

УДК 536.24

## НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С ОКРУЖАЮЩЕЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

©Валерий Владимирович Рубцов

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Московский государственный строительный университет”,*

*МГСУ, Москва, Россия*

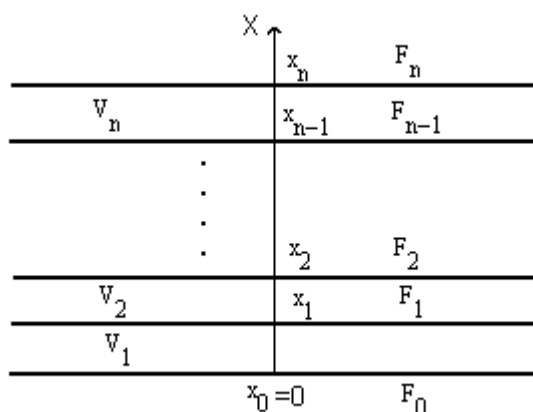
[rubvall1@yandex.ru](mailto:rubvall1@yandex.ru)

**Аннотация.** В работе изложено численное решение нестационарной задачи о радиационно-кондуктивном теплообмене между многослойной плоско-параллельной теплопроводной пластиной и окружающей поглощающей средой.

**Ключевые слова:** радиационно-кондуктивный теплообмен, коэффициент теплопроводности, поглощающая среда.

**1. Постановка задач.** Рассматриваются две постановки задачи, характеризующиеся различными способами задания граничных условий.

**1.1. Первая постановка задачи.** Пусть имеется плоско-параллельная теплопроводная пластина  $V$  без источников (стоков) тепла, ограниченная бесконечными поверхностями  $F_0$ ,  $F_n$  и состоящая из  $n$  слоев  $V_k : V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$  (рис.1).



**Рис.1.** Схема излучающей системы

Примем, что контакт между слоями  $V_k$  и  $V_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях  $F_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , двух слоев одинакова. Заданы постоянные коэффициенты теплопроводности  $\lambda_k$ , удельные теплоемкости  $c_k$  и плотности  $\rho_k$  слоев  $V_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Предположим, что на поверхности  $F_0$  задана изменяющаяся во времени  $t$  температура  $T_{F_0}(t)$  (граничное условие первого рода), а между поверхностью  $F_n$  и окружающей чисто поглощающей средой с температурой  $T_s(t)$  происходит радиационный

теплообмен (нелинейное граничное условие третьего рода). Поверхность  $F_n$  примем серой, диффузно излучающей и отражающей [1]. Кроме того, положим, что в начальный момент времени  $t = 0$  заданы температуры  $T_{k,0}(M_k)$  слоев  $V_k$ ,  $M_k \in V_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , изменяющиеся лишь в направлении перпендикулярном границе пластины.

Требуется определить на заданном промежутке времени  $0 < t \leq t^*$  нестационарные поля температур  $T_k(M_k, t)$  в слоях  $V_k$ ,  $M_k \in V_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие неравенствам [2,3]

$$0 < m_* \leq T_k(M_k, t) \leq m^*, \quad M_k \in V_k, \quad 0 < t \leq t^*, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где  $m_*$  и  $m^*$  – соответственно наименьшее и наибольшее значения заданных температур  $T_{F_0}(t)$ ,  $T_s(t)$ ,  $0 \leq t \leq t^*$ , и  $T_{k,0}(M_k)$ ,  $M_k \in V_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

$$m_* = \min \left[ T_{F_0}(t), T_{k,0}(M_k), T_s(t) \right],$$

$$m^* = \max \left[ T_{F_0}(t), T_{k,0}(M_k), T_s(t) \right].$$

Введем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы ось  $Ox$  была перпендикулярна границе пластины, а начало координат располагалось в плоскости  $F_0$ . Через  $x_k$  обозначим значение координаты  $x$  точки  $M_k$  на поверхности  $F_k$ . В этом случае приходим к следующей математической постановке задачи:

- найти функции  $T_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , определенные при  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ ,  $0 < t \leq t^*$ , удовлетворяющие неравенствам (1), уравнениям теплопроводности

$$\frac{\partial T_k(x, t)}{\partial t} = a_k \frac{\partial^2 T_k(x, t)}{\partial x^2}, \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad 0 < t \leq t^*, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

граничным условиям [4]

$$T_1(x_0, t) = T_1(0, t) = T_{F_0}(t), \quad 0 < t \leq t^*, \quad (3)$$

$$T_k(x_k, t) = T_{k+1}(x_k, t), \quad 0 < t \leq t^*, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4)$$

$$\lambda_k \frac{\partial T_k(x_k, t)}{\partial x} = \lambda_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}(x_k, t)}{\partial x}, \quad 0 < t \leq t^*, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5)$$

$$\lambda_n \frac{\partial T_n(x_n, t)}{\partial x} = E_{\text{рез.}n}(t) = A_n \sigma_0 \left[ T_s^4(t) - T_n^4(x_n, t) \right], \quad 0 < t \leq t^*, \quad (6)$$

и начальным условиям

$$T_k(x, 0) = T_{k,0}(x), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Здесь  $a_k = \frac{\lambda_k}{c_k \rho_k}$  – коэффициент температуропроводности слоя  $V_k$ ;  $A_n$  – коэффициент поглощения поверхности  $F_n$ ;  $\sigma_0$  – постоянная Стефана – Больцмана;  $E_{\text{рез.}n}$  – поверхностная плотность результирующего излучения [1].

Задачу (1) – (7) удобно представить в безразмерной форме

$$\frac{\partial \theta_k(\xi, \tau)}{\partial \tau} = v_k \frac{\partial^2 \theta_k(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, \quad \xi_{k-1} < \xi < \xi_k, \quad 0 < \tau \leq \tau^*, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

$$\theta_1(\xi_0, \tau) = \theta_1(0, \tau) = \theta_{F_0}(\tau), \quad 0 < \tau \leq \tau^*, \quad (9)$$

$$\theta_k(\xi_k, \tau) = \theta_{k+1}(\xi_k, \tau), \quad 0 < \tau \leq \tau^*, \quad k=1, 2, \dots, n-1, \quad (10)$$

$$\delta_k \frac{\partial \theta_k(\xi_k, \tau)}{\partial \xi} = \delta_{k+1} \frac{\partial \theta_{k+1}(\xi_k, \tau)}{\partial \xi}, \quad 0 < \tau \leq \tau^*, \quad k=1, 2, \dots, n-1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta_n(\xi_n, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta_n(1, \tau)}{\partial \xi} = e_{\text{рез.}n}(\tau) = N_n \left[ \theta_s^4(\tau) - \theta_n^4(1, \tau) \right], \quad 0 < \tau \leq \tau^*, \quad (12)$$

$$\theta_k(\xi, 0) = \theta_{k,0}(\xi), \quad \xi_{k-1} \leq \xi \leq \xi_k, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

$$0 < \mu \leq \theta_k(\xi, \tau) \leq 1, \quad \xi_{k-1} \leq \xi \leq \xi_k, \quad 0 < \tau \leq \tau^*, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где

$$\theta = \frac{T}{m^*}, \quad \xi = \frac{x}{x_n}, \quad \tau = \frac{a_1 t}{x_n^2}, \quad v_k = \frac{a_k}{a_1}, \quad \delta_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1}, \quad N_n = \frac{A_n \sigma_0 x_n m^{*3}}{\lambda_n}, \quad \mu = \frac{m^*}{m^*}, \quad e_{\text{рез.}n} = \frac{E_{\text{рез.}n} x_n}{\lambda_n m^*}.$$

**1.2. Вторая постановка задачи.** Предположим, что на поверхности  $F_0$  также задано граничное условие третьего рода, а именно, между поверхностью  $F_0$  и окружающей чисто поглощающей средой с температурой  $T_e(t)$  происходит радиационный теплообмен.

В таком случае для определения нестационарных полей температур в слоях  $V_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , приходим к следующей математической задаче:

- найти решения  $\theta_k(\xi, \tau)$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , уравнений (8) при граничном условии [1]

$$-\frac{\partial \theta_1(\xi_0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta_1(0, \tau)}{\partial \xi} = e_{\text{рез.}0}(\tau) = N_0 \left[ \theta_e^4(\tau) - \theta_1^4(0, \tau) \right], \quad 0 < \tau \leq \tau^*, \quad (9')$$

граничных условиях (10) – (12), начальных условиях (13) и ограничениях (14).

**2. Решение задач.** Для решения сформулированных задач воспользуемся методом последовательных двусторонних приближений [1, 2] и методом конечных разностей, изложенным в работе [5].

**2.1. Первая постановка задачи.** На основании метода, предложенного в [2], представим граничное условие (12) в виде

$$\frac{\partial \theta_n(1, \tau)}{\partial \xi} + 4N_n \theta_n(1, \tau) = N_n \left[ \theta_s^4(\tau) - \theta_n^4(1, \tau) + 4\theta_n(1, \tau) \right], \quad 0 < \tau \leq \tau^*. \quad (15)$$

Введем на множестве  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau^*$  сетку  $\xi_{ki} = \xi_{k-1} + i\Delta\xi_k$ ,  $\tau_j = j\Delta\tau$ ,  $i=0, 1, \dots, L_k$ ,

$k=1, 2, \dots, n$ ,  $j=0, 1, \dots, L_0$ , с шагами  $\Delta\xi_k = \frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{L_k}$ ,  $\Delta\tau = \frac{\tau^*}{L_0}$ . Целые числа

$L_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , удобно полагать четными. Построим на введенной сетке разностную аппроксимацию задачи (8) – (11), (15), (13), (14) [5]

$$\frac{\theta_{k,i}(\tau_{j+1}) - \theta_{k,i}(\tau_j)}{\Delta\tau} = v_k \frac{\theta_{k,i+1}(\tau_j) - 2\theta_{k,i}(\tau_j) + \theta_{k,i-1}(\tau_j)}{(\Delta\xi_k)^2}, \quad (16)$$

если  $0 < i < L_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $0 \leq j < L_0$ ,  $i + j + k$  - нечетное число;

$$\frac{\theta_{k,i}(\tau_{j+1}) - \theta_{k,i}(\tau_j)}{\Delta\tau} = v_k \frac{\theta_{k,i+1}(\tau_{j+1}) - 2\theta_{k,i}(\tau_{j+1}) + \theta_{k,i-1}(\tau_{j+1})}{(\Delta\xi_k)^2}, \quad (17)$$

если  $0 < i < L_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $0 \leq j < L_0$ ,  $i + j + k$  - четное число;

$$\theta_{1,0}(\tau_{j+1}) = \theta_{F_0}(\tau_{j+1}), \quad 0 \leq j < L_0, \quad (18)$$

$$\theta_{k,L_k}(\tau_{j+1}) = \theta_{k+1,0}(\tau_{j+1}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad 0 \leq j < L_0, \quad (19)$$

$$\delta_k \frac{\theta_{k,L_k}(\tau_{j+1}) - \theta_{k,L_k-1}(\tau_{j+1})}{\Delta\xi_k} = \delta_{k+1} \frac{\theta_{k+1,1}(\tau_{j+1}) - \theta_{k+1,0}(\tau_{j+1})}{\Delta\xi_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad 0 \leq j < L_0, \quad (20)$$

$$\frac{\theta_{n,L_n}(\tau_{j+1}) - \theta_{n,L_n-1}(\tau_{j+1})}{\Delta\xi_n} + 4N_n \theta_{n,L_n}(\tau_{j+1}) = N_n \left[ \theta_s^4(\tau_{j+1}) - \theta_{n,L_n}^4(\tau_{j+1}) + 4\theta_{n,L_n}(\tau_{j+1}) \right], \quad (21)$$

$0 \leq j < L_0,$

$$\theta_{k,i}(0) = \theta_{k0,i}, \quad 0 \leq i \leq L_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

$$0 < \mu \leq \theta_{k,i}(\tau_j) \leq 1, \quad 0 \leq i \leq L_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad 0 \leq j \leq L_0, \quad (23)$$

где  $\theta_{k,i}(\tau_j) = \theta_k(\xi_i, \tau_j)$ .

Для определения  $\theta_{k,i}(\tau_{j+1})$  при известных значениях  $\theta_{k,i}(\tau_j)$  воспользуемся итерационным процессом

$$\frac{\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1}) - \theta_{k,i}(\tau_j)}{\Delta\tau} = v_k \frac{\theta_{k,i+1}(\tau_j) - 2\theta_{k,i}(\tau_j) + \theta_{k,i-1}(\tau_j)}{(\Delta\xi_k)^2}, \quad (24)$$

если  $0 < i < L_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $0 \leq j < L_0$ ,  $i + j + k$  - нечетное число;

$$\frac{\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1}) - \theta_{k,i}(\tau_j)}{\Delta\tau} = v_k \frac{\theta_{k,i+1}^{(l)}(\tau_{j+1}) - 2\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1}) + \theta_{k,i-1}^{(l)}(\tau_{j+1})}{(\Delta\xi_k)^2}, \quad (25)$$

если  $0 < i < L_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $0 \leq j < L_0$ ,  $i + j + k$  - четное число;

$$\theta_{i,0}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \theta_{F_0}(\tau_{j+1}), \quad 0 \leq j < L_0, \quad (26)$$

$$\theta_{k,L_k}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \theta_{k+1,0}^{(l)}(\tau_{j+1}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad 0 \leq j < L_0, \quad (27)$$

$$\delta_k \frac{\theta_{k,L_k}^{(l)}(\tau_{j+1}) - \theta_{k,L_k-1}^{(l)}(\tau_{j+1})}{\Delta\xi_k} = \delta_{k+1} \frac{\theta_{k+1,1}^{(l)}(\tau_{j+1}) - \theta_{k+1,0}^{(l)}(\tau_{j+1})}{\Delta\xi_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad 0 \leq j < L_0, \quad (28)$$

$$\frac{\theta_{n,L_n}^{(l)}(\tau_{j+1}) - \theta_{n,L_n-1}^{(l)}(\tau_{j+1})}{\Delta\xi_n} + 4N_n \theta_{n,L_n}^{(l)}(\tau_{j+1}) =$$

$$= N_n \left[ \theta_s^4(\tau_{j+1}) - \theta_{n,L_n}^{(l-1)4}(\tau_{j+1}) + 4\theta_{n,L_n}^{(l-1)}(\tau_{j+1}) \right], \quad 0 \leq j < L_0. \quad (29)$$

На основании данных соотношений находим

$$\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \theta_{k,i}(\tau_{j+1}) = \left[ \theta_{k,i+1}(\tau_j) + \theta_{k,i-1}(\tau_j) \right] \gamma_k + \theta_{k,i}(\tau_j)(1 - 2\gamma_k), \quad (30)$$

если  $0 < i < L_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $i + j + k$  – нечетное число;

$$\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \theta_{k,i}(\tau_{j+1}) = \frac{\theta_{k,i}(\tau_j) + \gamma_k \left[ \theta_{k,i+1}(\tau_{j+1}) + \theta_{k,i-1}(\tau_{j+1}) \right]}{1 + 2\gamma_k}, \quad (31)$$

если  $i_k < i < L_k - 1$ ,  $i_1 = 0$ ,  $i_k = 1$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ ,  $i + j + k$  – четное число;

$$\theta_{k,L_k}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \theta_{k,L_k}(\tau_{j+1}) = \frac{(1 + 2\gamma_{k+1})\theta_{k,L_k-1}(\tau_{j+1}) + \omega_k \left[ \theta_{k+1,1}(\tau_j) + \gamma_{k+1}\theta_{k+1,2}(\tau_{j+1}) \right]}{1 + 2\gamma_{k+1} + \omega_k(1 + \gamma_{k+1})}, \quad (32)$$

$$\theta_{k+1,1}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \theta_{k+1,1}(\tau_{j+1}) = \frac{(1 + \omega_k) \left[ \theta_{k+1,1}(\tau_j) + \gamma_{k+1}\theta_{k+1,2}(\tau_{j+1}) \right] + \gamma_{k+1}\theta_{k,L_k-1}(\tau_{j+1})}{1 + 2\gamma_{k+1} + \omega_k(1 + \gamma_{k+1})}, \quad (33)$$

если  $k + j$  – четное число,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ;

$$\begin{aligned} \theta_{k,L_k}^{(l)}(\tau_{j+1}) &= \theta_{k,L_k}(\tau_{j+1}) = \\ &= \frac{\theta_{k,L_k-1}(\tau_j) + \gamma_k\theta_{k,L_k-2}(\tau_{j+1}) + (1 + 2\gamma_k)\omega_k\theta_{k+1,1}(\tau_{j+1})}{1 + \gamma_k + \omega_k(1 + 2\gamma_k)}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\theta_{k,L_k-1}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \theta_{k,L_k-1}(\tau_{j+1}) = \frac{\gamma_k\omega_k\theta_{k+1,1}(\tau_{j+1}) + (1 + \omega_k) \left[ \theta_{k,L_k-1}(\tau_j) + \gamma_k\theta_{k,L_k-2}(\tau_{j+1}) \right]}{1 + \gamma_k + \omega_k(1 + 2\gamma_k)}, \quad (35)$$

если  $k + j$  – нечетное число,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ;

$$\theta_{n,L_n}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \frac{\theta_{n,L_n-1}(\tau_{j+1}) + \Delta\xi_n f_n^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1 + 4N_n\Delta\xi_n}, \quad (36)$$

если  $n + j$  – четное число;

$$\theta_{n,L_n}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \frac{\theta_{n,L_n-1}(\tau_j) + \gamma_n\theta_{n,L_n-2}(\tau_{j+1}) + (1 + 2\gamma_n)\Delta\xi_n f_n^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1 + \gamma_n + 4N_n\Delta\xi_n(1 + 2\gamma_n)}, \quad (37)$$

$$\theta_{n,L_n-1}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \frac{\gamma_n\Delta\xi_n f_n^{(l-1)}(\tau_{j+1}) + (1 + 4N_n\Delta\xi_n) \left[ \theta_{n,L_n-1}(\tau_j) + \gamma_n\theta_{n,L_n-2}(\tau_{j+1}) \right]}{1 + \gamma_n + 4N_n\Delta\xi_n(1 + 2\gamma_n)}, \quad (38)$$

если  $j + n$  – нечетное число;

$$\theta_{1,0}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \theta_{F_0}(\tau_{j+1}). \quad (39)$$

В выражениях (30) – (38) использованы обозначения

$$\gamma_k = v_k \frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi_k)^2}, \quad \omega_k = \frac{\delta_{k+1}\Delta\xi_k}{\delta_k\Delta\xi_{k+1}}, \quad f_n^{(l-1)}(\tau_{j+1}) = N_n \left[ \theta_s^4(\tau_{j+1}) - \theta_{n,L_n}^{(l-1)4}(\tau_{j+1}) + 4\theta_{n,L_n}^{(l-1)}(\tau_{j+1}) \right].$$

Полагая начальное приближение  $\theta_{n,L_n}^{(0)}(\tau_{j+1})$  сначала равным  $\mu$

$$\theta_{n,L_n}^{(0)}(\tau_{j+1}) = \mu, \quad (40)$$

а затем, принимая  $\theta_{n,L_n}^{(0)}(\tau_{j+1})$  равным 1

$$\theta_{n,L_n}^{(0)}(\tau_{j+1}) = 1, \quad (41)$$

получим на основании соотношений (30)–(39) при  $\gamma_n < \frac{1}{2}$  соответственно неубывающие  $\theta_{k,i^*}^{(l)}(\tau_{j+1})$  и невозрастающие  $\theta_{k,i}^{(l)*}(\tau_{j+1})$ ,  $0 \leq i \leq L_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , последовательности приближений, сходящиеся к единственному решению  $\theta_{k,i}(\tau_{j+1})$ ,  $0 \leq i \leq L_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , задачи (16) – (23) [2, 3].

Для заданного достаточно малого положительного числа  $\varepsilon$  приближенно примем

$$\theta_{k,i}(\tau_{j+1}) \approx \frac{1}{2} \left[ \theta_{k,i}^{(l)*}(\tau_{j+1}) + \theta_{k,i^*}^{(l)}(\tau_{j+1}) \right], \quad (42)$$

где нижние  $\theta_{k,i^*}^{(l)}(\tau_{j+1})$  и верхние  $\theta_{k,i}^{(l)*}(\tau_{j+1})$  последовательные приближения выбираем из условия

$$\left[ \theta_{k,i}^{(l)*}(\tau_{j+1}) - \theta_{k,i^*}^{(l)}(\tau_{j+1}) \right] < \varepsilon, \quad 0 \leq i \leq L_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (43)$$

**2.2. Вторая постановка задачи.** Разностная схема задачи (8), (9'), (10) – (14) сводится к разностным уравнениям (24) – (25), граничному условию

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{1,0}^{(l)}(\tau_{j+1}) - \theta_{1,1}^{(l)}(\tau_{j+1})}{\Delta \xi_1} + 4N_0 \theta_{1,0}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \\ = N_0 \left[ \theta_e^4(\tau_{j+1}) - \theta_{1,0}^{(l-1)4}(\tau_{j+1}) + 4\theta_{1,0}^{(l-1)}(\tau_{j+1}) \right], \quad 0 \leq j < L_0, \end{aligned} \quad (44)$$

и соотношениям (18) – (23).

Применяя к решению полученной разностной задачи рассмотренный выше итерационный процесс, для определения величин  $\theta_{k,i}^{(l)}(\tau_{j+1})$  приходим к формулам, аналогичным (30) – (39), а также соотношениям

$$\theta_{1,0}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \frac{\theta_{1,1}(\tau_{j+1}) + \Delta \xi_1 f_2^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1 + 4N_0 \Delta \xi_1}, \quad (45)$$

если  $j$  – нечетное число,  $0 \leq j < L_0$ ;

$$\theta_{1,1}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \frac{(1 + 4N_0 \Delta \xi_1) \left[ \theta_{1,1}(\tau_j) + \gamma_1 \theta_{1,2}(\tau_{j+1}) \right] + \gamma_1 \Delta \xi_1 f_2^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1 + \gamma_1 + 4N_0 \Delta \xi_1 (1 + 2\gamma_1)}, \quad (46)$$

$$\theta_{1,0}^{(l)}(\tau_{j+1}) = \frac{\theta_{1,1}(\tau_j) + \gamma_1 \theta_{1,2}(\tau_{j+1}) + (1 + 2\gamma_1) \Delta \xi_1 f_2^{(l-1)}(\tau_{j+1})}{1 + \gamma_1 + 4N_0 \Delta \xi_1 (1 + 2\gamma_1)}, \quad (47)$$

если  $j$  – четное число,  $0 \leq j < L_0$ .

В выражениях (45) – (47) использовано обозначение

$$f_2^{(l-1)}(\tau_{j+1}) = N_0 \left[ \theta_e^4(\tau_{j+1}) - \theta_{1,0}^{(l-1)4}(\tau_{j+1}) + 4\theta_{1,0}^{(l-1)}(\tau_{j+1}) \right].$$

Задавая далее начальные приближения  $\theta_{1,0}^{(0)}(\tau_{j+1})$  и  $\theta_{n,L_n}^{(0)}(\tau_{j+1})$  сначала равными  $\mu$ , а затем равными 1, найдем соответственно неубывающие и невозрастающие последовательности приближений  $\theta_{k,i*}^{(l)}(\tau_{j+1})$  и  $\theta_{k,i}^{(l)*}(\tau_{j+1})$ ,  $0 \leq i \leq L_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ ,  $l=1,2,\dots$ , сходящиеся к единственному решению  $\theta_{k,i}(\tau_{j+1})$ ,  $0 \leq i \leq L_k$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , задачи (8), (9'), (10) – (14). В качестве приближенного решения этой задачи примем  $\theta_{k,i}(\tau_{j+1})$ ,  $k=1,2,\dots,n$ , определяемые соотношениями (42), (43).

**3. Численные исследования.** Рассматривалась трехслойная плоско-параллельная пластина. Полагали:  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi_1 = 0.4$ ,  $\xi_2 = 0.8$ ,  $\xi_3 = 1$ ,  $L_1 = L_2 = L_3 = 8$ ,  $\Delta\tau = 0.001$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

Результаты численных исследований представлены в виде соответствующих графических зависимостей на рис.2 для первой постановки задачи и на рис.3 для второй постановки. На рис.2а и 3а изображены распределения температур по толщине пластины в момент времени  $\tau = 0.1$ , а на рис.2б и 3б представлены зависимости от времени  $\tau$  температуры пластины на поверхности  $F_3$ .

Графики, изображенные на рис.2а,б, соответствуют следующим значениям исходных данных:

- 1)  $N_3 = 1$ ,  $\theta_{F_0} = \theta_s = 0.5$ ,  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \theta_{3,0} = 1$ ;
- 2)  $N_3 = 0.1$ ,  $\theta_{F_0} = \theta_s = 0.5$ ,  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \theta_{3,0} = 1$ ;
- 3)  $N_3 = 10$ ,  $\theta_{F_0} = \theta_s = 0.5$ ,  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \theta_{3,0} = 1$ ;
- 4)  $N_3 = 1$ ,  $\theta_{F_0} = \theta_s = 1$ ,  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \theta_{3,0} = 0.5$ ;
- 5)  $N_3 = 1$ ,  $\theta_{F_0} = 1$ ,  $\theta_s = 0.5$ ,  $\theta_{1,0} = 0.5$ ,  $\theta_{2,0} = 0.75$ ,  $\theta_{3,0} = 1$ .

Графические зависимости, изображенные на рис.3а,б, получены для следующих значений исходных данных:

- 1)  $N_0 = N_3 = 1$ ,  $\theta_e = \theta_s = 0.5$ ,  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \theta_{3,0} = 1$ ;
- 2)  $N_0 = N_3 = 0.1$ ,  $\theta_e = \theta_s = 0.5$ ,  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \theta_{3,0} = 1$ ;
- 3)  $N_0 = N_3 = 10$ ,  $\theta_e = \theta_s = 0.5$ ,  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \theta_{3,0} = 1$ ;
- 4)  $N_0 = N_3 = 1$ ,  $\theta_e = \theta_s = 1$ ,  $\theta_{1,0} = \theta_{2,0} = \theta_{3,0} = 0.5$ ;
- 5)  $N_0 = N_3 = 1$ ,  $\theta_e = \theta_s = 0.5$ ,  $\theta_{1,0} = 0.5$ ,  $\theta_{2,0} = 0.75$ ,  $\theta_{3,0} = 1$ .

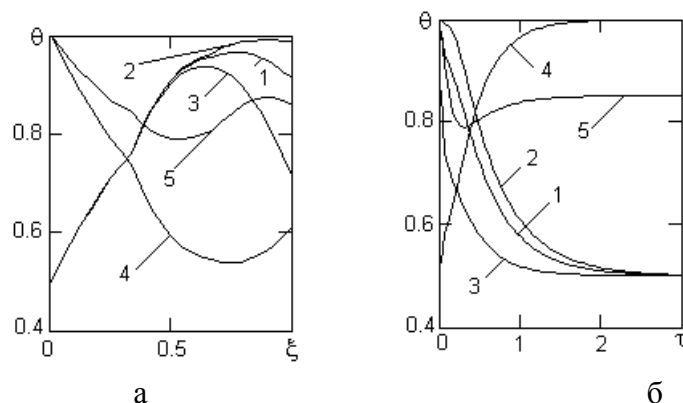


Рис.2. Распределения температур по толщине пластины (первая постановка задачи)

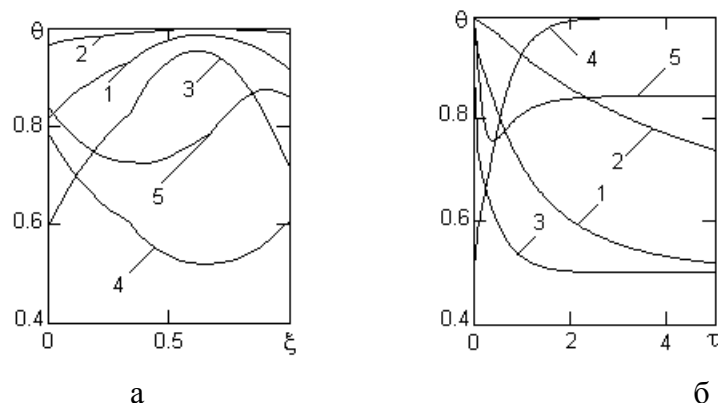


Рис.3. Распределения температур по толщине пластины (вторая постановка задачи)

Из представленных результатов, в частности, следует, что распределения температур с течением времени стремятся к стационарным распределениям, причем для первых четырех вариантов значений исходных данных стационарное состояние системы является состоянием термодинамического равновесия. Видно также, что процесс перехода системы в стационарное состояние протекает быстрее с увеличением чисел  $N_0$  и  $N_3$ , что объясняется возрастанием влияния радиационной составляющей на совместный перенос тепла излучением и теплопроводностью.

**Выводы.** Дано численное решение нестационарной задачи о радиационно-кондуктивном теплообмене между многослойной плоско-параллельной теплопроводной пластиной и окружающей чисто поглощающей средой. Рассмотрены две постановки задачи, характеризующиеся различными способами задания граничных условий.

Представленное решение основано на совместном использовании метода последовательных двусторонних приближений и метода конечных разностей. С помощью полученных расчетных формул и выражений выполнены численные исследования нестационарного поля температур в трехслойной плоско-параллельной пластине. Результаты исследований представлены в виде соответствующих графических зависимостей.

Расчетные соотношения и графические зависимости, полученные в работе, могут быть использованы при проектировании теплотехнических устройств различного назначения.

### Список литературы

1. Суринов Ю.А. К теории переноса излучения и лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1966. №6. С.127 – 153.
2. Рубцов В.В., Суринов Ю.А. О методах решения нестационарных задач теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1989. Т.29. №11. С. 1705 – 1713.
3. Рубцов В.В. Нестационарный теплообмен излучением между теплопроводной плоско-параллельной пластиной и окружающей поглощающей средой // Известия вузов. Черная металлургия. 2010. №5. С. 55 – 59.
4. Рубцов В.В. О радиационно-кондуктивном теплообмене между многослойной плоско – параллельной теплопроводной пластиной и окружающей средой // Технологии техносферной безопасности: научный интернет-журнал . Выпуск 4 (50). 2013. С.1 – 7. [www.ipb.mos.ru/ttb](http://www.ipb.mos.ru/ttb).
5. Gourlay A.R. Hopscotch a Fast Second – Order Partial Differential Equation Solver // J. Inst. Math. Appl. 1970. V.6. P.375 – 390.