет собой совокупность двух стержней, находящихся в контакте друг с другом. Сила контактного взаимодействия предполагается линейно-упругой. Считаем также, что в начальный момент времени на левый конец стержней действует импульс кинематического или силового происхождения, а правый конец свободен.

Движение стержней описывается системой уравнений [7]:

$$\begin{cases} E_1S_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1 - u_2), \\ E_2S_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2 - u_1), \end{cases} \tag{1}$$

где u_i – продольные перемещения стержней, E_i, S_i, ρ_i - их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности) (i=1,2), R-сила упругого взаимодействия стержней.

Система (1) может быть сведена к одному уравнению относительно перемещения u_1. Для этого достаточно выразить u_2 из первого уравнения и подставить во второе уравнение системы. В результате получим:

$$\left(1+\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(C_2^2 + C_1^2\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho_1 S_1}{R}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - (C_2^2 + C_1^2)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + C_2^2 C_1^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) = 0 \tag{2}$$

Здесь $u = u_1(x,t)$, $C_1 = \sqrt{\dfrac{E_1}{\rho_1}}$, $C_2 = \sqrt{\dfrac{E_2}{\rho_2}}$ – скорости продольных волн в стержнях.

Заметим, что аналогичное уравнение может быть получено в модели Миндлина-Германа, описывающей продольные колебания стержня [2-4]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_1^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \kappa_2^2\dfrac{2\lambda}{H\rho}\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa_1^2 C_\tau^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa_2^2\dfrac{8(\lambda+\mu)}{H^2\rho}w + \kappa_2^2\dfrac{4\lambda}{H\rho}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь u(x,t), w(x,t) – продольные и поперечные перемещения частиц стержня, H – толщина стержня, ρ - плотность материала, $C_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda+\mu}{\rho}}$, $C_\tau = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ - скорости продольных и сдвиговых волн, λ, μ - константы Ламэ, κ_1, κ_2 - корректирующие коэффициенты, позволяющие увеличить частотный диапазон применимости модели. Система (3) сводится к одному уравнению относительно продольного смещения:

$$4\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4\left(C_1^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda}-\frac{\kappa_2^2\lambda}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{H^2\rho}{2\kappa_2^2\lambda}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}-\left(C_1^2+\kappa_1^2C_\tau^2\right)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+C_1^2\kappa_1^2C_\tau^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)=0 \qquad (4)$$

Таким образом, продольные колебания составного стержня можно описать уравнением Миндлина-Германа продольных колебаний некоторого гипотетического стержня, параметры которого выражаются через параметры исходных стержней следующим образом:

$$\begin{cases} 4\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda}=1+\dfrac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}, \\ 4\left(C_1^2\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda}-\dfrac{\kappa_2^2\lambda}{\rho}\right)=C_2^2+C_1^2\dfrac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}, \\ \dfrac{H^2\rho}{2\kappa_2^2\lambda}=\dfrac{\rho_1S_1}{R}, \\ \dfrac{H^2\rho}{2\kappa_2^2\lambda}\left(C_1^2+\kappa_1^2C_\tau^2\right)=\dfrac{\rho_1S_1}{R}\left(C_2^2+C_1^2\right), \\ \dfrac{H^2\rho}{2\kappa_2^2\lambda}\kappa_1^2C_\tau^2C_1^2=C_1^2C_2^2\dfrac{\rho_1S_1}{R}. \end{cases} \qquad (5)$$

Сведение к модели Миндлина-Германа возможно, если параметры составного стержня удовлетворяют условию $\rho_1S_1>3\rho_2S_2$, или (что тоже самое) $\frac{h_1}{h_2}>3\frac{\rho_1}{\rho_2}$, где $h_{1,2}$ - толщины стержней. Для совместности системы (5) необходимо также предположить равенство скоростей $C_1=C_1$, $\kappa_1C_\tau=C_2$ (или наоборот). В этом случае толщина эквивалентного стержня выражается соотношением $H=\sqrt{\frac{\left(C_1^2-C_2^2\right)R}{2\rho_1S_1}}$, которая будет увеличиваться с ростом силы упругого взаимодействия стержней по закону $\sqrt{R}$ и уменьшаться как $\frac{1}{\sqrt{\rho_1S_1}}$ с ростом погонной плотности первого стержня. Корректирующие коэффициенты в модели Миндлина-Германа связаны с параметрами исходных стержней зависимостями $\kappa_1^2=2\frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{\rho_1S_1-\rho_2S_2}{\rho_1S_1-3\rho_2S_2}$, $\kappa_2^2=\frac{C_1^2-C_2^2}{8C_1^2}\frac{\rho_1S_1-\rho_2S_2}{\rho_2S_2}$, что позволяет получить выражение для скорости волн сдвига в виде: $C_\tau=C_1\sqrt{2\frac{\rho_1S_1-3\rho_2S_2}{\rho_1S_1-\rho_2S_2}}$.

В частном случае, если считать плотность одного из стержней малой (пусть $\rho_2\to 0$), система уравнений (1) сводится к уравнению продольных колебаний стержня модели Бишопа:

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho\nu^2I_0\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+\mu\nu^2I_0\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0. \qquad (6)$$

Здесь ν - коэффициент Пуассона, I_0 - полярный момент инерции, а параметры эквивалентного стержня с параметрами исходных стержней связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \rho S = \rho_1 S_1 \\ ES = E_1 S_1 + E_2 S_2 \\ \rho \nu^2 I_0 = \dfrac{\rho_1 S_1 E_2 S_2}{R} \\ \mu \nu^2 I_0 = \dfrac{E_1 S_1 E_2 S_2}{R} \end{cases} \tag{7}$$

В этом случае параметры составного стержня должны удовлетворять условию $\dfrac{E_2}{E_1} > \dfrac{S_1}{S_2}$, а полярный радиус инерции и коэффициент Пуассона эквивалентного стержня определяются соотношениями $r_p = \dfrac{2E_1S_1}{E_2S_2 - E_1S_1}\sqrt{\dfrac{E_2S_2}{R}}$, $\nu = \dfrac{E_2S_2 - E_1S_1}{2E_1S_1}$. Скорости продольной и сдвиговой волн в стержне модели Бишопа выражаются через скорость продольной волны в исходном стержне $C_0 = \sqrt{C_1^2 + \dfrac{E_2S_2}{\rho_1 S_1}}$, $C_\tau = C_1$.

Известно (см., например, [6]), что энергия волн в диспергирующих системах переносится с групповой скоростью. Исследуем, сохраняется ли эта закономерность для слоистых элементов конструкций.

Система (1) может быть получена из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского с помощью уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right)} + \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)} - \dfrac{\partial L}{\partial u_1} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\right)} + \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)} - \dfrac{\partial L}{\partial u_2} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь лагранжиан L задается в виде:

$$L = \frac{\rho_1 S_1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 - \frac{E_1 S_1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\rho_2 S_2}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 - \frac{E_2 S_2}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 - \frac{R}{2}(u_1 - u_2)^2. \tag{9}$$

Уравнение переноса энергии (уравнение Умова-Пойнтинга), соответствующее (8), запишется в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

Здесь [3]

$$W=\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)-L\right) \quad (11)$$

– плотность энергии;

$$S=\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)+\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\right) \quad (12)$$

– плотность потока энергии.

Для лагранжиана (9) явный вид выражений (11), (12) следующий:

$$W=\frac{\rho_1 S_1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2+\frac{E_1 S_1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2+\frac{\rho_2 S_2}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2+\frac{E_2 S_2}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2+\frac{R}{2}(u_1-u_2)^2, \quad (13)$$

$$S=-E_1 S_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)-E_2 S_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right). \quad (14)$$

Скорость переноса энергии волн введем как отношение:

$$v_{эн}=\frac{<S>}{<W>}, \quad (15)$$

где в числителе стоит среднее значение плотности потока энергии, а в знаменателе – среднее значение плотности энергии.

Перемещения $u_1(x,t), u_2(x,t)$ считаем изменяющимися по закону бегущей гармонической волны:

$$u_1(x,t)=Ae^{i\theta}+A^*e^{-i\theta},\ u_2(x,t)=Be^{i\theta}+B^*e^{-i\theta}, \quad (16)$$

где A, B – комплексные амплитуды, A^*, B^*– их комплексно-сопряженные значения, $\theta=\omega t-kx$ – фаза волны, ω – круговая частота, k – волновое число.

Усреднение в (15) проведено по периоду изменения фазы гармонической волны

$(<S>=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(S)d\theta,\ <W>=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(W)d\theta)$.

Скорость переноса энергии, вычисленная по формуле (15), описывается выражением

$$v_{эн}=\frac{2E_1S_1\omega kR^2+2E_2S_2\omega k(-\rho_1S_1\omega^2+E_1S_1k^2-R)^2}{R^2(-\rho_1S_1\omega^2+3E_1S_1k^2-R)+(\rho_2S_2\omega^2+E_2S_2k^2+R)(-\rho_1S_1\omega^2+E_1S_1k^2-R)^2}, \quad (17)$$

в котором учтена связь между комплексными амплитудами *A* и *B*:

$$B=-\frac{(-\rho_1S_1\omega^2+E_1S_1k^2-R)A}{R}, \quad (18)$$

Частота и волновое число связаны законом дисперсии:

$$\omega=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2+C_2^2\right)+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)\pm\sqrt{k^4\frac{\rho_1^2S_1^2}{R^2}\left(C_1^2-C_2^2\right)^2+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)^2+2k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2-C_2^2\right)\left(1-\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}R}{\rho_1S_1}} \quad (19)$$

Это соотношение получается из (1) подстановкой решения в виде (16).
Групповую скорость $v_{гр}$ определим, продифференцировав (19) по волновому числу. Она равна:

$$v_{гр}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\left(k\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2+C_2^2\right)+\frac{2k^3\frac{\rho_1^2S_1^2}{R^2}\left(C_1^2-C_2^2\right)^2+\frac{2k\rho_1S_1\left(C_1^2-C_2^2\right)\left(1-\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}{R}}{\sqrt{k^4\frac{\rho_1^2S_1^2}{R^2}\left(C_1^2-C_2^2\right)^2+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)^2+2k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2-C_2^2\right)\left(1-\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}}\right)R}{\sqrt{\frac{\left\{k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2+C_2^2\right)+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)+\sqrt{k^4\frac{\rho_1^2S_1^2}{R^2}\left(C_1^2-C_2^2\right)^2+\left(1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)^2+2k^2\frac{\rho_1S_1}{R}\left(C_1^2-C_2^2\right)\left(1-\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}\right\}R}{\rho_1S_1}}\rho_1S_1}. \quad (20)$$

Если частоту, входящую в (17), заменить волновым числом по формуле (19), то убедимся, что $v_{эн}=v_{гр}$.

Таким образом, показано, что энергия упругих волн и по слоистым элементам конструкций переносится с групповой скоростью.

3. ВЯЗКО-УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ

Если в контакте действует как упругая сила, пропорциональная относительному перемещению, так и сила трения, пропорциональная относительной скорости перемещения частиц срединных линий стержней.

Движение стержней, согласно [8], описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} E_1S_1\dfrac{\partial^2u_1}{\partial x^2}=\rho_1S_1\dfrac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+R\left(u_1-u_2\right)+R_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial u_2}{\partial t}\right), \\ E_2S_2\dfrac{\partial^2u_2}{\partial x^2}=\rho_2S_2\dfrac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+R\left(u_2-u_1\right)+R_1\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\dfrac{\partial u_1}{\partial t}\right), \end{cases} \quad (21)$$

где u_i – продольные перемещения частиц срединных линий стержней, E_i, S_i, ρ_i $(i=1,2)$ – их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности), R, R_1 – коэффициенты упругого и вязкого взаимодействия стержней.

Система (21) может быть сведена к одному уравнению относительно перемещения одного из стержней, например u_1. Складывая оба уравнения системы (21), получаем связь в виде: $\rho_1S_1\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}-E_1S_1\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}=E_2S_2\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}-\rho_2S_2\frac{\partial^2u_{21}}{\partial t^2}$. Выразим также из первого уравнения $Ru_2+R_1\frac{\partial u_2}{\partial t}=\rho_1S_1\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}-E_1S_1\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}+Ru_1+R_1\frac{\partial u_1}{\partial t}$ и полученные соотношения подставим во второе уравнение системы. В результате получается уравнение относительно $u=u_1(x,t)$:

$$\left(1+\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(C_2^2+C_1^2\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\rho_1 S_1}{R}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}-(C_2^2+C_1^2)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}+\right.$$
$$\left.+C_2^2 C_1^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)+\frac{R_1}{R}\left(\left(1+\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\left(C_2^2+C_1^2\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right)=0. \qquad (22)$$

Здесь $\frac{R_1}{R}$ – коэффициент диссипации, $u=u_1(x,t), C_1=\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, C_2=\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}$ –скорости продольных волн в стержнях.

Заметим, что продольные колебания составного стержня можно описать уравнением Миндлина-Германа продольных колебаний некоторого гипотетического стержня:

$$4\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4\left(C_1^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda}-\frac{\kappa_2^2\lambda}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{H^2\rho}{2\kappa_2^2\lambda}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}-\left(C_1^2+\kappa_1^2 C_\tau^2\right)\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+C_1^2\kappa_1^2 C_\tau^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)+\chi\left(4\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-4\left(C_1^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda}-\frac{\kappa_2^2\lambda}{\rho}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\right)=0. \qquad (23)$$

Здесь $u(x,t)$ – продольные перемещения частиц стержня, H – толщина стержня, ρ - плотность материала, $C_1=\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\rho}}, C_\tau=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ - скорости продольных и сдвиговых волн, λ,μ - константы Ламэ, κ_1,κ_2 - корректирующие коэффициенты, позволяющие увеличить частотный диапазон применимости модели.

Параметры гипотетического стержня выражаются через параметры исходных стержней следующим образом:

$$\begin{cases} 4\frac{\lambda+\mu}{\lambda}=1+\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}, \\ 4\left(C_1^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda}-\frac{\kappa_2^2\lambda}{\rho}\right)=C_2^2+C_1^2\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}, \\ \frac{H^2\rho}{2\kappa_2^2\lambda}=\frac{\rho_1 S_1}{R}, \\ \frac{H^2\rho}{2\kappa_2^2\lambda}\left(C_1^2+\kappa_1^2 C_\tau^2\right)=\frac{\rho_1 S_1}{R}(C_2^2+C_1^2), \\ \frac{H^2\rho}{2\kappa_2^2\lambda}C_1^2\kappa_1^2 C_\tau^2=\frac{\rho_1 S_1}{R}C_2^2 C_1^2, \\ \chi=\frac{R_1}{R}, \\ \chi 4\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)=\frac{R_1}{R}\left(1+\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right), \\ \chi 4\left(C_1^2\frac{\lambda+\mu}{\lambda}-\frac{\kappa_2^2\lambda}{\rho}\right)=\frac{R_1}{R}\left(C_2^2+C_1^2\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}\right). \end{cases} \qquad (24)$$

Для анализа дисперсионных и диссипативных свойств волн перейдем в уравнении (22) к безразмерным переменным $t' = \frac{C_2^2\rho_2 S_2 + C_1^2\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1}\frac{t}{r}$, $x' = \frac{x}{r}$, $u' = \frac{u}{u_0}$, где u_0 - характерная амплитуда волны, $r = \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{(\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1)}\frac{\rho_1 S_1 \rho_2 S_2}{R}}$ - некоторый пространственный масштаб, $\varphi = \frac{C_1^2 + C_2^2(\rho_1 S_1)^2}{(\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1)(C_1^2 + C_2^2)}$ В результате уравнение (24) принимает вид (штрихи над безразмерными переменными опущены):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + d\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \varphi\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \delta\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right) = 0. \qquad (25)$$

В (25) входят два безразмерных параметра, один из них $d = \frac{(\rho_2 S_2 + \rho_1 S_1)C_1^2 C_2^2}{\left(C_2^2\rho_2 S_2 + C_1^2\rho_1 S_1\right)^2\left(C_2^2 + C_1^2\right)}$ определяет дисперсию, а $\delta = \sqrt{\frac{C_2^2\rho_2 S_2 + C_1^2\rho_1 S_1}{\left(C_2^2 + C_1^2\right)\rho_2 S_2 \rho_1 S_1 R}}R_1$ - диссипацию. Для дисперсионного параметра легко получить оценку, если воспользоваться неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим $\left(a + b > 2\sqrt{ab},\ (a, b > 0, a \neq b)\right)$. Очевидно, что параметр дисперсии $d < \frac{1}{2}$, а наличие диссипации приводит к тому, частота и волновое число линейной волны связаны комплексным дисперсионным соотношением:

$$\omega^2 - k^2 + \omega^2 k^2 - dk^4 - \varphi\omega^4 + i\delta\omega^3 - i\delta\omega k^2 = 0. \qquad (26)$$

Уравнение (26) является биквадратным относительно волнового числа k, разрешая которое, получим зависимость в виде:

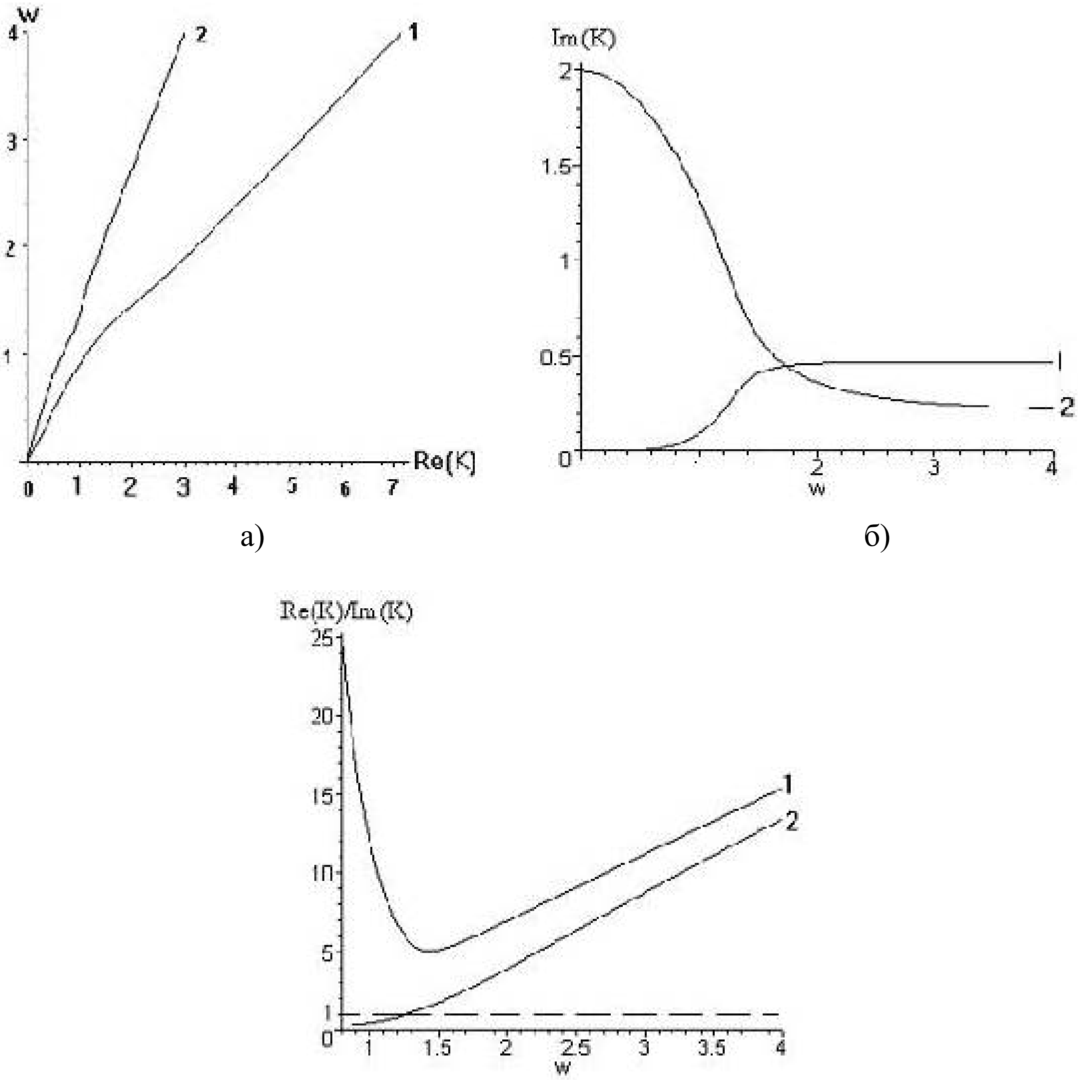
$$k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2d}}\left(\omega^2 - 1 - i\delta\omega \pm \sqrt{\left(\omega^2 - 1 - i\delta\omega\right)^2 - 4\varphi d\omega^4 + 4id\delta\omega^3 + 4d\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (27)$$

Из (27) видно, что волновое число является комплексным $k = k' + ik''$, где $k' = \mathrm{Re}(k)$, $k'' = \mathrm{Im}(k)$. Это означает, что волна имеет постоянную распространения k' и затухает по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания k''.

На дисперсионной плоскости (ω, k'), где k'- действительная часть комплексного волнового числа k, существуют две дисперсионные ветви, выходящие из начала координат. При этом одна ветвь в низкочастотном диапазоне приближается к прямой $\omega = k'$, а в высокочастотном – выходит на асимптоту $\omega = \sqrt{\frac{k'(k'+1) - \sqrt{(k')^2(1+4d) - 4\varphi}}{2\varphi}}$.

Вторая ветвь выходит из начала координат по прямой $\omega = \frac{2\sqrt{d}}{\delta}k'$, угол наклона которой уменьшается с ростом коэффициента диссипации δ. В высокочастотном диапазоне эта ветвь приближается к асимптоте $\omega = \sqrt{\dfrac{k'(k'+1)+\sqrt{(k')^2(1+4d)-4\varphi}}{2\varphi}}$, не зависящей от δ.

Качественный вид дисперсионных зависимостей $\omega(k')$ приведен на рис.1а при $d = 0{,}25;\delta = 0{,}1;\varphi = 0{,}5$.



а) б)

в)

Рис. 1. Дисперсионные характеристики вязко-упругой среды:
а – зависимость частоты от действительной части волнового числа; б – частотная зависимость мнимой части волнового числа; в – частотная зависимость отношения действительной части волнового числа к мнимой

На рис. 1б приведены зависимости мнимых частей k'' волнового числа k от частоты ω. На плоскости (k'',ω) также имеются две ветви, одна из которых выходит из начала координат и с увеличением частоты приближается к горизонтальной асимптоте $k'' = \dfrac{\delta(1-p^2)}{2p(2dp^2-1)}$, где $p = \dfrac{\sqrt{2\varphi}}{\sqrt{k'(k'+1)+\sqrt{(k')^2(1+4d)-4\varphi}}}$. Вторая ветвь k'' выходит из точки $\omega = 0,\ k'' = \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$ и убывает с ростом частоты, приближаясь к горизонтальной асимптоте $k'' = \dfrac{\delta\left(1-p_1^2\right)}{2p_1\left(2dp_1^2-1\right)}$, где $p_1 = \dfrac{\sqrt{2\varphi}}{\sqrt{k'(k'+1)-\sqrt{(k')^2(1+4d)-4\varphi}}}$. Таким образом, в низкочастотном диапазоне коэффициент затухания k'' зависит от частоты волны, а в высокочастотном диапазоне затухание становится частотно-независимым, так как в этом случае усиливается влияние дисперсионных эффектов.

На рис.1в приведены частотные зависимости отношения $\mathrm{Re}(k)/\mathrm{Im}(k)$. Неравенству $\dfrac{\mathrm{Re}(k)}{\mathrm{Im}(k)} > 1$ соответствуют области частот, где процесс распространения волны преобладает над процессом ее затухания.

В частном случае, при $\delta = 0$ из (27) получаем решение дисперсионного уравнения :

$$k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2d}}\left(\omega^2 - 1 \pm \sqrt{\left(\omega^2-1\right)^2 - 4\varphi d\omega^4 + 4d\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (28)$$

В этом случае на дисперсионной плоскости (ω, k) существуют две дисперсионные ветви, одна из которых выходит из начала координат и имеет асимптоту $\omega = k$ в низкочастотном диапазоне, а при больших частотах выходит на асимптоту $\omega = \sqrt{\dfrac{k(k+1)-\sqrt{k^2(1+4d)-4\varphi}}{2\varphi}}$ (рис.2).

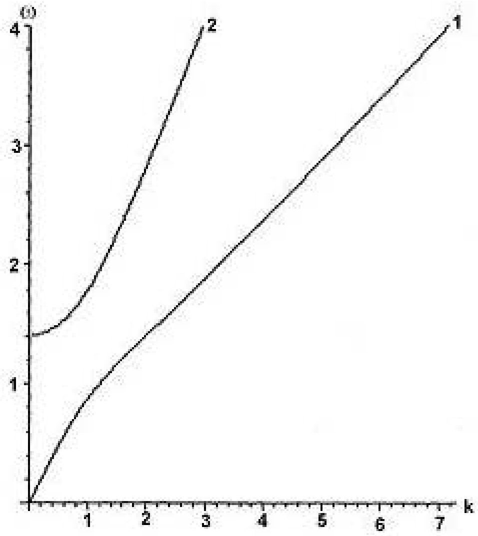


Рис. 2. Дисперсионные характеристики упругой среды

Вторая дисперсионная ветвь появляется при частотах $\omega \geq \sqrt{2}$, что соответствует в размерных переменных значению $\omega \geq 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{I}}$. В высокочастотном диапазоне асимптотическое решение имеет вид: $\omega = \sqrt{\dfrac{k(k+1)+\sqrt{k^2(1+4d)-4\varphi}}{2\varphi}}$.

Сравнение дисперсионных зависимостей в обоих случаях показывает, что диссипация оказывает влияние на дисперсионные свойства волн только в низкочастотном диапазоне. В высокочастотном диапазоне диссипация не проявляется, так как дисперсионные ветви при $\delta = 0$ и при $\delta \neq 0$ выходят на одинаковые асимптоты.

Таким образом, на примере двухслойного стержня, совершающего продольные колебания, показано, что уточненная стержневая модель Миндлина-Германа может быть применена для описания динамических процессов в слоистых вязко-упругих элементах конструкций.

4. НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ

Если в каждом из стержней учесть геометрическую и физическую нелинейности, то динамика системы будет описываться уравнениями:

$$\begin{cases} E_1S_1\left(1+\alpha_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \rho_1 S_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + R(u_1-u_2) \\ E_2S_2\left(1+\alpha_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \rho_2 S_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + R(u_2-u_1) \end{cases} \tag{29}$$

где u_i – продольные перемещения стержней, E_i, S_i, ρ_i - их параметры (модули Юнга, площади поперечных сечений и плотности) (i=1,2), R – коэффициент, характеризующий силу упругого взаимодействия стержней, $\alpha_{1,2}$ - коэффициенты, характеризующие их геометрические и физические нелинейности.

Система (29) может быть сведена к одному уравнению. Действительно, введём безразмерные переменные

$$U=\frac{u}{u_0};\ y=\frac{x}{X};\ \tau=\frac{t}{T};\ \ \gamma=1+\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2},$$

обозначения

$$D=C_2^2+C_1^2\frac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2};\ X=\Lambda;\ T^2=\frac{\Lambda^2\gamma}{D},$$

где u_0 – перемещение, Λ – длина волны, удовлетворяющие соотношению $u_0/\Lambda = 10^{-4}$, T – период волны

и пренебрегая величинами, в которых степень отношения u_0/Λ выше 3, получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\rho_1S_1D}{R\gamma^2\Lambda^2}\frac{\partial^4 U}{\partial\tau^4}-\frac{\rho_1S_1(C_2^2+C_1^2)}{R\gamma\ \Lambda^2}\frac{\partial^4 U}{\partial y^2\partial\tau^2}+\frac{\rho_1S_1C_2^2C_1^2}{R\Lambda^2D}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}-$$
$$-\frac{\left(C_2^2\alpha_2+C_1^2\alpha_1\dfrac{\rho_1S_1}{\rho_2S_2}\right)}{D}\frac{u_0}{\Lambda}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \tag{30}$$

Здесь: $C_1=\sqrt{\dfrac{E_1}{\rho_1}}, C_2=\sqrt{\dfrac{E_2}{\rho_2}}$ – скорости продольных волн в стержнях.

Решение уравнения (30) будем искать в классе стационарных волн, то есть в виде функции U=U(y–vτ), зависящей от y–v$\tau=\xi$, где v=const – скорость стационарной волны.

Уравнение в частных производных (30) сведется в этом случае к уравнению ангармонического осциллятора относительно продольной деформации $\frac{dU}{d\xi} = w$:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + aw + bw^2 = 0, \qquad (31)$$

где

$$a = \frac{v^2 - 1}{B};$$

$$b = -\frac{1}{2}\frac{C_2^2\alpha_2 + C_1^2\alpha_1\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2}}{BD}\frac{u_0}{\Lambda},$$

$$B = \frac{\rho_1 S_1 D}{R\gamma^2\Lambda^2}v^4 - \frac{\rho_1 S_1(C_2^2 + C_1^2)}{R\gamma\ \Lambda^2}v^2 + \frac{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}{RD\Lambda^2}.$$

Заметим, что корни уравнения B=0 имеют вид:

$v_1^2 = \frac{C_2^2\gamma}{D}$; $v_2^2 = \frac{C_1^2\gamma}{D}$. Они, в частности, могут удовлетворять условию $\frac{C_2^2\gamma}{D} = 5 - 4\frac{C_1^2\gamma}{D}$ определенности считаем, что $C_1 > C_2$). В этом случае $0 < \frac{C_2^2\gamma}{D} < 1$; $1 < \frac{C_1^2\gamma}{D} < \frac{5}{4}$, тогда $0 < v_1^2 < 1$; $1 < v_2^2 < \frac{5}{4}$.

Также определим знаки корней: между корней(-): $\frac{C_2^2\gamma}{D} < v^2 < \frac{C_1^2\gamma}{D}$; вне корней(+): $v^2 > \frac{C_1^2\gamma}{D}, v^2 < \frac{C_2^2\gamma}{D}$.

Анализ (31) показывает, что частными решениями уравнения (30) являются нелинейные уединенные стационарные волны (солитоны).

В первом случае a<0, b>0 и солитон имеет положительную полярность. Амплитуда солитона A_c и его ширина Δ описываются выражениями:

$$A_c = \frac{3(v^2 - 1)D}{(C_2^2\alpha_2 + C_1^2\alpha_1\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2})\frac{u_0}{\Lambda}}; \qquad \Delta = \frac{2}{\sqrt{\frac{v^2 - 1}{B}}}$$

На рис.3 приведены зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости.

В данном случае с ростом скорости уединенной стационарной волны ее амплитуда возрастает, а ширина уменьшается. Такое поведение характерно для классического солитона [9].

Во втором случае a<0, b<0 и солитон имеет отрицательную полярность. Его амплитуда и ширина описываются выражениями:

$$A_c = \frac{3(1 - v^2)D}{(C_2^2\alpha_2 + C_1^2\alpha_1\frac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2})\frac{u_0}{\gamma\Lambda}}; \qquad \Delta = \frac{2}{\sqrt{\frac{1 - v^2}{B}}}$$

Зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости приведены на рис.4.

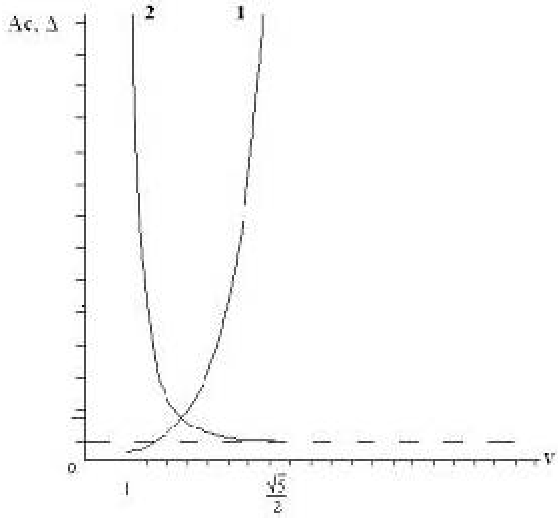


Рис. 3. Зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона положительной полярности от его скорости.

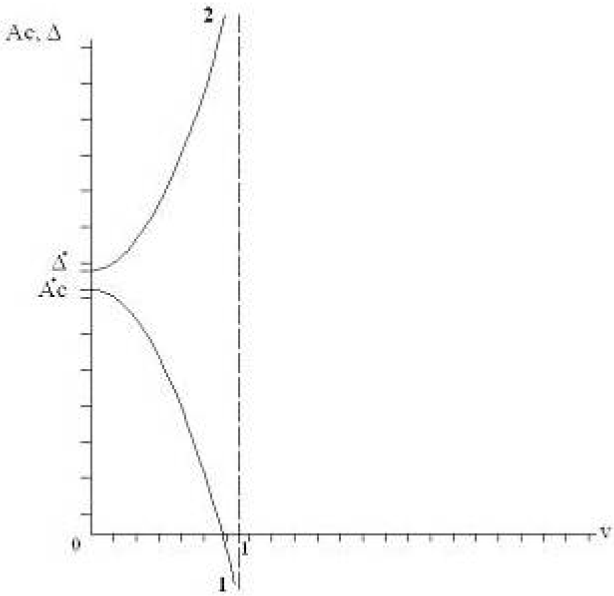


Рис. 4 Зависимость амплитуды (кривая 1) и ширины (кривая 2) солитона отрицательной полярности от его скорости.

Здесь $A_c^* = \dfrac{3D}{(C_2^2\alpha_2 + C_1^2\alpha_1 \dfrac{\rho_1 S_1}{\rho_2 S_2})\dfrac{u_0}{\gamma\Lambda}}$; $\Delta^* = \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{RD\Lambda^2}{\rho_1 S_1 C_2^2 C_1^2}}}$

В этом случае с ростом скорости уединенной стационарной волны одновременно увеличивается и ее амплитуда, и ширина. Такое поведение не характерно для классического солитона и является аномальным.

Таким образом, в работе показано, что в составном нелинейно-упругом стержне могут формироваться локализованные волны (солитоны) деформации, имеющие как отрицательную, так и положительную полярность.

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01637).

Список литературы

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
3. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Наука, Физматлит. 2002. 208 с.
4. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах/ Ред. совет: К.В. Фролов (пред.) – М.: Машиностроение. Т1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. И доп./ Под ред. В.В Болотина. 1999. 504с.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
7. Товстик П.Е., Товстик Т.П. Распространение волн по сотавному стержню // Волновая динамика машин и конструкций. Материалы Всероссийской конференции, посвященной памяти А.И. Весницкого. Н.Новгород: Изд. «ТИРАСП», 2004. С.110.
8. Товстик Т.П. Распространение продольных волн по двухслойному стержню // Моделирование динамических систем: сборник научных трудов. Н.Новгород: Изд-во «Интелсервис». 2011. с.91-98.
9. Ерофеев В.И., Клюева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор)// Акустический журнал. 2002. Т.48, № 6. С.725-740.