УДК 531

Вращательные режимы в сильно периодически возмущенном маятнике

В.Ш. Бурд

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
vburd1@gmail.com

Аннотация.
Рассматривается сильно периодически возмущенное уравнение маятника. Возмущение представляет собой быстро осциллирующую периодическую функцию с нулевым средним значением и большой амплитудой. Это уравнение используется как модель для контакта Джозефсона в теории сверхпроводимости. Исследуется вопрос о существовании сложных вращательных режимов возмущенного маятника. Применяется метод усреднения на бесконечном промежутке.

Ключевые слова: уравнение маятника, периодическое возмущение, метод усреднения, вращательные режимы, функции Беселя.

Rotary regimes in strongly periodically perturbed pendulum

V.Sh. Burd

Demidov Yaroslavl State University

Abstract
The strongly periodically perturbed pendulum is considered. Perturbation is a rapidly oscillating periodic function with zero mean value and large amplitude. This equation is used as a model for Josephson junction in the theory of superconductivity. Problem of the existence of complex rotary regimes for perturbed pendulum is investigated. Method of averaging on infinite interval is applied.

Key words: pendulum equation, periodic perturbation, method of averaging, rotary regimes, Bessel functions.

1. Введение

Гармонически возмущенный маятник изучался активно в последние десятилетия во многих работах (см., напр. [1,2]). Возмущенный маятник является одной из ключевых систем в нелинейной динамике, благодаря простоте и содержательности в исследовании нелинейных явлений таких как фазовая синхронизация и хаос. Другая причина для изучения возмущенного маятника состоит в том, что маятниковое уравнение широко используется как модель для контакта Джозефсона в теории сверхпроводимости. Методы исследования режимов гармонически возмущенного маятника используются при анализе существоания кинков у гармонически возмущенного уравнения синус-Гордон (см. [3,4,5]).

В настоящей работе предполагается, что вынужденная периодическая сила является быстро осциллирующей с большой амплитудой. Вводится малый параметр ε и делаются точные предположения об асимптотике амплитуды и частоты внешней силы. Для построения усредненных уравнений используется классический метод усреднения [6,7].

2. Маятник в присутствии вынужденной быстро осциллирующей периодической силы с большой амплитудой

Начнем с уравнения простого маятника с быстро осциллирующим периодическим возмущением большой амплитуды. Уравнение имеет вид

$$x'' + \sin x = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{1}$$

где ε - малый параметр, $f(t)$ - периодическая функция с периодом $2\pi/\Omega$ и нулевым средним значением, M - постоянная. Будем искать режимы маятника, близкие к быстрым вращениям. В уравнении (1) сделаем замену

$$x = y + \gamma\frac{t}{\varepsilon} + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

где $F''(t) = f(t)$, γ - постоянная. После замены уравнение (1) принимает вид

$$y'' + \sin\left[y + \gamma\frac{t}{\varepsilon} + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)] = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) показывает как возмущающая сила ведет к параметрическому эффекту подобному тому, который вызывается параметрически возмущенным маятником. Последнее уравнение можно записать в виде

$$y'' + A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin y + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\cos y = 0, \tag{4}$$

где

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left[\gamma\frac{t}{\varepsilon} + \left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right], \quad B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left[\gamma\frac{t}{\varepsilon} + \left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right].$$

В уравнении (4) сделаем замену времени $\tau = t/\varepsilon$. Получим уравнение

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \varepsilon^2[A(\tau)\sin y + B(\tau)\cos y] = 0. \tag{5}$$

От уравнения (5) перейдем к системе уравнений

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\varepsilon[A(\tau)\sin y + B(\tau)\cos y]. \end{array} \tag{6}$$

Система (6) имеет стандартную форму для применения метода усреднения (правые части пропорциональны малому параметру ε). Отметим следующее обстоятельство, относящееся к функциям $A(\tau)$. $B(\tau)$. Функция $A(\tau)$ имеет вид

$$A(\tau) = \cos[\gamma\tau + Mf(\tau)] = \cos\gamma\tau\cos Mf(\tau) - \sin\gamma\tau\sin Mf(\tau).$$

Если периоды $T_1 = 2\pi/\gamma$ и $T_2 = 2\pi/\Omega$, входящих в $A(\tau)$ функций соизмеримы, то функция $A(\tau)$ будет периодической, если же периоды несоизмеримы, ио функция $A(\tau)$ будет почти периодической. Аналогичное утверждение справедливо и для функции $B(\tau)$.

Обозначим через $\langle g(t)\rangle$ среднее значение периодической или почти периодической функции $g(t)$. Усредняя систему (6), получим усредненную систему

$$\begin{array}{l} \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \varepsilon\bar{z}, \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = -\varepsilon[\langle A(\tau)\rangle\sin\bar{y} + \langle B(\tau)\rangle\cos\bar{y}]. \end{array} \tag{7}$$

Усредненную систему можно записать в виде уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \varepsilon^2[\langle A(\tau)\rangle\sin\bar{y} + \langle B(\tau)\rangle\cos\bar{y}] = 0.$$

В исходном времени t усредненное уравнение выглядит следующим образом

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + [\langle A(\tau)\rangle\sin\bar{y} + \langle B(\tau)\rangle\cos\bar{y}] = 0.$$

Мы рассмотрим маятниковое уравнение, которое представляет интерес для теории сверхпроводимости (см.[3])

$$x'' + \varepsilon\alpha x' + \sin x = \frac{M}{\varepsilon^2}f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \eta, \tag{8}$$

где α - коэффициент затухания, η - постоянная.

В уравнении (8) сделаем замену

$$x = y + \gamma\frac{t}{\varepsilon} + G(\frac{t}{\varepsilon}),$$

где функция $G(t)$ является решением уравнения

$$G" + \varepsilon\alpha G' = \frac{M}{\varepsilon^2}f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

После замены получим уравнение

$$y'' + \varepsilon\alpha y' + \alpha\gamma + \sin\left(y + \gamma\frac{t}{\varepsilon} + G(\frac{t}{\varepsilon})\right) = \eta.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$y'' + \varepsilon\alpha y' + \alpha\gamma + A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin y + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\cos y = \eta, \tag{9}$$

где

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left[\gamma\frac{t}{\varepsilon} + \left(G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right], \quad B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left[\gamma\frac{t}{\varepsilon} + \left(G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right].$$

В уравнении (9) сделаем замену времени $\tau = t/\varepsilon$. Получим уравнение

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \varepsilon^2\alpha\frac{dy}{d\tau} + \varepsilon^2\alpha\gamma + \varepsilon^2[A(\tau)\sin y + B(\tau)\cos y] - \varepsilon^2\eta = 0. \tag{10}$$

От уравнения (10) перейдем к системе уравнений

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\varepsilon(\alpha\frac{dy}{d\tau} + \alpha\gamma + [A(\tau)\sin y + B(\tau)\cos y] + \eta). \end{array} \tag{11}$$

Система (11) находится в стандартной форме для применения метода усреднения. Усредняя систему (11), получим усредненную систему

$$\begin{array}{l} \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \varepsilon\bar{z}, \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = -\varepsilon(\alpha\frac{d\bar{y}}{d\tau} + \alpha\gamma + [\langle A(\tau)\rangle\sin\bar{y} + \langle B(\tau)\rangle\cos\bar{y}] + \eta). \end{array} \tag{12}$$

Систему (12) можно записать в виде одного уравнения второго порядка. Мы запишем ее в исходном времени t

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \alpha\frac{d\bar{y}}{dt} + \alpha\gamma + [\langle A(\tau)\rangle\sin\bar{y} + \langle B(\tau)\rangle\cos\bar{y}] - \eta = 0.$$

В качестве примера возьмем функцию

$$f(t) = \sin\Omega t.$$

Функцию $G(t)$ вычисляем из уравнения

$$G'' + \varepsilon\alpha G(t) = \frac{M}{\varepsilon^2}\sin\frac{\Omega t}{\varepsilon}.$$

Легко видеть, что

$$G(t) = -\frac{M}{\Omega^2 + \alpha^2\varepsilon^4}\sin\frac{\Omega t}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2).$$

Теперь нам нужно вычислить средние значения функций

$$A(\tau) = \cos\gamma\tau\cos G(\tau) - \sin\gamma\tau\sin G(\tau)$$

и

$$B(\tau) = \sin\gamma\tau\cos G(\tau) + \cos\gamma\tau\sin G(\tau).$$

Нам понадобятся следующие известные соотношения для функций Бесселя (см., напр. [8])

$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z)\cos(2k\theta),$$
$$\sin(z\sin\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z)\sin[(2k+1)\theta],$$

где $J_k(z)$ - функция Бесселя целого порядка k. Из них вытекает, что

$$A(\tau) = \cos\gamma\tau\left[J_0(\Gamma) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\Gamma)\cos 2k\Omega\tau\right] - \sin\gamma\tau\left[2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\Gamma)\sin(2k+1)\Omega\right],$$

$$B(\tau) = \sin\gamma\tau\left[J_0(\Gamma) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\Gamma)\cos 2k\Omega\tau\right] + \cos\gamma\tau\left[2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\Gamma)\sin(2k+1)\Omega\tau\right],$$

где

$$\Gamma = -\frac{M}{\Omega^2 + \alpha^2\varepsilon^4}.$$

Если отношение

$$\frac{\gamma}{\Omega} = k, \tag{13}$$

где k - целое число, то среднее значение функции $A(\tau)$ отлично от нуля. Среднее значение $\langle A(\tau)\rangle = J_{2k}(\Gamma)$ при $\gamma = 2k\Omega$ и $\langle A(\tau)\rangle = -J_{2k+1}(\Gamma)$ при $\gamma = (2k+1)\Omega$. Если выполняется соотношение (13), то среднее значение функции $B(\tau)$ равно нулю. Если соотношение (13) не выполняется, то средние значения функций $A(\tau)$, $B(\tau)$ равны нулю.

Усредненное уравнение во времени t имеет вид

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \alpha\frac{d\bar{y}}{dt} + \alpha\gamma + J_{2k}(\Gamma)\sin\bar{y} - \eta = 0, \tag{14}$$

или

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \alpha\frac{d\bar{y}}{dt} + \alpha\gamma - J_{2k+1}(\Gamma)\sin\bar{y} - \eta = 0, \tag{15}$$

Стационарные решения уравнения (14) определяются из уравнения

$$\sin\bar{y} = \frac{\eta - \alpha\gamma}{J_{2k}(\Gamma)}. \tag{16}$$

Будем предполагать для определенности, что

$$\frac{\eta - \alpha\gamma}{J_{2k}(\Gamma)} > 0.$$

Решения уравнения (16) существуют, если

$$\frac{\eta - \alpha\gamma}{J_{2k}(\Gamma)} < 1. \tag{17}$$

При выполнении условия (17) получаем два решения

$$0 < \bar{y}_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \bar{y}_2 < \pi.$$

Линеаризуя уравнение (14) на этих решениях, получим, что решение $\bar{y}_1$ асимптотически устойчиво, а решение $\bar{y}_2$ неустойчиво при предположении, что $J_{2k}(\Gamma) > 0$. Из теоремы об усреднении на бесконечном промежутке (см. [6,7]) следует, что при достаточно малых ε система (11) имеет асимптотически устойчивое $2\pi/\Omega$-периодическое решение $y_1(\tau)$, близкое к $\bar{y}_1$, и неустойчивое $2\pi/\Omega$-периодическое решение, близкое к $y_2(\tau)$. Отсюда следует, что при достаточно малых ε уравнение (4) имеет два решения, которые представляются в виде

$$x_1(t) = y_1(\frac{t}{\varepsilon}) + 2k\Omega\frac{t}{\varepsilon} + G(\frac{t}{\varepsilon}), \quad x_2(t) = y_2(\frac{t}{\varepsilon}) + 2k\Omega\frac{t}{\varepsilon} + G(\frac{t}{\varepsilon}).$$

Если $J_{2k}(\Gamma) < 0$, то решение $y_1(\tau)$ неустойчиво, а решение $y_2(\tau)$ асимптотически устойчиво.

Аналогично рассматривается случай, когда усредненное уравнение имеет вид (15).

Литература

1. Miles J. Directly forced oscillations of an inverted pendulum, Physical Letters A, 1988, vol. 133, issue 6, p. 295–297.
2. Siahmacoun A., French L.A., Patterson J. Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven pendulum in a repulsive magnetic field, American Journal of Physics, 1997, vol.63, n. 5, p. 393–400.
3. Rasmussen K., Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N. High-order effects on Shapiro steps in Josephon junctions, Physical Review B, 1999, vol. 59, n. 1, p. 58–61. 4. Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N. π kinks in strongly ac driven sine-Gordon systems, Physical Review E, 1998, vol. 58, n 1, R52–R55.
5. Бурд В.Ш. Кинки в сильно периодически возмущенном уравнении синус-Гордон, ВНТР, N 3(79), март 2014, Электронный журнал, http://vntr.ru/
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М.: Наука, 1974.- 411 с.
7. Burd V. Method of averaging for differential equations on an infinite interval. Theory and applications, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 255. Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2007, 356 c.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами под ред. М. Абрамовица и Стигун И.- М.: Наука, 1979.- 832 с.