УДК 621.01

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ СИНТЕЗ ФУНКЦИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ МАШИН ПРИ СЛОЖНЫХ КОМПЛЕКСАХ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

И.И. ВУЛЬФСОН

Определены структурные параметры функции перемещения выходных звеньев циклового механизма при различных модификациях исходных условий, связывающих максимальную скорость рабочего органа и скорость входного звена. На базе предложенных критериев оптимизации сформулированы рекомендации по выбору законов движения исполнительных органов машин.

1. Предварительные замечания. При проектировании входных звеньев механизмов машин-автоматов встречаются случаи, когда синтез закона движения приводимого рабочего органа должен производиться при фиксированном максимальном значении первой передаточной функции механизма. Подобные исходные условия наблюдаются обычно либо в передаточных или подающих механизмах, в которых кинематические требования предопределяют связь между максимальной скоростью рабочего органа и угловой скоростью входного звена, либо в тех случаях, когда цикловые механизмы используются для сообщения на некотором участке постоянной скорости движения.

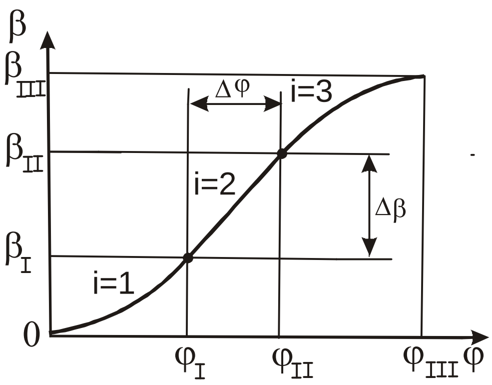

Рис.1

Несмотря на многообразие модификаций исходных условий, сопровождающих указанное требование рациональный синтез кинематических функций рабочего органа в этом случае приобретает специфический характер и требует особого рассмотрения. Отдельные вопросы рассматриваемой задачи освещались в работах [1,2].

В данной статье рассматривается общая постановка задачи, и анализируются семь основных комплексов исходных условий этой задачи, встречающихся в инженерной практике. Для исследованных случаев определяются значения структурных параметров закона движения, выявляются области существования решений задачи, а также даются методы возможной оптимизации этих решений.

2. Постановка задачи Независимо от специфических условий, учитываемых при проектировании циклового механизма, он должен удовлетворять ряду общих требований как источник прерывного движения рабочего органа. К числу таковых обычно относится требование непрерывности скорости движения, которое предопределяет структуру хода рабочего органа как совокупность трех участков (рис.1): разбега (i = 1), участка равномерного движения (i = 2) и выбега (i = 3).

На каждом участке движения дифференцированно может быть задана безразмерная характеристическая функция следующего вида:

$$\theta_i(\tau_i) = \frac{\beta_i - \beta_{iM}}{\beta_{iБ} - \beta_{iM}}, \tag{1}$$

$$\tau_i = \frac{\varphi_i - \varphi_{iM}}{\varphi_{iБ} - \varphi_{iM}}. \tag{2}$$

Здесь i — номер участка (i = 1, 2, 3); β_i — текущее значение обобщенных перемещений толкателя на рассматриваемом участке движения, измеряемое в линейных величинах для поступательного перемещения толкателя и в угловых – для перемещений коромыслового толкателя; φ_i – текущее значение угла поворота входного звена. Индексами Б и М обозначены соответственно наибольшие и наименьшие значения указанных параметров в пределах участка i. Отсчет всех параметров производится от момента начала движения толкателя.

Воспользовавшись характеристической функцией $\theta_i(\tau_i)$, запишем выражения для обобщенных перемещений, скоростей и ускорений толкателя при постоянной угловой скорости входного звена ω = const

$$\beta_i = \beta_{iM} + (\beta_{iБ} - \beta_{iM})\theta_i(\tau_i), \tag{3}$$

$$\dot{\beta}_i = \omega \, \frac{\beta_{iБ} - \beta_{iM}}{\varphi_{iБ} - \varphi_{iM}} \, \theta'_i(\tau_i), \tag{4}$$

$$\ddot{\beta}_i = \omega^2 \, \frac{\beta_{iБ} - \beta_{iM}}{(\varphi_{iБ} - \varphi_{iM})^2} \, \theta''_i(\tau_i). \tag{5}$$

Используя приведенные в таблице 1 граничные значения параметров, запишем функциональные связи между этими значениями, выражающие условия безударного перехода на границах участков [2,3]

$$\beta_I = \frac{\beta_{III} - \Delta\beta}{1 + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda,}, \tag{6}$$

$$\varphi_I = \frac{\varphi_{III} - \Delta\varphi}{1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda,}, \tag{7}$$

$$\beta_{II} = \frac{\beta_{III} + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda\Delta\beta}{1 + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda,}, \tag{8}$$

$$\varphi_{II} = \frac{\varphi_{III} - \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\Delta\varphi}{1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda,}, \tag{9}$$

где

$$\Delta\varphi = \frac{\left(1 + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda\right)\varphi_{III}\Delta\beta}{\left(1 + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda\right)\Delta\beta + \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\right)\left(\beta_{III} - \Delta\beta\right)\theta'_{1\max}}, \tag{10}$$

$$\Delta\beta = \beta_{II} - \beta_I,\ \Delta\varphi = \varphi_{II} - \varphi_I,$$

$$\nu_1 = \frac{\theta'_{1max}}{\theta'_{3max}}, \qquad \nu_2 = \left|\frac{\theta''_{1max}}{\theta''_{3max}}\right|, \qquad \lambda = \left|\frac{\ddot{\beta}_{1max}}{\ddot{\beta}_{3max}}\right|.$$

При идентичном типе безразмерных функций, принятых на разбеге и выбеге (i=1, 3), имеем $\theta'_{1\max} = \theta'_{3\max}$ и $\theta''_{1\max} = -\theta''_{3\max}$. Безразмерные характеристики для семейства функций так называемой модифицированной трапеции приведены в работах [2,3,4]

Далее перейдем к учету специфических условий, характерных для исследуемой задачи.

Условно разделим эти условия на две разновидности: основные и дополнительные. При этом к первому виду условий будем относить лишь те требования данной задачи, которые будут неизменно сохраняться во всех ее модификациях.

Таблица 1.

i	β_{iM}	$\beta_{iБ}$	φ_{iM}	$\varphi_{iБ}$
1	0	β_I	0	φ_I
2	β_I	β_{II}	φ_I	φ_{II}
3	β_{II}	β_{III}	φ_{II}	φ_{III}

Согласно предложению проф. Х. Ф. Кетова были введены в рассмотрение первая и вторая передаточные функции механизма $\Pi'(\varphi)$и $\Pi''(\varphi)$, которые при ω = const принимают вид

$$\Pi_i'(\varphi)=\frac{\dot{\beta}_i}{\omega}, \tag{11}$$

$$\Pi_i''(\varphi)=\frac{\ddot{\beta}_i}{\omega^2}. \tag{12}$$

Сопоставляя формулы (11) и (4), (12) и (5), запишем

$$\Pi'(\varphi)=\frac{\beta_{iБ}-\beta_{iM}}{\varphi_{iБ}-\varphi_{iM}}\theta_i'(\tau_i), \tag{13}$$

$$\Pi''(\varphi)=\frac{\beta_{iБ}-\beta_{iM}}{(\varphi_{iБ}-\varphi_{iM})^2}\theta_i''(\tau_i). \tag{14}$$

В нашей задаче в качестве одного из основных условий будет рассматриваться фиксированное максимальное значение первой передаточной функции механизма. Тогда основное условие рассматриваемой задачи запишем в виде

$$\frac{1}{\Pi'(\varphi)_{\max}}=k=\text{const}. \tag{15}$$

Принимая во внимание (13) и (15), получим простую зависимость для определения среднего значения первой передаточной функции на соответствующем участке движения толкателя

$$\left[\Pi_i'(\varphi)\right]_{\text{ср}}=\frac{1}{k\theta_{\text{imax}}'}. \tag{16}$$

На данном этапе исследования к числу заданных основных условий будем также относить безразмерную характеристическую функцию $\theta_i\left(\tau_i\right)$.

Задачей данного исследования будем считать рациональный синтез функции перемещения рабочего органа при соблюдении приведенных выше основных условий и ряда комплексов дополнительных условий задачи.

3. Определение структурных параметров и областей существования решений для ряда комплексов дополнительных условий задачи. Для однозначного синтеза кинематических функций толкателя в выражениях (3)–(5) должны быть выявлены параметры $\beta_{iБ}$; $\beta_{iМ}$; $\varphi_{iБ}$; $\varphi_{iМ}$.

В дальнейшем изложении эти параметры будут именоваться струтурными параметрами функции перемещения.

Имея в виду выражения (6) – (10), (15), между структурными параметрами можно записать следующие уравнения связи:

$$\varphi_{III} - \Delta\varphi = \left(\beta_{III} - \Delta\beta\right) k\theta'_{1max}\Omega\left(\lambda\right), \qquad (17)$$

где

$$\Delta\varphi = k\Delta\beta, \qquad (18)$$

$$\Omega(\lambda) = \frac{1 + \dfrac{\nu_1}{\nu_2}\lambda}{1 + \dfrac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda}. \qquad (19)$$

Во избежание сокращения участка разбега или выбега до нуля и связанного с этим бесконечного возрастания ускорений толкателя параметр λ должен лежать в следующем интервале: $0 < \lambda < \infty$.Функция $\Omega(\lambda)$ имеет вполне определенный физический смысл. Можно показать что

$$\frac{\left[\Pi'_1\right]_{ср}}{\left[\Pi'_{1-3}\right]} = \frac{\left[\dot{\beta}_1\right]_{ср}}{\left[\dot{\beta}_{1-3}\right]_{ср}} = \Omega\left(\lambda\right), \qquad (20)$$

где $\left[\Pi'_1\right]_{ср}, \left[\dot{\beta}_1\right]_{ср}$ – соответственно среднее значение первой передаточной функции и скорости толкателя на разбеге; $\left[\Pi'_{1-3}\right]$; $\left[\dot{\beta}_{1-3}\right]_{ср}$ – соответветственно среднее значение первой передаточной функции и скорости толкателя, отвечающее всему периоду неравномерного движения толкателя, т.е. разбегу и выбегу.

Функция Ω (λ) принимает следующие предельные значения: $\Omega(0) = 1$; $\Omega(\infty) = 1/\nu_1$. Заметим, что в тех случаях, когда максимальные значения первой производной характеристической функции равны на разбеге и выбеге

$\left(\theta'_{1\max} = \theta'_{3\max},\ \text{т.е. } \nu_1 = 1\right)$, Ω независимо от значений λ обращается в единицу: $\Omega_{\nu_1}=1$.

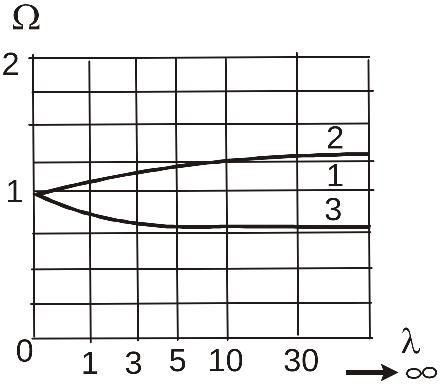

Рис.2

Функция Ω (λ) для трех характерных случаев проиллюстрирована на рис. 2:
кривая 1 – при $\nu_1=1$;
кривая 2 – при $\nu_1 = \pi/4$ (на разбеге косинусоидальный закон ускорений, на выбеге – синусоидальный);
кривая 3 – при $\nu_1 = 4/\pi$ (на разбеге синусоидальный закон ускорений, на выбеге – косинусоидальный).

Выявим допустимое число условий, которые можно задать в одном комплексе в дополнение к ранее заданным.

Ниже даны следующие исходные условия для одной модификации данной задачи:

□ *условие 1*
при $\varphi=0$ $\beta=0$;

□ *условие 2*
при $\varphi=0$ $\dot\beta=0$;

□ *условие 3*
при $\varphi=\varphi_{Ш}$ $\beta=\varphi_{Ш}$;

□ *условие 4*
при $\varphi=\varphi_{III}$ $\dot\beta=0$;

□*условие5*
при $\varphi=\varphi_I$ $\beta_1=\beta_2$;

□ *условие 6*
при $\varphi=\varphi_1$ $\dot\beta_1=\dot\beta_2$;

□ *условие 7*
при $\varphi=\varphi_{II}$ $\beta_2=\beta_3$;

□ *условие 8*
при $\varphi=\varphi_{II}$ $\dot\beta_2=\dot\beta_3$;

□ *условие 9*
при $\varphi_I \le \varphi_2 \le \varphi_{II}$ $\beta_2=\omega/k$.

Из перечисленных условия 1—4 уже использованы при синтезе безразмерных характеристических функций $\theta_i\left(\tau_i\right)$ и их производных. Условия 5 и 7 удовлетворяются самой структурой функции $\beta(\varphi)$, не имеющей на границах участков разрывов непрерывности. Таким образом, располагаем лишь тремя условиями, используя которые можно определить три неизвестных параметра. Однако с целью выявления решений задачи, обеспечивающих приемлемый динамический режим работы циклового механизма, целесообразно к имеющимся в нашем распоряжении трем неиспользованным условиям добавить еще одно: $\left|\ddot\beta_{1\max}/\ddot\beta_{3\max}\right|=\lambda$, после чего число неизвестных, поддающихся определению, повышается до четырех. Сопоставляя с проанализированным случаем синтеза, в дальнейшем рассмотрим и значительно видоизмененные комплексы дополнительных условий.

Заметим, что если вместо параметра λ заданы отношения соответствующих отрезков перемещения исполнительного органа или углов поворота входного звеня, λ определяется из следующих простых зависимостей:

$$\lambda = \frac{\nu_2}{\nu_1^2} \cdot \frac{\beta_{III} - \beta_{II}}{\beta_I} \text{ либо } \lambda = \frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \frac{\varphi_{III} - \varphi_{II}}{\varphi_I}.$$

Комплекс Iа. Пусть заданы параметры $\beta_{III}, \varphi_{III}$ и λ. Как следует из проведенного выше анализа, в этом случае могут быть определены четыре параметра: β_I, φ_I, β_{II}, φ_{II}

Воспользовавшись для определения значений $\Delta\beta$ и $\Delta\varphi$ уравнениями связи (17) и (18), получаем после подстановки в (6) — (9)

$$\beta_I = \frac{\varphi_{III} - k\beta_{III}}{k\left[\theta'_{1max} - 1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\left(\theta'_{1max} - \nu_1\right)\right]}, \tag{21}$$

$$\varphi_I = \frac{\theta'_{1max}\left(\varphi_{III} - k\beta_{III}\right)}{\left[\theta'_{1max} - 1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\left(\theta'_{1max} - \nu_1\right)\right]}, \tag{22}$$

$$\beta_{II} = \frac{k\beta_{III}\left[\theta'_{1max}\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\right) - 1\right] - \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda\varphi_{III}}{k\left[\theta'_{1max} - 1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\left(\theta'_{1max} - \nu_1\right)\right]}, \tag{23}$$

$$\varphi_{II} = \frac{\frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda k\theta'_{1max}\beta_{III} - \varphi_{III}\left(1 + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda\right)}{\theta'_{1max} - 1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\left(\theta'_{1max} - \nu_1\right)}. \tag{24}$$

Условия существования решений задачи могут быть выявлены при учете следующих очевидных требований. Во-первых, параметры β_I и φ_I не должны превышать соответствующих значений β_{II} и φ_{II}, что равносильно условию $\Delta\beta \geq 0$ и $\Delta\varphi \geq 0$ Во-вторых, значения $\Delta\beta$ и $\Delta\varphi$ должны быть ниже значений β_{III} и φ_{III}, что дает одно из условий существования участков разбега и выбега. Эти требования выражены в следующих неравенствах:

$$\beta_{III} k < \varphi_{III} \leq \beta_{III}\, k\, \theta'_{1max}\Omega(\lambda), \tag{25}$$

$$0 < \lambda < \infty. \tag{26}$$

Решение задачи при дополнительных условиях комплекса 1а приводит к однозначному определению величины участка постоянной скорости ($\Delta\beta$; $\Delta\varphi$). Однако, во многих случаях такое решение не удовлетворяет проектантов, так как величина этого участка может предопределяться технологическим процессом. Ниже будет рассмотрен ряд комплексов, при которых в число исходных данных будет включен параметр $\Delta\beta$ или $\Delta\varphi$. (В силу уравнения связи (18) безразлично, какой из этих параметров задается).

Комплекс Iб. Для сохранения баланса между числом неиспользованных уравнений и числом неизвестных параметров задание значения $\Delta\beta$ (или $\Delta\varphi$) требует снятия одного из условий, использованных в предыдущем комплексе.

Попытаемся «освободить» параметр λ, задавая вместо него значение $\Delta\beta$. Итак, заданными дополнительными условиями будем считать параметры β_{III}, φ_{III} и $\Delta\beta = \beta_{II} - \beta_{I}$.

Решая уравнение связи (17) относительно λ, получаем после подстановок в (6) — (9)

$$\beta_I = \frac{\nu_1}{(\nu_1 - 1)k\theta'_{1\max}}\varphi_{III} - \frac{\theta'_{1\max}\beta_{III} - \Delta\beta(\theta'_{1\max} - \nu_1)}{(\nu_1 - 1)\theta'_{1\max}}, \tag{27}$$

$$\varphi_I = \frac{\nu_1}{(\nu_1 - 1)}\varphi_{III} - \frac{\theta'_{1\max}\beta_{III} - \Delta\beta(\theta'_{1\max} - \nu_1)}{(\nu_1 - 1)}k, \tag{28}$$

$$\beta_{II} = \frac{\nu_1}{(\nu_1 - 1)k\theta'_{1\max}}\varphi_{III} - \frac{\beta_{III}\theta'_{1\max} - \nu_1\Delta\beta(\theta'_{1\max} - 1)}{(\nu_1 - 1)\theta'_{1\max}}, \tag{29}$$

$$\varphi_{II} = \frac{\nu_1}{(\nu_1 - 1)}\varphi_{III} - \frac{\beta_{III}\theta'_{1\max} - \Delta\beta(\theta'_{1\max} - 1)}{(\nu_1 - 1)}k, \tag{30}$$

Остановимся на анализе полученного решения. Можно показать, что при $\nu_1 = 1$ рассматриваемый комплекс приведет к несовместимости исходных данных. Действительно, имея в виду, что при $\nu_1 = 1$ $\Omega(\lambda) = 1$, получим из (17) и (18)

$$\Delta\beta = \frac{k\theta'_{1\max}\,\beta_{III} - \varphi_{III}}{k\left(\theta'_{1\max} - 1\right)}. \qquad (31)$$

Следовательно, при $v_1 = 1$ значение $\Delta\beta$ не может быть задано, так как оно определяется зависимостью (31) на основании остальных исходных данных. Одновременно число исходных условий становится меньше числа неизвестных структурных параметров, что приводит к бесчисленному множеству решений, отвечающих диапазону изменения параметра λ от 0 до ∞.

Таким образом, при $v_1 = 1$ исходные условия комплекса I б оказались практически неприемлемыми.

При $\nu_1>1$ условия существования решений задачи описываются следующими неравенствами:

$$\frac{k\theta'_{1\max}\beta_{III} - \nu_1\varphi_{III}}{k\left(\theta'_{1\max} - \nu_1\right)} < \Delta\beta < \frac{k\theta'_{1\max}\beta_{III} - \varphi_{III}}{k\left(\theta'_{1\max} - \nu_1\right)}. \qquad (32)$$

При $\nu_1<1$ знаки неравенств (32) меняются на противоположные. При учете динамических условий работы механизма интервал изменения $\Delta\beta$ должен быть сужен исходя из следующего ограничения:

$$\lambda_{\min} \le \lambda \le \lambda_{\max} \qquad (33)$$

При этом соответствующие предельные значения $\Delta\beta$ определяются из уравнений связи подстановкой соответственно $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$. Расчеты показывают, что полученный интервал допустимых значений $\Delta\beta$ обычно весьма мал. Так, например, при $\beta_{III} = 50^o$ и $\varphi_{III} = 70^o$;к = 1; $0{,}5 \le \lambda \le 2$, принимая синусоидальный закон ускорений на разбеге и косинусоидальный – на выбеге, имеем: $21^0 \le \Delta\beta \le 26^o$.

Таким образом, в целом комплекс 1б не решает поставленной задачи и должен использоваться лишь в исключительных случаях .

Комплекс II. Ниже будет рассмотрен следующий комплекс дополнительных условий. Пусть заданы значения β_{III}, $\Delta\beta$, λ и пределы изменения возможных значений угла φ_{III}.

$$\left[\varphi_{III}\right]_1 \le \varphi_{III} \le \left[\varphi_{III}\right]_2. \qquad (34)$$

При этих условиях

$$\varphi_{III} = k\theta'_{1max}\Omega(\lambda)\beta_{III} - k\Delta\beta\left[\theta'_{1max}\Omega(\lambda) - 1\right], \qquad (35)$$

$$\varphi_I = \frac{k\theta'_{1max}\left(\beta_{III} - \Delta\beta\right)}{1 + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda}, \tag{36}$$

$$\varphi_{II} = \frac{k\left[\theta'_{1max}\left(\beta_{III} - \Delta\beta\right) + \Delta\beta\left(1 + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda\right)\right]}{1 + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda}. \tag{37}$$

Параметры β_I и β_{II} могут быть непосредственно определены из выражений (6) и (8).

В тех случаях, когда нарушается заданное неравенство (34), остальные исходные данные требуют корректировки, которая легко осуществляется с помощью зависимости (35).

Комплекс III. Пусть заданы значения $\varphi_{III}, \Delta\varphi, \lambda$ и пределы изменения допустимых значений β_{III}

$$\left[\beta_{III}\right]_1 \le \left[\beta_{III}\right] \le \left[\beta_{III}\right]_2. \tag{38}$$

Для этого комплекса углы φ_I и с φ_{II} определяются формулами (7) и (9), а остальные структурные параметры находятся следующим образом:

$$\beta_{III} = \frac{\varphi_{III} + \Delta\varphi\left[\theta'_{1\max}\Omega(\lambda) - 1\right]}{k\theta'_{1\max}\Omega(\lambda)}, \tag{39}$$

$$\beta_1 = \frac{\varphi_{III} - \Delta\varphi}{k\theta'_{1\max}\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\right)}, \tag{40}$$

$$\beta_{II} = \frac{\varphi_{III} + \Delta\varphi\,\theta'_{\max}\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\right)}{k\theta'_{1\max}\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\right)}. \tag{41}$$

Исходные параметры должны быть подчинены неравенству (В38), что проверяется с помощью зависимости (39).

Комплексы II и III предоставляют в рассматриваемой задаче широкие возможности варьирования исходными условиями при синтезе функций перемещений.

Далее рассмотрим ряд комплексов, в которых дополнительными условиями оказывается связанным одно промежуточное положение рабочего органа на участке постоянной скорости.

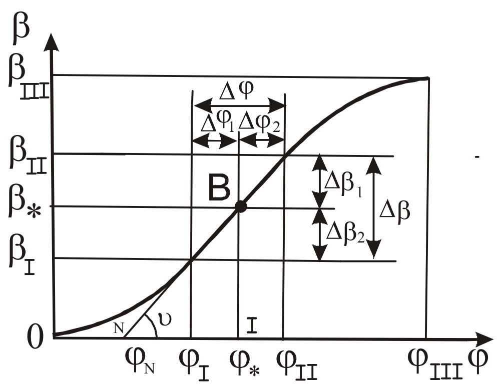

Рис.3

Такие условия встречаются, например, в листоразгоняющем механизме (форграйфере) листовой печатной машины и других механизмах, целевое назначение которых состоит в передаче объекта обработки от одного рабочего органа к другому [1].

Комплекс IV. Пусть заданы значения $\beta_{III}, \varphi_{III}$, а также одно фиксированное положение рабочего органа на участке равномерного движения: $\beta(\varphi_*) = \beta_*$ (рис. 3).

В этом случае число неиспользованных условий опять равно четырем, ввиду чего следует ожидать однозначного решения задачи.

Рассматривая β* как частное значение перемещений толкателя на участке постоянной скорости·(i = 2), имеем

$$\beta_* = \beta_1 + \frac{1}{k}(\varphi_* - \varphi_I). \tag{42}$$

Отсюда при совместном решении с формулами (6) – (9), (17), (18) получаем

$$\beta_1 = \frac{1}{\theta'_{1\max} - 1} \cdot \frac{\varphi_* - k\beta_*}{k}, \tag{43}$$

$$\varphi_I = \frac{\theta'_{1\max}}{\theta'_{1\max} - 1} \cdot (\varphi_* - k\beta_*), \tag{44}$$

$$\beta_{II} = \beta_{III} - \frac{1}{\theta'_{3\max} - 1} \cdot \frac{\varphi_{III} - \varphi_* - k(\beta_{III} - \beta_*)}{k}, \tag{45}$$

$$\varphi_{II} = \frac{\theta'_{3\max}}{\theta'_{3\max} - 1} \cdot \left[\varphi_* + k(\beta_{III} - \beta_*)\right] - \frac{\varphi_{III}}{\theta'_{3\max} - 1}. \tag{46}$$

Область существования решения определяется из условия 0 πΐ, которое может быть приведено к виду

$$\beta_* k < \varphi_* \le \theta'_{1\max}\beta_* k, \tag{47}$$

$$\varphi_* + (\beta_{III} - \beta_*)k < \varphi_{III} < \varphi_* + \theta_{3\max} k(\beta_{III} - \beta_*). \tag{48}$$

Ввиду большого прикладного значения рассматриваемого комплекса остановимся на графической интерпретации полученного решения (рис.3). Продолжим прямую участка постоянной скорости, проходящую через точку B (β_*, φ_*) и наклоненную к оси абсцисс под углом $\vartheta = arctg 1/k$, до пересечения с этой осью в точке *N*. При этом на оси *O* — φ отсекается отрезок *ON*, соответствующий углу поворота кулачка φ_N. При $\varphi_N = 0$ максимальная скорость движения устанавливается мгновенно; таким образом, этот угол характеризует дополнительный отрезок времени, необходимый для прохождения пути β_1 с постепенно возрастающей скоростью. Используя (43) и (44), легко выявить следующую зависимость:

$$\frac{\varphi_I}{\varphi_N} = \frac{\theta'_{1max} - 1}{\theta'_{1max}}. \tag{49}$$

Это отношение зависит только от констант выбранной характеристической функции. Из зависимости (49) определяем угол φ_I и, восстанавливая перпендикуляр из полученной точки до пересечения с прямой участка постоянной скорости, находим β_I.

Очевиден и геометрический смысл области существования решения задачи. При соблюдении неравенств (47) не допускается сокращение угла φ_N до нуля и в то же время исключается возможность стыкования кривой разбега с прямой участка постоянной скорости в точках, координаты которых превышают значения β_* и φ_* Графоаналитическое определение φ_{II} и β_{II}, а также графическая интерпретация неравенств (48)проводятся аналогично.

Комплекс V. Пусть заданы ход β_{III}, фиксированное положение рабочего органа на участке равномерного, движения β_* и два параметра $\Delta\beta_1$ и $\Delta\beta_2$, закрепляющие границы этого участка относительно β_* (рис. 3),

$$\Delta\beta_1 = \beta_* - \beta_1, \tag{50}$$
$$\Delta\beta_2 = \beta_{II} - \beta_* \tag{51}$$

Кроме того, заданы интервалы допустимого варьирования параметрами φ_* и φ_{III}

$$[\varphi_*]_1 \le \varphi_* \le [\varphi_*]_2, \tag{52}$$

$$[\varphi_{III}]_1 \le \varphi_{III} \le [\varphi_{III}]_2. \tag{53}$$

Таким образом, в дополнение к исходным условиям, рассмотренным в предыдущем комплексе, введены связи (50) и (51), однако в то же время раскреплены параметры φ_* и φ_{III}, чем сохраняются предпосылки для получения однозначного решения задачи.

Ниже приводим зависимости, с помощью которых определяются параметры $\varphi_*, \varphi_I, \beta_1, \varphi_{II}, \beta_{II}$ и φ_{III}, полученные при совместном решении (43) — (46) и условий (50) и (51)

$$\varphi_* = k\left[\theta'_{1\max}\beta_* - \left(\theta'_{1\max} - 1\right)\Delta\beta_1\right], \tag{54}$$

$$\varphi_I = k\theta'_{1\max}\left[\beta_* - \Delta\beta_1\right], \tag{55}$$
$$\beta_I = \beta_* - \Delta\beta_1, \tag{56}$$
$$\varphi_{II} = k\left[\theta'_{1\max}\beta_* - \left(\theta'_{1\max} - 1\right)\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2\right], \tag{57}$$
$$\beta_{II} = \beta_* + \Delta\beta_2, \tag{58}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{III} = k\Big[&\left(\theta'_{1\max} - \theta'_{3\max}\right)\beta_* + \theta'_{3\max}\beta_{III} - \\ &-\left(\theta'_{1\max} - 1\right)\Delta\beta_1 - \left(\theta'_{3\max} - 1\right)\Delta\beta_2\Big].\end{aligned} \tag{59}$$

Область существования решений задачи, предопределяемая неравенствами (52) и (53), приводит к следующим ограничениям:

$$\frac{\theta'_{1\max}k\beta_* - \left[\varphi_*\right]_1}{\left(\theta'_{1\max} - 1\right)k} \ge \Delta\beta_1 \ge \frac{\theta'_{1\max}k\beta_* - \left[\varphi_*\right]_2}{\left(\theta'_{1\max} - 1\right)k}, \tag{60}$$

$$\begin{aligned}&\beta_{III} + \theta'_{1\max}\left(1 - \nu_1\right)\beta_* - \frac{\left[\varphi_{III}\right]_1}{k} \ge \left(\theta'_{1\max} - 1\right)\Delta\beta_1 + \\ &+\left(\theta'_{3\max} - 1\right)\Delta\beta_2 \ge \beta_{III} + \theta'_{1\max}\left(1 - \nu_1\right)\beta_* - \frac{\left[\varphi_{III}\right]_2}{k}.\end{aligned} \tag{61}$$

Анализ (60) и (61) показывает, что задача не имеет решений, независимо от значений $\Delta\beta_1$ и $\Delta\beta_2$, если

$$\left[\varphi_*\right]_1 > \theta'_{1\max}k\beta_*, \tag{62}$$

$$\left[\varphi_{III}\right]_1 > \beta_{III} + \left(1 - \nu_1\right)\theta'_{1\max}\beta_*. \tag{63}$$

Комплекс VI. Пусть заданы угол φ_{III}, одно фиксированное значение фазового угла на участке равномерного движения — φ_*, два параметра $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$, закрепляющие границы этого участка относительно φ_*

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_* - \varphi_I, \tag{64}$$
$$\Delta\varphi_2 = \varphi_{II} - \varphi_*. \tag{65}$$

Кроме того, заданы интервалы допустимого варьирования параметрами β_* и β_{III}

$$\left[\beta_*\right]_1 \le \beta_* \le \left[\beta_*\right]_2, \tag{66}$$

$$[\beta_{III}]_1 \le \beta_{III} \le [\beta_{III}]_2. \qquad (67)$$

Так же как и в предыдущем комплексе, легко убедиться в сохранении условий для получения однозначного решения. Расчетные формулы для определения необходимых в процессе синтеза закона движения параметров приведены ниже:

$$\beta_* = \frac{1}{k\theta'_{1\max}}\left[\varphi_* + \left(\theta'_{1\max} - 1\right)\Delta\varphi_1\right], \qquad (68)$$

$$\beta_1 = \frac{\varphi_* - \Delta\varphi_1}{k\theta'_{1\max}}, \qquad (69)$$

$$\varphi_I = \varphi_* - \Delta\varphi_1, \qquad (70)$$

$$\beta_{II} = \frac{1}{k\theta'_{1\max}}\left[\varphi_* + \left(\theta'_{1\max} - 1\right)\Delta\varphi_1 + \theta'_{1\max}\Delta\varphi_2\right], \qquad (71)$$

$$\varphi_{II} = \varphi_* + \Delta\varphi_2, \qquad (72)$$

$$\begin{aligned}\beta_{III} = \frac{1}{k\theta'_{3\max}}\Big[&\varphi_{III} - (1-\nu_1)\varphi_* - (2-\nu_1)\times \\ &\times\left(\theta'_{1\max} - 1\right)\Delta\varphi_1 - \left(\theta'_{3\max} - 1\right)\Delta\varphi_2\Big].\end{aligned} \qquad (73)$$

Условия существования решений задачи приводятся к следующему виду:

$$\frac{k\theta'_{1\max}[\beta_*]_1 - \varphi_*}{\theta'_{1\max} - 1} \le \Delta\varphi_1 \le \frac{k\theta'_{1\max}[\beta_*]_2 - \varphi_*}{\theta'_{1\max} - 1}, \qquad (74)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{III} - (1-\nu_1)\varphi_* - k\theta'_{3\max}[\beta_{III}]_2 &\le (2-\nu_1)\left(\theta'_{1\max} - 1\right)\Delta\varphi_1 + \\ +\left(\theta'_{3\max} - 1\right)\Delta\varphi_2 &\le \varphi_{III} - (1-\nu_1)\varphi_* - k\theta'_{3\max}[\beta_{III}]_1.\end{aligned} \qquad (75)$$

[

Как следует из (74) и (75), если

$$\varphi_* > k\theta'_{1\max}[\beta_*]_2 , \qquad (76)$$

$$\varphi_{III} - (1-\nu_1)\varphi_* > k\theta'_{3\max}[\beta_{III}]_1, \qquad (77)$$

то независимо от значений $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ задача решений не имеет.

4. Оптимизация решений задачи. При нелинейной функции положения, свойственной так называемым цикловым механизмам – кулачковым, рычажным, шаговым и т.п., динамические условия работы оказываются более напряженными по сравнению с механизмами с линейной функцией положения. Даже в идеальном цикловом механизме в силу $\ddot{\beta}_n \neq 0$ возникают инерционные нагрузки, причем нередко весьма значительные. Кроме того, имеет место более невыгодная силовая связь между ведущим и ведомым звеньями.

Если, например, на ведомом звене i приложена сила F, которая на ведущем звене уравновешивается моментом M, то в силу равенства работ на возможных перемещениях

$$M = \beta_n'(\varphi_1)F. \tag{78}$$

Очевидно, что при $\beta_n' \neq \mathrm{const}$ даже постоянная сила F приводит к возникновению на входном звене переменного момента, способного возбуждать вынужденные колебания привода.

Представляет интерес еще один частный случай. Пусть сила F является силой инерции ведомого звена i. Тогда, принимая для определенности, что ведомое звено совершает поступательное движение, при $\dot{\varphi}_1 = \mathrm{const}$ имеем

$$|F| = m\dot{\varphi}_1^2 |\beta_n''|. \tag{79}$$

После подстановки в (78) получаем

$$|M| = m\dot{\varphi}_1^2 |\beta_n' \beta_n''|. \tag{80}$$

Легко убедиться, что

$$\beta_n' \beta_n'' = \frac{1}{m\dot{\varphi}_1^3} \frac{dT_n}{dt},$$

где T_n – кинетическая энергия звена i; dT_n / dt – кинетическая мощность.

Выражения (78) – (80) свидетельствуют о том, что геометрические характеристики существенно влияют на динамику механизма. Поэтому экстремальные значения функций $|\beta'|_{\max}$, $|\beta''|_{\max}$, $|\beta'\beta''|_{\max}$ могут быть использованы в качестве простейших динамических критериев, с помощью которых производится сопоставление различных законов движения, а также синтез новых законов, обладающих в определенном смысле оптимальными свойствами.

Для контроля за пульсацией инерционных нагрузок на ведомом и ведущем звеньях могут быть использованы критерии K_1 и K_2:

$$K_1 = \beta''_{\max} + \xi_1 \left|\beta''_{\min}\right|;$$
$$K_2 = (\beta'\beta'')_{\max} + \xi_2 \left|(\beta'\beta'')_{\min}\right|.$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 – некоторые весовые коэффициенты, с помощью которых можно отразить степень важности положительной и отрицательной составляющих.

Выше были проанализированы семь комплексов дополнительных условий рассматриваемой задачи, которые, естественно, не исчерпывают всего многообразия возможных исходных данных, встречающихся в инженерной практике. Однако, рассматривая приведенные в статье комплексы как базовые случаи, легко осуществить и некоторое расширение задачи, включая в число учитываемых ряд факторов технологического, компоновочного и динамического характера.

Так как первые две разновидности перечисленных факторов не поддаются рассмотрению в общей постановке задачи, ограничимся здесь лишь некоторыми соображениями по выбору оптимального динамического режима. Очевидно, что для выполнения какого-либо дополнительного условия, связанного, например, с оптимумом определенного динамического критерия, требуется, чтобы в числе исходных данных был один или несколько варьируемых параметров. С этой точки зрения для оптимизации решений весьма удобны комплексы, имеющие в числе исходных данных параметр λ (комплексы 1а, II, III).

Для нахождения оптимального значения параметра λ можно, например, воспользоваться условием минимума динамического критерия K_1, пропорционального пульсации инерционной нагрузки и максимальному усилию в пар,

$$K_1(\lambda) = \frac{(\beta_{III} - \Delta\beta)\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}\lambda\right)^2 \left(1 + \frac{\xi_1}{\lambda}\right)}{(\varphi_{III} - \Delta\varphi)^2 \left(1 + \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\lambda\right)}. \tag{81}$$

Для кулачкового механизма с силовым замыканием $\xi_1 > 1$ — можно рассматривать как коэффициент запаса усилия замыкающей пружины.

Воспользовавшись условием $K_1(\lambda)_{\min}$

$$\frac{dK_1}{d\lambda} = 0,$$

получаем для перечисленных комплексов

$$\lambda_{Ia} = \sqrt{\xi \frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \frac{\theta'_{1\max} - 1}{\theta'_{1\max} - \nu_1}}, \tag{82}$$

$$\lambda_{II} = \frac{\sqrt{\xi \nu_2}}{\nu_1}, \tag{83}$$

$$\lambda_{III} = \sqrt{\xi \frac{\nu_2}{\nu_1}}. \tag{84}$$

Здесь $\lambda_{Ia}, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ — оптимальные значения параметра λ (индекс соответствует номеру комплекса).

Заметим, что в случае, если параметр β_* в комплексе V или параметр φ_* в комплексе VI могут варьироваться в некотором интервале (что желательно с точки зрения получения оптимального динамического режима), то задача может быть соответственно сведена к решению, приведенному для комплексов II или III.

Весьма существенным этапом в инженерной практике при решении рассмотренной задачи является оправданный выбор исходного комплекса, действительно соответствующего конкретным условиям проектирования. Так, например, при синтезе закона движения листоразгоняющего устройства печатной машины только за счет перехода от комплекса IV к более оправданному комплексу V максимальные ускорения были снижены до двух раз [1].

Важное место при рациональном синтезе функций перемещения приобретает выбор для каждого комплекса задачи оптимальных безразмерных функций и их оценка по критериям сравнения, однако этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Кроме рассмотренного выше подхода, когда при синтезе мы оперируем одним или несколькими семействами законов движения, сопоставляя их по динамическим критериям, возможен и другой подход, при котором в каждом отдельном случае создается принципиально новый тип закона движения. Этот подход более предпочтителен при решении специальных задач синтеза уникального характера.

По способу формирования геометрических характеристик механизмы можно разделить на две группы: механизмы дискретного синтеза и функционального синтеза.

К первой группе относят механизмы типа рычажных, у которых при синтезе определению подлежит лишь конечное число параметров. Геометрические характеристики таких механизмов, по сути дела, заложены в их схеме, и поэтому рациональным выбором параметров можно лишь приблизиться к заданной функции положения.

Ко второй группе относятся механизмы типа кулачковых, в которых профилированием рабочих поверхностей можно непосредственно реализовать заданную функцию положения. Это во многих случаях существенно расширяет возможности учета динамических факторов при синтезе подобных механизмов.

5. К проблеме учета упругодиссипативных характеристик при оптимизационном динамическом синтезе цикловых механизмов. Рассмотренные выше задачи были решены на кинетостатическом уровне, что является лишь первым (хотя и важным) этапом оптимального динамического синтеза. В современных высокоскоростных механизмах полученные на этом этапе программные законы движения могут существенно искажаться за счет возбуждения колебаний. Данной проблеме посвящено большое число работ автора, обобщенных частично в монографиях, учебных пособиях [2,3,5,6] и справочнике [4]. Специфическая особенность цикловых механизмов состоит в том, что исполнительный орган должен колебаться в соответствии с заданными кинематическими характеристиками, а любые дополнительные колебания являются нежелательными динамическими ошибками. Поэтому традиционные методы виброзащиты в данном случае оказываются неприемлемыми.

В рамках данной статьи ограничимся лишь несколькими основными инженерными рекомендациями, реализация которых позволяет в первом приближении обеспечить снижение виброактивности механизма и требуемую точность воспроизведения заданных «идеальных» законов движения.

- В функции положения $\beta(\varphi)$, а также в первой и второй передаточных функциях $\beta'(\varphi)$ и $\beta''(\varphi)$ должны быть устранены разрывы непрерывности.
- Отрезок времени Δt, соответствующий изменению функции $\beta''(\varphi)$ между ее экстремальными значениями, не должен быть ниже нескольких периодов свободных колебаний $T = 2\pi / p_1$, где p_1 – низшая частота свободных колебаний.
- В целях ограничения накопленных возмущений от колебаний, возбужденных на предыдущих циклах установившегося движения, необходимо потребовать $p_1 / \omega > (2,5-3)\vartheta^{-1}$, где ω – угловая скорость входного звена; ϑ – логарифмический декремент колебаний.

Литература

1. И. И. Вульфсон. Расчет оптимальных кинематических параметров фор грайфера листовых печатных машин.— Труды НИИ Полиграфмаш, вып. 5, 1959. С.82–110.

2. И. И. Вульфсон. Динамические расчеты цикловых механизмов. Л.: Машиностроение, 1976.– 328 с.
3. Механика машин: учеб. пособие для втузов./ И.И. Вульфсон, М.З. Коловский, Э.Е. Пейсах и др.; под ред. Г.А. Смирнова.– М.: Высшк. шк., 1996. – 511 с.
4. Вибрации в технике: справочник./ под ред. К.В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1995. Т.6.– 456 с.
5. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия.– Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
6. Вульфсон И.И. Колебания в машинах: учеб. пособие для втузов. Изд. 2-е, доп. СПГУТД. – СПб., 2006. – 260 с.

Поступила 2 ноября 2007 г.