УДК 534.1

ПОСТАНОВКА САМОСОГЛАСОВАННЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ И НАГРУЗКАМИ

© Елена Евгеньевна Лисенкова[1,2]
[1]Институт проблем машиностроения Российской академии наук
[2]Нижегородский институт управления – Филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации,
Нижний Новгород, Россия
EELissen@yandex.ru

Аннотация. *Выведены постановки самосогласаванных задач о движении одномерного объекта (стержень) по двумерным направляющим: пластина, плита. Получены энергетические соотношения типа уравнения Умова-Пойнтинга.*

Ключевые слова: *самосогласованная задача, двумерная система, движущееся закрепление.*

FORMULATION OF SELF-CONSISTENT PROBLEM DYNAMICS OF TWO-DIMENSIONAL SYSTEMS BEARERS MOVING LOAD

Elena E. Lisenkova[1,2]
[1]Mechanical Engineering Research Institutes, Russian Academy of Sciences
[2]Nizhegorodsky Management Institute - Branch of the Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of the Russian Federation,
Nizhny Novgorod, Russia
EELissen@yandex.ru

Abstract. *Prepared statement of self-consistent problems on the motion of one-dimensional object (rod) in a two-dimensional guide: plate stove. Energy correlations obtained equation type Umov-Poynting.*

Keywords: *self-consistent, two-dimensional system, moving consolidation.*

Исследованию динамического поведения двумерных упругих систем с движущимися нагрузками посвящено большое количество публикаций (см., например, литературу в [1,2]). Однако в них рассматривались лишь частные вопросы, а именно, в основном речь шла о вынужденных колебаниях пластин под действием движущихся нагрузок. Исключение составляют работы [3,4], в которых приводятся постановки краевых задач динамики двумерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями, исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. Ниже обобщаются, полученные в [3,4], результаты на случай, когда лагранжианы двумерной и одномерной систем зависят от смешанных производных по пространственной и временной переменным. Получены законы изменения энергии и волнового импульса как для всей сложной системы в целом «направляющая+движущийся объект», так и для отдельных ее частей.

1. Рассмотрим двумерную систему, имеющую форму полосы шириной $0 \le y \le b_0$ и длиной $x_1 \le x \le x_2$, вдоль которой безотрывно движется по неизвестному закону $x = \ell(y,t)$ одномерная нагрузка или закрепление, обладающие упругими и инерционными свойствами. В качестве одномерного объекта может выступать струна, балка и т.п.

Пусть $D=\{(x,y,t): x_1 \le x \le x_2, 0 \le y \le b_0, t_1 \le t \le t_2\}$ – некоторая область в пространстве *xyt*, где *x,y* – пространственные переменные, t – время; $D_0=\{(y,t):\ 0 \le y \le b_0, t_1 \le t \le t_2\}$ – проекция области *D* на плоскость *yt*. Поверхность $x=\ell(y,t)$, $(y,t)\in D_0$ делит область *D* на части D_1 и D_2 [4]. Колебания двумерной системы описывается некоторой непрерывной в *D* вектор-функцией

$$\mathbf{u}(x,y,t)=\begin{cases} {}^1\mathbf{u}(x,y,t)=\{{}^1u_1(x,y,t),\ldots,{}^1u_n(x,y,t)\}, & (x,y,t)\in D_1 \\ {}^2\mathbf{u}(x,y,t)=\{{}^2u_1(x,y,t),\ldots,{}^2u_n(x,y,t)\}, & (x,y,t)\in D_2 \end{cases}$$

Причем вектор-функции ${}^1\mathbf{u}(x,y,t)$, ${}^2\mathbf{u}(x,y,t)$ дважды непрерывно дифференцируемы в областях D_1 и D_2 соответственно. Будем полагать, что плотность функции Лагранжа $\lambda(x,y,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x,\mathbf{u}_y,\mathbf{u}_t,\mathbf{u}_{xx},\mathbf{u}_{xt},\mathbf{u}_{xy},\mathbf{u}_{yt},\mathbf{u}_{yy})$ двумерной системы зависит от вектор-функции обобщенных координат и ее производных до второго порядка включительно, кроме того,

$$\lambda=\begin{cases} {}^1\lambda & \text{при} \quad x<\ell(y,t) \\ {}^2\lambda & \text{при} \quad x>\ell(y,t) \end{cases}$$

В отличие от [3, 4], здесь учитываются смешанные производные обобщенных координат по пространственной и временной переменным. Такое представление позволяет описывать многие линейные и нелинейные модели упругих систем, в том числе с учетом влияния инерции вращения элемента тела [3,5]. Одномерный объект характеризуется плотностью функции Лагранжа $L=L\left(y,t,\ell,\ell_t,\ell_y,\ell_{yy},\ell_{yt},{}^0\mathbf{u},{}^0\mathbf{u}_t,{}^0\mathbf{u}_y,{}^0\mathbf{u}_{yy},{}^0\mathbf{u}_{yt},{}^0\mathbf{w},{}^0\mathbf{w}_t,{}^0\mathbf{w}_y,{}^0\mathbf{w}_{yy},{}^0\mathbf{w}_{yt}\right)$, которая имеет в качестве одной из обобщенных координат закон движения $\ell(y,t)$, являющийся неизвестной функцией задачи; ${}^0\mathbf{u}(y,t)={}^j\mathbf{u}(\ell(y,t),y,t)$, ${}^0\mathbf{w}(y,t)={}^j\mathbf{u}_x(\ell(y,t),y,t)$; *j*=1,2 соответствует областям слева и справа от движущегося объекта; *L*, ${}^1\lambda$, ${}^2\lambda$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции по совокупности своих аргументов.

Динамическое поведение направляющей и движущегося по ней объекта взаимообусловлено, а именно: характер колебаний двумерной системы зависит от закона движения объекта, а движение последнего происходит как под действием внешних сил, так и сил реакции со стороны направляющей.

Следуя методике постановок краевых задач, разработанной в [1, 3, 6] на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского, получим уравнения согласованного динамического поведения всей сложной системы «направляющая+движущийся объект» в целом:

$$\lambda_{\mathbf{u}}-\frac{\partial}{\partial x}\lambda_{\mathbf{u}_x}-\frac{\partial}{\partial y}\lambda_{\mathbf{u}_y}-\frac{\partial}{\partial t}\lambda_{\mathbf{u}_t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\lambda_{\mathbf{u}_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\lambda_{\mathbf{u}_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\lambda_{\mathbf{u}_{yy}}+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\lambda_{\mathbf{u}_{xt}}+\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}\lambda_{\mathbf{u}_{yt}}=-\mathbf{q} \qquad (x,y,t)\in \mathrm{Int}D_j, \quad j=1,2 \qquad (1.1)$$

$$L_{0\mathbf{u}}-\frac{\partial}{\partial t}L_{0\mathbf{u}_t}-\frac{\partial}{\partial y}L_{0\mathbf{u}_y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}L_{0\mathbf{u}_{yy}}+\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}L_{0\mathbf{u}_{yt}}=[\mathbf{N}]-\mathbf{q}_1\quad (y,t)\in D_0 \tag{1.2}$$

$$L_{0\mathbf{w}}-\frac{\partial}{\partial t}L_{0\mathbf{w}_t}-\frac{\partial}{\partial y}L_{0\mathbf{w}_y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}L_{0\mathbf{w}_{yy}}+\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}L_{0\mathbf{w}_{yt}}=[\mathbf{M}]-\mathbf{q}_2\quad (y,t)\in D_0 \tag{1.3}$$

$$L_\ell-\frac{\partial}{\partial t}L_{\ell_t}-\frac{\partial}{\partial y}L_{\ell_y}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}L_{\ell_{yy}}+\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}L_{\ell_{yt}}=[F]-q_3\quad (y,t)\in D_0 \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u}(\ell-0,y,t)=\mathbf{u}(\ell+0,y,t)={}^0\mathbf{u}(y,t)\qquad (y,t)\in D_0 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{u}_x(\ell-0,y,t)=\mathbf{u}_x(\ell+0,y,t)={}^0\mathbf{w}(y,t)\qquad (y,t)\in D_0 \tag{1.6}$$

Здесь $F=\lambda-(\mathbf{u}_x\mathbf{N}+\mathbf{u}_{xx}\mathbf{M})$,

$$\mathbf{N}=\lambda_{\mathbf{u}_x}-\frac{\partial}{\partial x}\lambda_{\mathbf{u}_{xx}}-\frac{\partial}{\partial y}\lambda_{\mathbf{u}_{xy}}-\frac{\partial}{\partial t}\lambda_{\mathbf{u}_{xt}}-\ell_y\left(\lambda_{\mathbf{u}_y}-2\frac{\partial}{\partial y}\lambda_{\mathbf{u}_{yy}}-\frac{\partial}{\partial t}\lambda_{\mathbf{u}_{yt}}\right)+$$

$$+\ell_{yy}\lambda_{\mathbf{u}_{yy}}+\ell_y^2\frac{\partial}{\partial x}\lambda_{\mathbf{u}_{yy}}-\ell_t\left(\lambda_{\mathbf{u}_t}-\frac{\partial}{\partial y}\lambda_{\mathbf{u}_{yt}}-\ell_y\frac{\partial}{\partial x}\lambda_{\mathbf{u}_{yt}}\right)+\ell_{yt}\lambda_{\mathbf{u}_{yt}},$$

$$\mathbf{M}=\lambda_{\mathbf{u}_{xx}}-\ell_y\left(\lambda_{\mathbf{u}_{xy}}-\ell_y\lambda_{\mathbf{u}_{yy}}\right)-\ell_t\left(\lambda_{\mathbf{u}_{xt}}-\ell_y\lambda_{\mathbf{u}_{yt}}\right),$$

$$[A(x,y,t)]=A(\ell(y,t)+0,y,t)-A(\ell(y,t)-0,y,t),$$

$$\lambda_{\mathbf{a}}=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial a_1},\ldots,\frac{\partial\lambda}{\partial a_n}\right),\ L_{\mathbf{a}}=\left(\frac{\partial L}{\partial a_1},\ldots,\frac{\partial L}{\partial a_n}\right)\ \text{при}\ \mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$$

В правые части соотношений (1.1)-(1.4), как это обычно делается, введены добавки, учитывающие действия сторонних и диссипативных сил, учет которых при постановке вариационных задач сопряжен с некоторыми трудностями. **N**, **M** – плотности обобщенных сил, действующих со стороны двумерной системы, F – линейная плотность сил давления волн со стороны двумерной направляющей. Уравнение (1.1) описывает динамику двумерной системы; (1.2)-(1.4) – баланса обобщенных сил на движущейся границе, причем (1.4) есть закон движения объекта относительно упругой полосы; соотношения (1.5), (1.6) – определяют условия непрерывности двумерной системы и безотрывного движения вдоль нее объекта. В случае заданного закона движения, (1.4) определяет силу, необходимую для поддержания такого движения.

Для полной постановки задачи (1.1)-(1.6) необходимо добавить условия на краях полосы и согласованные начальные условия.

2. Выявить различные причины динамических эффектов, связанных с взаимодействием волн с движущимися объектами, а также определить интегралы движения, представляющие традиционный интерес при изучении динамического поведения механических систем, помогают законы изменения энергии и импульса. Из уравнений (1.1)-(1.6) можно получить законы изменения энергии и импульса как для всей сложной системы в целом, так и для отдельных ее частей.

Зададимся целью получить уравнения изменения энергии малого элемента σ двумерной системы. Умножим скалярно уравнение (1.1) на $\mathbf{u}_t(x,y,t)$ и преобразуем к виду

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{S}=-\lambda_t+\mathbf{q}\mathbf{u}_t \tag{2.1}$$

где $h = \mathbf{u}_t \lambda_{\mathbf{u}_t} + \mathbf{u}_{xt} \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} + \mathbf{u}_{yt} \lambda_{\mathbf{u}_{yt}} - \lambda$ – плотность функции Гамильтона, $\mathbf{S}$ – вектор с компонентами

$$S_x = \mathbf{u}_t \left(\lambda_{\mathbf{u}_x} - \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} - \frac{\partial}{\partial t} \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} \right) + \mathbf{u}_{xt} \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{yt} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} \qquad (2.2)$$

$$S_y = \mathbf{u}_t \left(\lambda_{\mathbf{u}_y} - \frac{\partial}{\partial y} \lambda_{\mathbf{u}_{yy}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} - \frac{\partial}{\partial t} \lambda_{\mathbf{u}_{yt}} \right) + \mathbf{u}_{yt} \lambda_{\mathbf{u}_{yy}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{xt} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}}$$

Проинтегрируем (2.1) по размерам элемента σ и, применив ко второму слагаемому в левой части теорему Гаусса-Остроградского, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} h dx dy + \oint_{\gamma} S_n d\tau = \iint_{\sigma} \left(-\lambda_t + \mathbf{q} \mathbf{u}_t \right) dx dy \qquad (2.3)$$

Первое слагаемое в левой части (2.3) есть скорость изменения энергии рассматриваемого элемента двумерной системы, следовательно, второе слагаемое есть поток энергии через границу γ, а вектор $\mathbf{S}$ – плотность этого потока – количество энергии, протекающее в единицу времени через единицу длины ограничивающего σ контура. Вектор плотности потока энергии (2.2), часто называемый вектором Умова-Пойнтинга, широко используется в электродинамике и механике сплошных сред [7-9] для описания волновых процессов. Справа в (2.3) стоят мощность источника, изменяющего параметры системы, и работа, совершаемая в единицу времени внешними силами.

Для получения уравнений переноса волнового импульса умножим уравнение колебаний направляющей (1.1) на $\mathbf{u}_x$ и $\mathbf{u}_y$, и приведем к виду

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \operatorname{div} T = \mathbf{F}_{\text{от}} - \mathbf{q} \operatorname{grad} \mathbf{u} \qquad (2.4)$$

где $\mathbf{p} = \{ p_x, p_y \}$ – вектор плотности волнового импульса с компонентами

$$p_x = -\mathbf{u}_x \lambda_{\mathbf{u}_t} - \mathbf{u}_{xx} \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} - \mathbf{u}_{yx} \lambda_{\mathbf{u}_{yt}} \qquad (2.5)$$

$$p_y = -\mathbf{u}_y \lambda_{\mathbf{u}_t} - \mathbf{u}_{xy} \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} - \mathbf{u}_{yy} \lambda_{\mathbf{u}_{yt}}$$

$T = \begin{Vmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{Vmatrix}$ – тензор плотности потока волнового импульса с компонентами

$$T_{xx} = \lambda - \left\{ \mathbf{u}_x \left(\lambda_{\mathbf{u}_x} - \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} - \frac{\partial}{\partial t} \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} \right) + \mathbf{u}_{xx} \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{xy} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} \right\} \qquad (2.6)$$

$$T_{xy} = -\left\{ \mathbf{u}_y \left(\lambda_{\mathbf{u}_x} - \frac{\partial}{\partial x} \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} - \frac{\partial}{\partial t} \lambda_{\mathbf{u}_{xt}} \right) + \mathbf{u}_{xy} \lambda_{\mathbf{u}_{xx}} + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{yy} \lambda_{\mathbf{u}_{xy}} \right\},$$

$$T_{yx}=-\left\{\mathbf{u}_x\left(\lambda_{\mathbf{u}_y}-\frac{\partial}{\partial y}\lambda_{\mathbf{u}_{yy}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\lambda_{\mathbf{u}_{xy}}-\frac{\partial}{\partial t}\lambda_{\mathbf{u}_{yt}}\right)+\mathbf{u}_{xy}\lambda_{\mathbf{u}_{yy}}+\frac{1}{2}\mathbf{u}_{xx}\lambda_{\mathbf{u}_{xy}}\right\},$$

$$T_{yy}=\lambda-\left\{\mathbf{u}_y\left(\lambda_{\mathbf{u}_y}-\frac{\partial}{\partial y}\lambda_{\mathbf{u}_{yy}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\lambda_{\mathbf{u}_{xy}}-\frac{\partial}{\partial t}\lambda_{\mathbf{u}_{yt}}\right)+\mathbf{u}_{yy}\lambda_{\mathbf{u}_{yy}}+\frac{1}{2}\mathbf{u}_{xy}\lambda_{\mathbf{u}_{xy}}\right\}$$

Плотность потока импульса через границы элемента двумерной системы есть не что иное, как плотность действующей на этот элемент силы, поэтому тензор (2.6) часто называют тензором напряжений [8]. Справа в уравнении (2.4) стоят вектор плотности сил отдачи $\mathbf{F}_{\text{от}}=\{\lambda_x,\lambda_y\}$, возникающих из-за распределенного отражения волн при их распространении в неограниченной системе, и вектор плотности внешних сил.

С целью получения уравнений переноса энергии и импульса вдоль движущейся одномерной системы, умножим (1.2)-(1.4) на соответствующие частные производные первого

$$\frac{\partial h^0}{\partial t}+\frac{\partial S^0}{\partial t}=-{}^0\mathbf{u}_t([\mathbf{N}]-\mathbf{q}_1)-{}^0\mathbf{w}_t([\mathbf{M}]-\mathbf{q}_2)-\ell_t([F]-q_3)-L_t$$ порядка обобщенных координат ${}^0\mathbf{u}(y,t)$, ${}^0\mathbf{w}(y,t)$, $\ell(y,t)$ и приведем к виду

$$\frac{\partial p^0}{\partial t}+\frac{\partial T^0}{\partial t}={}^0\mathbf{u}_y([\mathbf{N}]-\mathbf{q}_1)+{}^0\mathbf{w}_y([\mathbf{M}]-\mathbf{q}_2)+\ell_y([F]-q_3)+L_y \qquad (2.7)$$

Здесь $h^0={}^0\mathbf{u}_tL_{0_{\mathbf{u}_t}}+{}^0\mathbf{w}_tL_{0_{\mathbf{w}_t}}+\ell_tL_{\ell_t}+{}^0\mathbf{u}_{yt}L_{0_{\mathbf{u}_{yt}}}+{}^0\mathbf{w}_{yt}L_{0_{\mathbf{w}_{yt}}}+\ell_{yt}L_{\ell_{yt}}-L$ – плотность функции Гамильтона движущегося объекта,

$$S^0={}^0\mathbf{u}_t\left(L_{0_{\mathbf{u}_y}}-\frac{\partial}{\partial t}L_{0_{\mathbf{u}_{yt}}}-\frac{\partial}{\partial y}L_{0_{\mathbf{u}_{yy}}}\right)+{}^0\mathbf{w}_t\left(L_{0_{\mathbf{w}_y}}-\frac{\partial}{\partial t}L_{0_{\mathbf{w}_{yt}}}-\frac{\partial}{\partial y}L_{0_{\mathbf{w}_{yy}}}\right)+$$

$$+\ell_t\left(L_{\ell_y}-\frac{\partial}{\partial t}L_{\ell_{yt}}-\frac{\partial}{\partial y}L_{\ell_{yy}}\right)+{}^0\mathbf{u}_{yt}L_{0_{\mathbf{u}_{yy}}}+{}^0\mathbf{w}_{yt}L_{0_{\mathbf{w}_{yy}}}+\ell_{yt}L_{\ell_{yy}}$$ – плотность потока энергии, $p^0=-{}^0\mathbf{u}_yL_{0_{\mathbf{u}_t}}-{}^0\mathbf{w}_yL_{0_{\mathbf{w}_t}}-\ell_yL_{\ell_t}-{}^0\mathbf{u}_{yy}L_{0_{\mathbf{u}_{yt}}}-{}^0\mathbf{w}_{yy}L_{0_{\mathbf{w}_{yt}}}-\ell_{yy}L_{\ell_{yt}}$ – плотность волнового импульса,

$$T^0=L-{}^0\mathbf{u}_y\left(L_{0_{\mathbf{u}_y}}-\frac{\partial}{\partial t}L_{0_{\mathbf{u}_{yt}}}-\frac{\partial}{\partial y}L_{0_{\mathbf{u}_{yy}}}\right)-{}^0\mathbf{w}_y\left(L_{0_{\mathbf{w}_y}}-\frac{\partial}{\partial t}L_{0_{\mathbf{w}_{yt}}}-\frac{\partial}{\partial y}L_{0_{\mathbf{w}_{yy}}}\right)-$$

$$-\ell_y\left(L_{\ell_y}-\frac{\partial}{\partial t}L_{\ell_{yt}}-\frac{\partial}{\partial y}L_{\ell_{yy}}\right)-{}^0\mathbf{u}_{yy}L_{0_{\mathbf{u}_{yy}}}-{}^0\mathbf{w}_{yy}L_{0_{\mathbf{w}_{yy}}}-\ell_{yy}L_{\ell_{yy}}$$ – плотность потока волнового импульса, L_t, L_y – мощность источника, изменяющего параметры объекта, и плотность сил отдачи соответственно.

Интегрируя уравнения переноса энергии (2.1) и волнового импульса (2.4) по площади σ, которая разделена движущимся объектом на две (σ_1,σ_2), а (2.7) вдоль $y\in[0,b_0]$, находим уравнения изменения энергии направляющей: $H^j=\iint\limits_{\sigma_j}hdxdy$

$$\frac{dH^j}{dt}=-\oint_{\Gamma_j} S_n^j d\tau-(-1)^j\int_0^{b_0}\ell_t h^j\Big|_{x=\ell}dy+\iint_{\sigma_j}\left(-\lambda_t^j+\mathbf{q}^j\mathbf{u}_t^j\right)dxdy \qquad (2.8)$$

движущейся одномерной системы $H^0=\int_0^{b_0}h^0 dy$:

$$\frac{dH^0}{dt}=-\left[S^0\right]_0^{b_0}-\int_0^{b_0}\left\{{}^0\mathbf{u}_t([\mathbf{N}]-\mathbf{q}_1)+{}^0\mathbf{w}_t([\mathbf{M}]-\mathbf{q}_2)+\ell_t([F]-q_3)+L_t\right\}dy \qquad (2.9)$$

а также выражения для скорости изменения волновых импульсов двумерной ($\mathbf{P}^j=\iint_{\sigma_j}\mathbf{p}^j dxdy$) и одномерной ($P^0=\int_0^{b_0}p^0 dy$) систем:

$$\frac{d\mathbf{P}^j}{dt}=-\oint_{\Gamma_j} T_n^j d\tau-(-1)^j\int_0^{b_0}\ell_t\mathbf{p}^j\Big|_{x=\ell}dy+\iint_{\sigma_j}\left(\mathbf{F}_{\text{от}}^j-\mathbf{q}^j\,\mathrm{grad}\,\mathbf{u}^j\right)dxdy$$

$$\frac{dP^0}{dt}=-\left[T^0\right]_0^{b_0}+\int_0^{b_0}\left\{{}^0\mathbf{u}_y([\mathbf{N}]-\mathbf{q}_1)+{}^0\mathbf{w}_y([\mathbf{M}]-\mathbf{q}_2)+\ell_y([F]-q_3)+L_y\right\}dy$$

Индекс j=1,2 соответствует областям слева и справа от движущегося объекта, а $\Gamma_{1,2}$ – контуры, ограничивающие области $\sigma_{1,2}$. Складывая (2.8) и (2.9), получим уравнение изменения энергии всей сложной системы в целом «направляющая+движущийся объект».

3. В качестве примера рассмотрим движение одномерной нагрузки вдоль однородной пластины, имеющей форму полосы. Для лагранжиана пластины простейшей модели с учетом инерции вращения ее элемента при изгибе имеем выражение [1]

$$\lambda=\frac{1}{2}\left\{\rho h_* u_t^2+\frac{\rho h_*^3}{12}\left(u_{xt}^2+u_{yt}^2\right)-\frac{h_*^3}{6}\left(\frac{\Lambda+2\mu}{2}\left(u_{xx}+u_{yy}\right)^2+2\mu\left(u_{xy}^2-u_{xx}u_{yy}\right)\right)-ku^2\right\}$$

Здесь ρh_* – поверхностная плотность, Λ, μ – константы Лямэ, h_* – толщина пластины, k – коэффициент упругости основания, $u(x,y,t)$ – поперечное смещение пластины.

Пусть механический объект представляет собой стержень, совершающий изгибные и крутильные колебания, лагранжиан которого имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\left\{\rho_0 F_0\left({}^0u_t^2+\ell_t^2\right)+\rho_0 I_x\,{}^0u_{yt}^2+\rho_0 I_0\varphi_t^2-E_0\left(I_x\,{}^0u_{yy}^2+I_z\ell_{yy}^2\right)-G_0 I_0\varphi_y^2-k_0\,{}^0u^2\right\}$$

где $\rho_0 F_0$ – погонная плотность, I_0, I_x, I_z – полярный момент инерции и моменты инерции поперечного сечения стержня относительно осей *ox* и *oz*. соответственно. G_0 – модуль сдвига, k_0 – коэффициент упругости, ${}^0u(y,t)$, $\varphi(y,t)$ – поперечное смещение и угол поворота сечения стержня.

Подставляя выражения λ, L в (1.1)-(1.6), получим, что изгибные колебания пластины описываются решением уравнения

$$\rho h_* u_{tt}-\frac{\rho h_*^3}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u+\frac{(\Lambda+2\mu)h_*^3}{12}\Delta\Delta u+ku=0$$

удовлетворяющим на движущейся границе $x=\ell(y,t)$ условиям неразрывности пластины

$$ {}^0u(y,t) = u(\ell - 0, y, t) = u(\ell + 0, y, t) $$

отсутствия у нее изломов

$$ \varphi(y,t) = u_x(\ell - 0, y, t) = u_x(\ell + 0, y, t) $$

уравнениям баланса изгибающих моментов

$$ \rho_0 I_0 \varphi_{tt} - G_0 I_0 \varphi_{yy} = -[M] + q_2 $$

и поперечных сил

$$ \rho_0 F_0 {}^0u_{tt} - \rho_0 I_x {}^0u_{yytt} + E_0 I_x {}^0u_{yyyy} + k_0 {}^0u = -[N] + q_1 $$

Уравнение

$$ \rho_0 F_0 \ell_{tt} + \rho_0 I_z \ell_{yyyy} = -[F] + q_3 $$

определяет закон движения упругого стержня по пластине под действием внешних сил и сил давления изгибных волн пластины. Здесь

$$ M = -\frac{h_*^3}{12}\left\{(\Lambda + 2\mu)\left(u_{xx} + \ell_y^2 u_{yy}\right) - 4\mu\ell_y u_{xy} + \Lambda\left(u_{yy} + \ell_y^2 u_{xx}\right) + \rho\ell_t\left(u_{xt} - \ell_y u_{yt}\right)\right\}, $$

$$ N = \frac{h_*^3}{12}\left\{(\Lambda + 2\mu)\left(u_{xxx} + \left(1 - \ell_y^2\right)u_{xyy} - 2\ell_y u_{yyy} - \ell_{yy} u_{yy}\right) + 2\mu u_{xyy} - \right. $$

$$ - \Lambda\left(2\ell_y u_{xxy} + \ell_{yy} u_{xx} + \ell_y^2 u_{xxx}\right) - \rho\left(u_{xtt} - \ell_y u_{ytt} - \ell_{yt} u_{yt}\right) - $$

$$ \left. - \rho\ell_t\left(\frac{12}{h_*^2}u_t - u_{yyt} - \ell_y u_{xyt}\right)\right\}, $$

$$ F = \lambda - \left(u_x N + u_{xx} M\right) $$

– соответственно изгибающие моменты, поперечные силы и силы давления волн, действующие на стержень со стороны пластины.

Добавив краевые условия на границах $0 \le y \le b_0$, $x_1 \le x \le x_2$ пластины и согласованные начальные условия, будем иметь полную постановку начально-краевой задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01637).

Список литературы

1. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит. 2001. – 320 с.
2. Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А.В., Чижиумов С.Д., Джабраилов М.Р., Морозов В.С., Кустов А.Н. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. – М.: Изд-во «Академия Естествознания». 2008. – 330 с.
3. Болдин В.П., Весницкий А.И. Краевые задачи динамики двумерных упругих систем с движущимися нагрузками и закреплениями // Машиноведение. 1989. № 1. С. 70-75.
4. Болдин В.П., Маланов С.Б., Уткин Г.А. Постановка краевых задач динамики двумерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 34-39.
5. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / Под. ред. В.В. Болотина – 2-е изд. М.: Машиностроение. 1999. 504 с.
6. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. – Изд. «Наш дом». Н.Новгород. 2010. – 248 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – Изд. 4-е, стереотип.. — М.: Физматлит, 2003. — 656 с.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – Изд. 8-е, стереотип. — М.: Физматлит. 2006. — 534 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехтеоретиздат. 1953. – 788 с.