

УДК 535

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА С УЧЕТОМ ОСОБОГО ПОЛОЖЕНИЯ

© Крейнин Г.В.¹⁾, Мисюрин С.Ю.^{1,2)}, Нелюбин А.П.¹⁾¹⁾Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН²⁾Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (National Research Nuclear University «MEPhI»)ssmmrr@mail.ru

В статье предложен метод численного решения задачи о положении пространственного многозвенного механизма на примере 5-рычажного механизма подвески автомобиля. Рассматриваются кинематические характеристики этой подвески, влияющие на качество работы всего механизма управления автомобилем. Метод представляет собой модификацию многомерного метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений. Проблема получения численного решения в окрестности особого положения решается при помощи регуляризации.

Ключевые слова: механизм, кинематика, численное решение, особые положения, подвеска автомобиля.

Введение

Подвески с несколькими соединениями – последнее достижение в дизайне автомобильного шасси. Многорычажные подвески могут обеспечить компромисс между управляемостью, комфортом и габаритами. Они имеют высокую жесткость в боковом направлении и достаточную податливость в продольном направлении. Такая подвеска позволяет обеспечить приемлемую вертикальность хода колеса, наилучший контакт с дорожным покрытием; имеет хорошие показатели управляемости за счет снижения нежелательных эффектов, возникающих при разгоне и торможении; имеет малые габариты и вес (некоторые звенья подвергаются только силам растяжения-сжатия и могут быть изготовлены из алюминия). Впервые 5-рычажная (5-звенная) подвеска была запатентована Mercedes Benz в конце 1980-х. С тех пор многозвенные подвески все стали все чаще и чаще использоваться на современных седанах и купе, как на задней, так и на передней оси. Ее конструкция не определена точно и различается в разных моделях. В этой статье будет рассматриваться конструкция подвески Honda Accord, которая является развитием подвески типа double wishbone.

Численное моделирование движения подвески автомобиля позволяет автоматизировать ее проектирование и сокращать число натурных экспериментов. Например, в [1] был смоделирован маневр смены полосы движения для оптимизации критериев комфорта и управляемости. В [2, 3] J.Кнарczyk и M.Maniowski оптимизировали эластокинематические и динамические характеристики 5-рычажной подвески. Существует множество моделей систем подвесок автомобиля. Например, в [4] предлагается аналитическая плоская модель подвески Макферсона, учитывающая как кинематику, так и динамику механизма. Однако 5-рычажные подвески более сложны и вряд ли удастся построить их модель в аналитическом виде.

В этой статье рассмотрим некоторые важные кинематические характеристики подвески автомобиля, такие как углы схождения и развала, продольные и поперечные смещения [5, 6]. Значения этих характеристик и их изменений при ходах сжатия и отбоя влияют на управляемость, курсовую устойчивость автомобиля, комфорт, износ шин и т.д.

При кинематическом анализе механизма подвески требуется решить систему полиномиальных уравнений. В [7] M.Raghavan и B.Roth сделали обзор трех точных

вычислительных методов для решения таких систем. Это базис Грёбнера (аналитический), полиномиальное продолжение (численный) и диалетическое удаление (гибридный). Процедура диалетического удаления очень полезна только для задач небольшой размерности, до 6 переменных. Недостатком метода построения базиса Грёбнера является большой объем вычислений из-за большого числа генерируемых промежуточных полиномов.

Тем не менее, в [8] M.Uchida и J.McPhee удалось построить базис Грёбнера для триангуляризации уравнений кинематических ограничений. Их подход был применен к платформе Стюарта-Го и к 5-звенной подвеске. Поскольку эти механизмы топологически схожи, разумно рассмотреть их одновременно. Хотя предварительная генерация базиса Грёбнера и привлекательна с точки зрения приложений реального времени, она требует вычислительных затрат и индивидуального подхода к каждой задаче.

В [9] Y.A.Paregaу и др. Использовали интервальный анализ для построения всех возможных траекторий, соответствующих заданному диапазону значений свободного параметра. Они показали, что вычислять аналитические выражения для выходных параметров не практично, даже для простейшего механизма Макферсона.

В этой статье опишем метод расчета кинематических характеристик, следуя по траектории механизма подвески между ходом сжатия до отбоя. Систему полиномиальных уравнений, возникающую при анализе кинематики 5-рычажного механизма, будем решать численно с помощью многомерного метода Ньютона. Это стандартный подход при следовании по траектории механизма, так как мы можем использовать результаты, полученные на предыдущем шаге траектории в качестве начального приближения метода Ньютона на следующем шаге.

Кинематические характеристики

По заданному ходу подвески определяются координаты ее характерных точек, через которые выражаются различные кинематические характеристики подвески, такие как углы схождения и развала колеса, продольное и поперечное смещения.

Развал γ применяется для улучшения бокового сцепления колес с поверхностью при прохождении поворотов. Наилучшая зависимость угла развала от хода подвески следующая: при ходе сжатия s_1 угол развала должен быть как можно меньше, а при ходе отбоя s_2 как можно больше [5]:

$$K_1 = \gamma(s_2) - \gamma(s_1) \rightarrow \max.$$

При положительном схождении δ на колеса во время движения действуют стабилизирующие боковые силы. При этом для устойчивости желательным является как можно меньшее изменение угла схождения [5]:

$$K_2 = \Delta\delta \rightarrow \min.$$

Здесь и далее символом Δ обозначается разность между максимальным и минимальным значениями соответствующей величины на всем диапазоне хода подвески.

База L и колея b колес влияют на маневренность, курсовую устойчивость, проходимость [5, 6]. Минимальные изменения колеи (поперечное смещение), базы (продольное смещение), а также угла схождения способствуют не только лучшей управляемости, но и меньшему износу шин:

$$K_3 = \Delta b \rightarrow \min, \quad K_4 = \Delta L \rightarrow \min.$$

Все эти индексы могут быть использованы в качестве критериев оптимальности при настройке параметров проектирования на стадии синтеза.

Рассмотрим кинематическую схему 5-рычажной подвески, изображенную на рис. 1. Система координат $Oxyz$ связана с корпусом автомобиля, а ее начало помещено в центре колеса в конструктивном положении (нулевой ход колеса). Так что координаты креплений A_0, B_0, C_0, D_0 и F_0 подвески к корпусу автомобиля фиксированы. Все 5 рычагов имеют постоянные длины. Ось вращения ON колеса и носитель колеса (подвижная платформа)

$ABCDF$ считаются одним твердым телом. Точка E – точка контакт колеса с поверхностью дороги. Эта система имеет 1 степень свободы, задаваемую вертикальной координатой $z_O = s$ (ход подвески) центра колеса O .

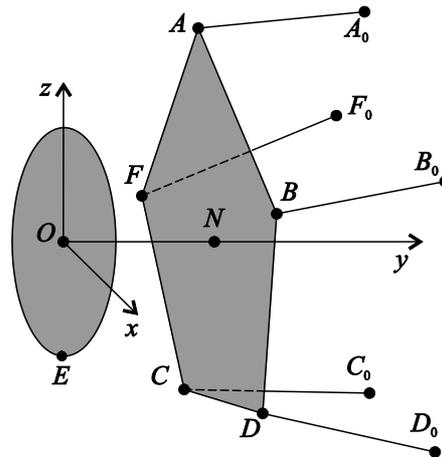


Рис. 1. Кинематическая схема 5-рычажной подвески.

Искомые кинематические характеристики могут быть выражены следующим образом:

$$tg\gamma = \frac{z_N - z_O}{\sqrt{(x_N - x_O)^2 + (y_N - y_O)^2}}; \quad tg\delta = \frac{x_N - x_O}{y_N - y_O}; \quad \Delta b = \Delta y_E; \quad \Delta L = \Delta x_E. \quad (1)$$

Для нахождения их изменений на всем ходе подвески будем следовать по траектории механизма от его начального положения ($s = 0$) к максимальному ходу сжатия ($s_1 = 100$ мм), а затем к максимальному ходу отбоя ($s_2 = -100$ мм) с шагом 1 мм. Примерные начальные координаты (в мм) вершин рассматриваемого механизма Уатта в 5-рычажной подвеске Honda [10] представлены в Таблице 1.

Таблица 1

	A_0	B_0	C_0	D_0	F_0	A	B	C	D	F
x	304	159,6	-353,4	-53,2	-60,8	22,8	159,6	-110,2	-53,2	-60,8
y	370,5	497,8	418	418	380	87,4	163,4	106,4	76	121,6
z	180	20	-30	-45	195	200	20	-50	-50	210

Эти параметры в начальном положении определяют конструкцию механизма и его траекторию. Эта конструкция может быть использована в качестве прототипа в процедурах синтеза и оптимизации.

Численное решение задачи кинематики

Процедура следования по траектории требует решения прямой задачи кинематики: по заданному ходу s найти положение механизма подвески, т.е. координаты точек O, E, N, A, B, C, D и F . При этом достаточно найти координаты точек O, A, B, C, D, F , а затем независимо вычислить координаты точек E и N . Таким образом, необходимо найти 17 неизвестных координат, решая систему из 17 нелинейных ограничений на постоянство длин $A_0A, AB, B_0B, AC, BC, C_0C, AD, BD, CD, D_0D, AF, BF, CF, F_0F, AO, BO, CO$. Пронумеруем эти ограничения в том же порядке, что и перечисленные длины. Выпишем лишь часть из них:

$$f_1(x_A, y_A, z_A) = \frac{1}{2}((x_A - x_{A_0})^2 + (y_A - y_{A_0})^2 + (z_A - z_{A_0})^2 - |A_0A|^2) = 0;$$

$$f_2(x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B) = \frac{1}{2}((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - |AB|^2) = 0; \quad (2)$$

...

$$f_{17}(x_C, y_C, z_C, x_O, y_O) = \frac{1}{2}((x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2 + (z_O - z_C)^2 - |CO|^2) = 0;$$

Множитель $\frac{1}{2}$ введен для удобства дальнейших вычислений. Каждая нелинейная функция f_i , $i = 1, \dots, 14$ зависит от 3 или 6 неизвестных координат (последние 3 функции будут зависеть от 5 неизвестных, так как $z_O = s$ задано).

Решим систему (2) численно с помощью многомерного метода Ньютона [11, 12]. Это итеративная процедура, вычисляющая последовательные приближения к решению. Естественно использовать предыдущее положение механизма на траектории в качестве начального приближения $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{17}^0)$. Каждое следующее приближение x^{k+1} находят путем решения уже линейной системы алгебраических уравнений (далее СЛАУ):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{17} J_{1i}(\bar{x}^k) z_i = -f_1(\bar{x}^k) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{17} J_{17i}(\bar{x}^k) z_i = -f_{17}(\bar{x}^k) \end{cases}, \quad (3)$$

где $J_{ji}(\bar{x}^k) = \frac{\partial f_j(\bar{x}^k)}{\partial x_i^k}$, $i, j = 1, \dots, 17$ - элементы матрицы Якоби системы (2). Решением СЛАУ

(3) является вектор приращений z , так что:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k + \bar{z}.$$

Проверка в общем виде условий сходимости метода очень трудоемка, поэтому на практике ограничиваются более простым правилом. Итерационный алгоритм завершается, когда погрешность не превосходит заданное малое число ε . Используем следующее правило:

$$\max_{i=1, \dots, 17} (|z_i|) < 0,05 \text{ мм}. \quad (4)$$

Если алгоритм не сходится, то должно быть предусмотрено максимальное число итераций K , при достижении которого алгоритм принудительно завершается. Такое возможно рядом с особыми положениями [9, 13, 14], где две или более траекторий проходят рядом друг с другом. В таких областях матрица Якоби J плохо обусловлена или вырождена (singular). В [9] авторы использовали теорему Канторовича для того, чтобы обеспечить сходимость решения методом Ньютона к той же ветви траектории. В нашей работе для этих целей используется техника регуляризации по Тихонову. В отличие от [9], нам не нужно находить все ветви траекторий, а только ту, что соответствует начальному положению механизма. А если две или более ветви пересекаются, то такую конструкцию следует исключить из рассмотрения при проектировании.

Для построения матрицы Якоби системы (2) достаточно вычислить только 3 частные производные функций f_i , $i = 1, \dots, 17$, так как, например ($i = 2$):

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_A} = x_B - x_A = -\frac{\partial f_2}{\partial x_B}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_A} = -\frac{\partial f_2}{\partial y_B}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z_A} = -\frac{\partial f_2}{\partial z_B}.$$

Поэтому обозначим через J'_{i1} , J'_{i2} , J'_{i3} , $i = 1, \dots, 17$ частные производные функции f_i по координатам той точки, которая расположена второй в перечисленных выше отрезках. Например ($i = 2$):

$$J'_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_B} = x_B - x_A, \quad J'_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y_B} = y_B - y_A, \quad J'_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial z_B} = z_B - z_A.$$

Тогда 17×17 матрица J СЛАУ (3) будет определяться всего 17×3 числами. Приведем только часть этой матрицы:

$$J = \begin{bmatrix} J'_{11} & J'_{12} & J'_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -J'_{21} & -J'_{22} & -J'_{23} & J'_{21} & J'_{22} & J'_{23} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & J'_{31} & J'_{32} & J'_{33} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -J'_{41} & -J'_{42} & -J'_{43} & 0 & 0 & 0 & J'_{41} & J'_{42} & J'_{43} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -J'_{51} & -J'_{52} & -J'_{53} & J'_{51} & J'_{52} & J'_{53} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J'_{61} & J'_{62} & J'_{63} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5)$$

Как видим, эта матрица достаточно разрежена: в каждой строке из 17 элементов только 3-6 ненулевые. И даже эти числа могут обнулиться, если какие-то две точки окажутся на одной оси. Тем не менее, из-за большой размерности искать формулы для решения в явном виде (например, с помощью программ MAPLE, MATHCAD и др.) не представляется эффективным. К такому же выводу пришли и авторы [9]. Поэтому необходимо использовать численные методы.

Приближенные численные методы используются, когда применение точных методов затруднено или невозможно, например когда порядок системы – тысячи переменных. В случае, когда число переменных не превышает $10^2 - 10^3$, используют прямые методы [12]. Среди точных методов мы выбрали метод Гаусса из-за его эффективности с вычислительной точки зрения [11]. Для обеспечения устойчивости метода используем его модификацию с выделением главного элемента по столбцу. При этом в каждом рассматриваемом столбце матрицы в качестве главного элемента выбирается элемент с наибольшим абсолютным значением.

Метод Гаусса также позволяет найти ранг матрицы J , поэтому мы можем проверить совместность СЛАУ в процессе решения. По теореме Кронекера-Капелли, СЛАУ (3) имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы J совпадает с рангом расширенной матрицы $[J|f]$. В нашем случае матрица J квадратная, поэтому в невырожденном случае ($\det J \neq 0$) существует единственное решение СЛАУ (3).

Это условие выполнялось на всей траектории конструкции прототипа с начальными координатами из Таблицы 1. Весь вычислительный процесс следования по траектории занял 0.5 секунд на процессоре Core Duo 1.6 ГГц. На каждом из 200 шагов потребовалось не более 2 итераций метода Ньютона, прежде чем срабатывало правило остановки (4). Максимальное отклонение длин звеньев подвески не превышало 10^{-9} мм, что можно объяснить ошибками округления. Итоговые значения кинематических характеристик:

$$\gamma(s_2) - \gamma(s_1) = 0.16^\circ, \Delta\delta = 0.0075^\circ, \Delta b = 46.9 \text{ мм}, \Delta L = 12.8 \text{ мм}.$$

При тестировании алгоритма на других конструкциях механизма иногда мы сталкивались с проблемой, при которой в некоторых положениях матрица J оказывалась плохо обусловленной ($|\det J| \ll 1$) или даже вырожденной ($\det J = 0$). СЛАУ (3) при этом всегда была совместна, т.е. недоопределена. В вырожденном случае существует бесконечное число решений. И хотя плохо обусловленная СЛАУ имеет одно решение, на практике не имеет смысла его находить. Эти проблемы возникали в зонах особых положений механизма. Одним из путей их решения является исключение из рассмотрения таких конструкций механизма. Если все же требуется найти решение в таких положениях, то можно использовать метод регуляризации по Тихонову [15].

Поскольку СЛАУ недоопределена, то регуляризация дает некоторое преимущество одному из решений z_0 , обладающему определенными свойствами. В нашей задаче целесообразно минимизировать норму вектора приращений z . Следовательно, положим $z_0 = 0$. В функционал минимизации невязки добавляется регуляризационный член:

$$\Omega(\bar{z}, \lambda) = \|J\bar{z} + \bar{f}\|^2 + \lambda \|\bar{z} - \bar{z}_0\|^2.$$

Регуляризация улучшает обусловленность СЛАУ, обеспечивая существование единственного решения. Новая СЛАУ записывается следующим образом:

$$(J^T J + \lambda I)\bar{z} = -J^T \bar{f} + \lambda \bar{z}_0.$$

При $\lambda \rightarrow 0$ она переходит в начальную плохо обусловленную систему, а при больших λ , будучи хорошо обусловленной, имеет решение z_0 . Очевидно, оптимальным будет некоторое промежуточное значение λ , устанавливающее определенный компромисс между приемлемой обусловленностью и близостью к исходной задаче. В наших экспериментах приемлемые результаты были получены при значениях λ , находящихся в интервале 0.001 – 0.002.

Заключение

В этой статье была проанализирована кинематика 5-рычажного механизма подвески автомобиля с целью вычисления следующих кинематических характеристик: углы схождения и развала, продольное и поперечное смещения. Для этого численно решалась система из 17 нелинейных уравнений с 17 неизвестными многомерным методом Ньютона с регуляризацией. Этот подход универсален и достаточно эффективен для решения подобных задач.

Изменения выбранных кинематических характеристик на всем ходе подвески оказывают влияние на эксплуатационные свойства всего механизма управления автомобиля. Поэтому предложенный подход может быть использован для оптимизации параметров подвески с учетом описанных кинематических характеристик.

Отметим, что для получения более точных характеристик подвески целесообразно учесть в математической модели динамическое влияние гидро- (пневмо-) амортизаторов. Однако при этом мы сильно усложняем всю модель в целом. В работах [16-18] рассмотрен метод поэтапного нарастания сложности математической модели динамической системы манизм – привод (пневмо, гидро). Этот метод применим и для подвески автомобиля.

Список литературы

1. *Samin J.C., et al.* Multiphysics modeling and optimization of mechatronic multibody systems // *Multibody System Dynamics*, 2007.
2. *Кнапczyk J., Maniowski M.* Elastokinematic Modeling and Study of Five-Rod Suspension with Subframe // *Mechanism and Machine Theory*, 2006, vol. 41, pp. 1031-1047.
3. *Кнапczyk J., Maniowski M.* Optimization of 5-rod Car Suspension for Elastokinematic and Dynamic Characteristics // *The Archive of Mechanical Engineering*, 2010. Vol. 42, No. 2, pp. 133 – 147.
4. *Hurel J., Mandow A., García-Cerezo A.* Kinematic and dynamic analysis of the McPherson suspension with a planar quarter-car model // *Vehicle System Dynamics*, 2013, vol. 51, no. 9, pp. 1422–1437.
5. *Reimpell J.* Fahrwerktechnik: Radaufhängungen. – Vogel-Buchverlag, Würzburg, 1986. — 328 p.
6. *Литвинов А.С., Фаробин Я.Е.* Автомобиль. Теория эксплуатационных свойств. — М.: Машиностроение, 1989. — 238 с.
7. *Raghavan M., Roth B.* Solving polynomial systems for the kinematic analysis and synthesis of mechanisms and robot manipulators // *Journal of Mechanical Design*, 1995. №117 pp. 71–79.
8. *Uchida T., McPhee J.* Efficient Solution of Kinematics for Multi-loop Mechanisms using Grobner Bases // *Proceedings of the 13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Guanajuato, Mexico, 19-25 June, 2011.
9. *Papagay Y.A., Merlet J-P., Daney D.* Exact kinematics analysis of car's suspension mechanisms using symbolic computation and interval analysis. *Mechanism and Machine Theory*, 40:395–413, 2005.
10. Honda Worldwide site – <http://world.honda.com/news/1997/t970702b.html>
11. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
12. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

13. *Лунев В.В., Мисюрин С.Ю.* Особые многообразия плоских и пространственных механизмов с несколькими степенями свободы. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1993. № 1, с. 102-109.
14. *Мисюрин С.Ю., Ивлев В.И., Косарев А.А., Костин А.В.* Определение границ мертвых положений в механизмах с одной и несколькими степенями свободы. // Проблемы машиностроения и автоматизации (engineering & automation problems). ISSN 0234-6206 2008. № 3, с. 50-54.
15. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1990. — 230 с.
16. *Krein G.V., Misyurin S.Yu.* On Some General Laws in Drive Dynamics // Journal of Machinery Manufacture and Reliability (ISSN 1052-6188), 2008, Vol. 37, No.6, pp.546-551.
17. *Krein G.V., Misyurin S.Yu., Yashina M.A.* Synthesis of a Positioning System With a Hydrodrive, a Motion Transmission Mechanism With variable Transfer Ratio, and a Combined Load // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2004, No. 5, pp.1-7.
18. *Krein G.V., Misyurin S.Yu.* Influence of the Gear Ratio on the Dynamics of a Control-System Drive // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2012, Vol. 41, No. 6, pp. 486-491.