www.vntr.ru №9 (85), 2014 г.

УДК 534

РАСЧЕТ АВТОРЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

© Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук

krupeninster@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена авторезонансная виброударная система, функционирующая в условиях внешнего случайного воздействия. Приведена необходимая методика расчета, опирающаяся на классические результаты и основанная на определении флуктуационных поправок к решениям, получаем методом усреднения. Получены расчетные соотношения. Приведены примеры расчетов, которым дана механическая трактовка.

Ключевые слова: *датчик импульсов удара, автоколебания, случайный процесс, флуктуационная поправка, белый шум,уравнение Ито, уравнение Ланжевена, периодическая функция Грина, спектральная плотность, переменные «импульс-фаза».*

THE CALCULATION OF THE SELF-RESONANT SYSTEM WHEN THE INFLUENCE OF RANDOM FORCES

© Vitaly L. Krupenin

Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia

krupeninster@gmail.com

Abstract. Considered autoresonant vibro-impact system operating under external accidental exposure. The required calculation methodology based on classical results and used on the determination of the fluctuation corrections to the solutions obtained by average technique. Calculated ratio. Examples of calculations, which is given a mechanical interpretation

Keywords: *sensor of impagt pulses, self- oscillations, random process, the fluctuation correction, white noise, the Ito equation, the Langevin equation, the periodic Green's function, spectral density, variables "pulse- phase".*

1. Проведем расчет одной авторезонансной системы со специфический обратной связью [1 - 3]. Рассмотрим устройство, изображенное на рис.1. Ударный осциллятор соударяется с неподвижный ограничитель 2, на котором установлен датчик импульсов удара, формирующий сигнал, пропорциональный *J.* Предположим, что зазор является малой величиной ($\Delta=\varepsilon\Delta_1>0$) и задача становится квазиизохронной [1, 2] (виброударная система с нулевым зазором оказывается изохронной с частотой 2Ω). На рис 1 показана схема анализируемой системы: ограничитель 2, на котором установлен датчик импульсов удара, формирующий сигнал, пропорциональный *J.* Этот сигнал преобразуется в некоторую функцию $\varepsilon K(J)$, которая .после перемножения с сигналом x_t, поступающим с датчика " скорости 1, подается на возбудитель колебаний *4*.

Считая, что потери энергии при ударе описываются коэффициентом восстановления R ($1 — R = \varepsilon r$) и преобразователи работают безынерционно, уравнение движения запишем в виде

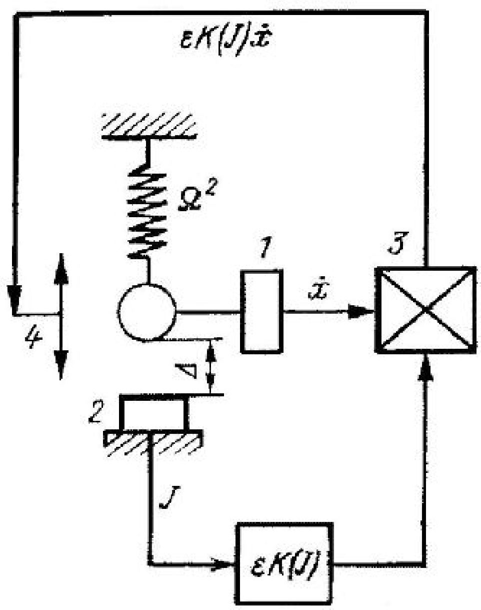

Рис.1.

$$x_{tt} + \Omega^2 x+\Phi(x-\Delta,x_t)=-\varepsilon[\Phi_2(x,x_t)+K(J)x_t +2bx_t], \qquad (1)$$

причем нижняя индексация по независимой переменной обозначает операцию дифференцирования, а функция $\Phi_2(x,x_t)$ – выражает потери энергии при ударах. Примем для определенности $K(J)=K_0 J^{-1}$, $K_0>0$.

Будем решать уравнение (1) методом усреднения в квазиизохронном приближении [1,2]. Совершив замену переменных, перейдем к переменным «импульс-фаза» (J, ψ) :

$$x=-J\chi(\psi,\omega);\ x_t=-\ \omega J\chi_{\psi}(\psi,\omega), \qquad (2)$$

где периодическая функция Грина (ПФГ) – суть реакция линейной части системы на 2π/ω-периодическую δ-функцию Дирака [1, 2]. В соответствии с методиками усреднения будем иметь систему с быстрой фазой:

$$J_t=-\ \varepsilon[(r\pi^{-1}\Omega+b)J-0{,}5\ K_0],\quad \psi_t=2\Omega(1-2\varepsilon\Omega\Delta_1 J^{-1}\pi^{-1}). \qquad (3)$$

Здесь существует единственный стационарный режим $J^0= K_0[2(r\pi^{-1}\Omega+b)]^{-1}$. Общее решение первого из двух выписанных уравнений (3):

$$J=J^0\{1—\exp[-\varepsilon[(r\pi^{-1}\Omega+b)\underline{t}]\}+J(0)\exp[-\varepsilon[(r\pi^{-1}\Omega+b)t] \qquad (4)$$

свидетельствует о самовозбуждаемости этой системы, а также об устойчивости стационарного решения (декремент $\lambda = \varepsilon\ (r\pi^{-1}\Omega+b)$).

Частота авторезонансного режима

$$\omega_0=2\Omega\ [1-\ 4\ \varepsilon\ \Delta_1(r\pi^{-1}\Omega+b)\Omega\pi^{-1}\ K_0^{-1}]. \qquad (5)$$

2. Пусть на эту систему действует еще случайная сила $\xi(t)$, описываемая центрированным стационарным случайным процессом, удовлетворяющим условию сильного перемешивания, которое записывается с оценкой на его корреляционную функцию $K_{\xi}(\tau)$:

$$|K_{\xi}(\tau)| < M_0 e^{-\alpha\tau}, \quad M_0, \alpha = \text{const} > 0. \tag{6}$$

Уравнение движения запишем в виде

$$x_{tt} + \Omega^2 x + \Phi(x, x_t) = \varepsilon\,[-2bx_t - \Omega^2 \Delta_1 + K_0 J^{-1} x_t + \xi(t)]. \tag{7}$$

Переходя к переменным «импульс — фаза» (R=1), получим систему в стандартной форме

$$J_t = -4\varepsilon[2bJ\chi_t(t - \varphi) - K_0\chi_t(t - \varphi) + \xi(t) - \Omega^2\Delta_1]\,\chi_t(t - \varphi),$$

(8)

$$\varphi_t = -4\,\varepsilon\, J^{-1}[2bJ\chi_t(t - \varphi) - K_0\chi_t(t - \varphi) - \Omega^2\Delta_1 + \xi(t)]\,\chi(t - \varphi).$$

Виду изохронности вырожденной системы здесь $T = \pi\Omega^{-1}$ и

$$\chi(t) = (2\Omega)^{-1}\sin\Omega t, \qquad \chi_t(t) = 0{,}5\cos\Omega t, \quad t \in [0, \pi\Omega^{-1}[.$$

Усредняя правые части системы (8) по явно входящему времени, учтем что $\mathbf{M}\xi = 0$ и, используя [1, 2] получим:

$$J_t = -\,\varepsilon(bJ - 0{,}5K_0); \quad \varphi_t = 2\,\varepsilon\,\Omega\Delta_1 J^{-1}\pi^{-1} \tag{9}$$

Первое уравнение (9) даст единственное устойчивое стационарное решение

$$J_0 = K_0 / 2b, \tag{10}$$

которому соответствует фаза $\varphi_0(t) = 2\,\varepsilon\,\Omega\Delta_1 J^{-1}\pi^{-1} t$, где коэффициент при переменной t дает поправку к частоте авторезонанса 2Ω (см. (5)).

3. Вернемся к стохастическому уравнению движения (7). При малом уровне стохастических сил естественно ожидать, что параметры режима движения должны содержать также малую случайную составляющую. В связи с этим возникает естественное желание получить *флуктуационную поправку* к решению, даваемому методом усреднения. Способы получения таких поправок дают классические методики, разработанные Р. Л. Стратоновичем [4] и Р. 3. Хасьминским [5]

В этом пункте мы рассмотрим в качестве примера вопрос об алгоритме построения нормальных уклонений от усредненной системы [5]. Суть метода заключается в том, что искомая флуктуационная поправка находится из некоторого стохастического аналога уравнений в вариациях. Заметим, что задачи, рассматриваемые здесь, выходят за рамки теорем, обосновывающих формальные построения, поскольку они требуют гладкость входящих в уравнения движения членов, в то время, как виброударные системы относятся к негладким. Будем использовать предложенные алгоритмы формально, отложив математические аспекты проблемы на последующие работы. Рассмотрим систему в стандартной форме

$$\mathbf{z}_t = \varepsilon \boldsymbol{F}(t, z), \qquad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n, \qquad (11)$$

где вектор F — случайный по t процесс, удовлетворяющий ряду условий и, в частности, условию сильного перемешивания, которое в прикладных задачах может пониматься как требование достаточно малого времени корреляции. Обозначим $\mathbf{z}(t)$ решение этой системы. Пусть снова **M** — оператор математического ожидания, а $\mathbf{z}°(t)$ — решение усредненной системы

$$\mathbf{z}_t°(t)= \varepsilon\mathbf{F}_0(z), \mathbf{F}_0(\mathbf{z})=\lim \mathrm{T}^{-1}\int_{\theta}^{\theta+T} \mathbf{MF}(t,\, \mathbf{z})dt,\ (\mathrm{T}\to\infty), \qquad (12)$$

где θ - произвольный момент времени, а относительно подобных пределов здесь и ниже , разумеется, предполагается их равномерное существование по **z** и по θ. Переходя к медленному времени τ=εt, будем рассматривать решения $\mathbf{z}(\tau)$ и $\mathbf{z}°(\tau)$ на конечном промежутке $[0,\ L_0]$, L_0 =const > 0. Можно ожидать, что **z**° отличается от **z** на малую величину. Для достаточно гладких систем показано [5], что если представить точное решение в виде

$$\mathbf{z}(\tau)=\mathbf{z}°(\tau)+(\varepsilon)^{1/2}\mathbf{y}^{\varepsilon}(\tau),$$

то при ε→0 процесс $y^{\varepsilon}(\tau)$, представляющий собой искомую флуктуационную поправку, аппроксимируется на конечном отрезке времени решением $\mathbf{y}°(\tau)$системы *стохастических дифференциальных уравнений Ито*

$$d\mathbf{y}°(\tau)=[\partial\mathbf{F}_0(\mathbf{z}°(\tau))/\partial\mathbf{z}°]\mathbf{y}^0(\tau)d\tau+\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{x}^0(\tau)]d\mathbf{w}(\tau). \qquad (13)$$

При этом корреляционная матрица **σ** строится, исходя из условия $\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}= [A_{kj}]$, причем значок «$^{\mathrm{T}}$» обозначает транспонирование,

$$A_{kj}(\mathbf{z})=\lim T^{-1}\int_{\theta}^{\theta+T} \mathrm{ds}\int_{\theta}^{\theta+T} \mathbf{M}\{[\mathrm{F}_k(t,\mathbf{z})-\mathbf{M}\mathrm{F}_k(t,\mathbf{z})]\mathbf{M}\{[\mathrm{F}_j(t,\mathbf{z})-\mathbf{M}\mathrm{F}_j(t,\mathbf{z})]\}dt,\ (\mathrm{T}\to\infty) \qquad (14)$$

$\boldsymbol{w}(\tau)$- n-мерный винеровский процесс.

В случае, когда исходная система – детерминированная, уравнение Ито (13) превращается в уравнение в вариациях для усредненной системы. Кэффициент сноса $\partial\mathbf{F}_0/\partial\mathbf{z}°$ указывает среднее значение, вокруг которого «распределена» флуктуационная добавка, определяемая, вообще говоря, матричным кэффициентом диффузии **σ.**

4. Вернемся к авторезонансной виброударной системе со случайной составляющей (7). Для отыскания нормального уклонения от решения (J^0, φ^0) – см. (10), можно выписать теперь уравнения (9) в виде:

$$J_t=-\varepsilon(\mathrm{b}J-0{,}5\mathrm{K}_0)\equiv\varepsilon F_{01}(J);\quad \varphi_t=2\,\varepsilon\Omega\Delta_1 J^1\pi^{-1}\equiv\varepsilon F_{02}(J). \qquad (15)$$

Найденному выше устойчивому стационарному режиму $J^0= K_0[2(\varepsilon\pi^{-1}\Omega+b)]^{-1}$ отвечает фаза $\varphi^0\ =2\,\varepsilon\ \Delta_1 J^1\pi^{-1}\Omega t$. Для получения уравнения (13), необходимо продифференцировать (15) и перейти к медленному времени $\tau= \varepsilon t$. Имеем:

$$[\partial/\partial J^0]F_{01}(J)=-b,\ [\partial/\partial J^0]F_{02}(J)=2\Omega\Delta_1(J^0)^{-2}\pi^{-1},$$
$$[\partial/\partial \varphi^0]F_{01}=[\partial/\partial \varphi^0]F_{02}=0. \qquad (16)$$

С учетом периодичности ПФГ $\chi(t)$ и ее производной $\chi_t(t)$ компоненты корреляционной матрицы (14), вычисляемые в соответствии с уравнениями в стандартной форме и условием $\mathbf{M}\xi=0$, имеют вид:

$$A_{11}=(16/T)\int_0^T ds\int_{-\infty}^{\infty}\chi_t(t)\ \chi_s(s)K_\xi(t-s)dt, \qquad (17)$$

$$A_{12}=A_{21}=(16/T J^0)\int_0^T ds\int_{-\infty}^{\infty}\chi_t(t)\ \chi(s)K_\xi(t-s)dt, \qquad (18)$$

$$A_{22}=16T^1(J^0)^{-2}\int_0^T ds\int_{-\infty}^{\infty}\chi(t)\ \chi(s)K_\xi(t-s)dt, \qquad (19)$$

и тем самым уравнение Ито (13) определено. Подставляя сюда нужные корреляционные функции, можно построить требуемое решение на основе известных правил [6].

Рассмотрим некоторые частные случаи, позволяющие подробно исследовать флуктуационную поправку к стационарному значению импульса J^0.

5. Пусть $\xi(t)$ – белый шум интенсивности S_0. Тогда корреляционная функция $K_\xi(t)=\pi S_0\delta(t)$, где $\delta(t)$ – δ – функция Дирака. В соответствии с видом ПФГ $\chi(t)$: $A_{12}=A_{21}=0$, и система (13) распадается. Для флуктуционной поправки $y_1^0(\tau)$ получаем следующее уравнение Ланжевена:

$$y_{1\tau}^0(\tau)=-\gamma\, y_1^0+\xi_0(t), \qquad \tau=\varepsilon t, \qquad (20)$$

где $\xi_0(t)$ – белый шум интенсивности $4\pi S_0$, $\gamma=b$ – декремент колебаний в детерминированной системе. Решая выписанное уравнение, найдем для корреляционной функции случайного процесса $y_1^0(\tau)$:

$$K_y(\tau)=\sigma^2_y\exp(-\gamma|\tau|),$$

где дисперсия процесса $\sigma^2_y=4\pi S_0\,\gamma^{-1}$.

6. Пусть теперь $\xi(t)$-случайный процесс, отличный от белого шума, но с малым временем корреляции, так что в оценке (6) αT<<1. Оказывается, что для флуктуационной поправки снова можно получить уравнение Ланжевена, с другим коэффициентом диффузии. Вычислим представления для компонент матрицы A_{kj} в виде числовых рядов, воспользовавшись представлением для ПФГ и её производной через ряды Фурье:

$$\chi(t)=T^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(ik\omega t)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-1};\quad \chi_t(t)=T^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}ik\,\omega\exp(ik\omega t)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-1}; \qquad (21)$$

Для коэффициента A_{12} после интегрирования по t найдем: $\int_{-\infty}^{\infty} \chi_t(t) K_\xi(t-s)dt=$

$$\mathrm{T}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{k}\, \omega S(k\omega)\exp(ik\omega t)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-1}, \quad (22)$$

где фигурирует спектральная плотность процесса $\xi(t)$ на частоте $k\omega = 2k\Omega$:

$$S(k\omega)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega\tau}d\tau. \quad (23)$$

Внесем (22) в (18) и затем выполним интегрирование по s:

$$A_{12}= (16/T J^0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, i\, k\, \omega S(k\omega)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-2}. \quad (24)$$

Ряд (24) можно приближенно просуммировать при помощи приёма, предложенного в [1, 2]. Введём вспомогательную функцию

$$h(t)= (16/T J^0)\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{k}\, \omega S(k\omega)\exp(ik\omega t)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-2}, \quad (25)$$

такую, что $h(0)=h(2\pi\omega^{-1})= A_{12}$. Эту функцию можно записать в конечном виде на отрезке $[0,T]$ при помощи подсчета вычетов функции комплексного переменного

$$Z(p)= pL_0(p)(p^2+\Omega^2)^{-2},$$

где $L_0(p)$ – преобразование Лапласа корреляционной функции. Если время корреляции мало, то вычеты $L_0(p)$ лежат далеко от мнимой оси и существенный вклад в искомое представление вносят только полюсы $p_{1,2}=\pm i\,\Omega$. Следовательно,

$$A_{12}=(16/TJ^0)\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{k}\, \omega S(\Omega)[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-2}+ \ldots. \quad (26)$$

Но входящий в (26) бесконечный ряд равен нулю, так как

$$\int_0^T \chi_t(t)\chi(t)\,dt= \mathrm{T}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\, \mathrm{k}\, \omega[\Omega^2-k^2\omega^2]^{-2}=(8\Omega)^{-1}\int_0^{\Theta} \sin 2\Omega t\, dt=0 \qquad (\Theta=\pi/\Omega;\ \omega=2\Omega).$$

Поэтому с точностью до членов высоких порядков малости, получаем, что

$$A_{11}\approx 4\pi\ S(\Omega). \quad (27)$$

Следовательно, уравнение Ланжевена (20) для уклонения $y_1{}^0(\tau)$ содержит белый шум $\xi_0(t)$ интенсивности $4\pi S(\Omega)$, а дисперсия $\sigma^2_y=4\pi^2 S(\Omega)\gamma^{-1}$.

Этот результат физически оправдан тем обстоятельством, что вне зависимости от вида малого широкополосного воздействия, флуктуации воспринимаются системой главным образом на частоте резонанса линейной части системы.

Подобным образом могут быть разобраны и другие частные случаи, а также использованы другие способы подсчета флуктуационных поправок.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № № 13-08-01235-а и 13-08-90419 Укр_ф_а)).

Список литературы

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985.320 с.
2. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p
3. Крупенин В.Л., Мягкохлеб К.Б. Об одном классе авторезонансных машин виброударного действия. Доповоді НАН Украіни. №3. 2014. С.64-69.
4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1961. – 558 с.
5. Хасьминский Р.З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром.// Теория вероятностей и её применения, 1966, т. 11, №2. –С. 240-259.
6. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука.1979. – 339 с.