

УДК 621.318.3.001.2

## ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗБУДИТЕЛЕЙ ВИБРАЦИИ С ПОДМАГНИЧИВАНИЕМ ПРИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ

© Виталий Львович Крупенин<sup>1</sup>, Константин Борисович Мягкохлеб<sup>2</sup>,  
Олег Федорович Полищук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия  
[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

<sup>2</sup> Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного  
НАН Украины, Харьков, Украина  
[mkb@ipmach.kharkov.ua](mailto:mkb@ipmach.kharkov.ua)

**Аннотация.** Показаны особенности формирования тягового усилия электромагнитного вибростенда при полигармоническом управлении. Проведен анализ колебательной системы стенда. Выведены формулы колебаний подвижных масс стенда.

**Ключевые слова:** Электромагнитный вибростенд, тяговое усилие, полигармоническое управление.

## DYNAMICS OF ELECTROMAGNETIC VIBRATION EXCITERS WITH MAGNETIZATION AT THE MANAGEMENT OF POLYHARMONIC

V. Krupenin<sup>1</sup>, K. Myagkokheh<sup>2</sup>, O. Polischuk<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup> The A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine (IPMash NAS of Ukraine)

**Annotation.** The peculiarities for creation tractive effort of electromagnetic vibrobench is shown. The analysis of bench oscillatory system is brought. The formulas of oscillations of traveling bench masses is deduced.

**Keywords.** Electromagnetic vibrobench, tractive effort, polyharmonic management.

В работе [1] был рассмотрен электромагнитный вибровозбудитель (ЭМВ) с подмагничиванием и с полигармонической функцией управления. Причем в этом ЭМВ не было реактивной массы (РМ), хотя последняя применяется довольно часто, особенно в электромагнитных вибрационных стендах (ЭМВС) с целью уменьшения влияния основных вибраций на корпус стенда и на фундамент, предохраняя его от разрушения.

В ЭМВС с целью более достоверных испытаний на надежность изделий в программах испытаний применяются полигармонические управления вида [2, 3]  $U = \sum_{k=1}^n U_{ak} \sin \omega_k t$ , где

$U_k$  – амплитуда;  $\omega_k = 2\pi f_k$  – круговая частота ( $[f_k]=\text{Гц}$ )  $k$  – й гармоники;  $t$  – время.

В таком ЭМВС, в отличие от ЭМВС без РМ и с моногармоническим управлением, динамика значительно отличается, а анализ включает в себя нестандартные решения. Опорой для детализации анализа рассматриваемых ЭМВС является электромагнитомеханическая схема, приведенная на рис. 1,

где 1 – магнитопровод; 2 – якорь (подвижная платформа); 3 – реактивная масса; 4,5 – пружины; 6,7 – демпферы; 8 – обмотка управления; 9 – обмотка подмагничивания; 10 – корпус;  $\text{TTTTT}$  – фундамент;  $x_1, x_2$  – перемещения 2 и 3 соответственно;  $\delta$  – воздушный зазор.

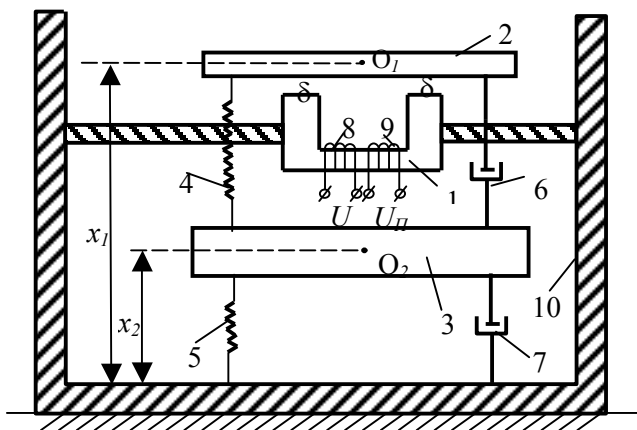


Рис. 1.

Как видно из рис. 1, ЭМВС включает в себя три взаимосвязанные части с различной физической природой функционирования, а именно:  $(U, U_{\text{п}}, 8, 9)$  – электрическую;  $(1 \rightarrow \delta \rightarrow 2 \rightarrow \delta \rightarrow 1)$  – магнитную;  $(2, 4, 6 \rightarrow 3, 5, 7)$  – механическую. Источником вибровозбуждения является электрический задающий генератор. Данный ЭМВС функционирует следующим образом.

На обмотку 9 подается постоянное напряжение  $U_{\text{п}}$ , электрический ток  $i_{\text{п}}$ , от которого формирует магнитный поток  $\Phi_{\text{п}}$  (поток подмагничивания), проходящий по цепи  $1 \rightarrow \delta \rightarrow 2 \rightarrow \delta \rightarrow 1$ . Наличие  $\Phi_{\text{п}}$  необходимо для увеличения тягового усилия  $F$  в ЭМВС без существенного увеличения управляющего воздействия  $U$ . Это связано с тем, что тяговое усилие ЭМВС  $F$  определяется в соответствии с формулой [1]

$$F = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}, \quad (1)$$

где  $\Phi$  – общий магнитный поток в ЭМВС;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость воздуха;  $S$  – площадь поперечного сечения полюсов магнитопровода 1 у зазоров  $\delta$ .

Из (1) видно, что чем больше  $\Phi$ , тем больше тяговое усилие  $F$ . При наличии на зажимах обмотки 8 переменного напряжения  $U = U_a \sin \omega t$  по магнитной части проходит магнитный поток  $\Phi = \Phi_{\sim} + \Phi_{\text{п}}$ , где  $\Phi_{\sim}, \Phi_{\text{п}}$  – магнитные потоки, наведенные в магнитной системе от действия переменного тока  $i = I_a \sin(\omega t - \varphi)$ , где  $\varphi$  – сдвиг фаз между  $U$  и  $i$ , и постоянного тока подмагничивания  $I_{\text{п}}$  соответственно. Тяговое усилие  $F$  в этом случае будет иметь вид [учитывается (1)]

$$F = \frac{1}{\mu_0 S} (\Phi_{\sim}^2 + 2\Phi_{\sim}\Phi_{\text{п}} + \Phi_{\text{п}}^2). \quad (2)$$

Представим (2) относительно токов  $i, I_{\text{п}}$  и параметров электромагнитной части ЭМВС. Для этого воспользуемся законом полного тока [4], определяющего связь тока  $i$  и наведенного им магнитного потока  $\Phi$  в следующем виде для нашей задачи

$$I_{\text{п}} w_{\text{п}} = \frac{\Phi_{\text{п}}}{G}; \quad iw = \frac{\Phi_{\sim}}{G}, \quad G = \frac{\mu_0 S}{2\delta}, \quad (3)$$

где  $w, w_{\text{п}}$  – число витков обмоток 8 и 9 соответственно;  $G$  – магнитная проводимость в ЭМВС.

Подставляя  $\Phi_{\text{п}}$  и  $\Phi_{\sim}$  из (3) в (2), получим

$$F = \frac{1}{\mu_0 S} [\Phi_{\text{п}}^2 + 2\Phi_{a1} \sin(\omega t - \varphi) + \Phi_a^2 \sin^2(\omega t - \varphi)], \quad (4)$$

где  $\Phi_{\text{п}} = I_{\text{п}} w_{\text{п}} G$ ;  $\Phi_{a1} = \Phi_{\text{п}} \Phi_a$ ;  $\Phi_a = iwG$ .

В (4) преобразуем  $\sin^2(\omega t - \varphi)$  в  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos[2(\omega t - \varphi)]$  [5]. Тогда (4) примет вид

$$F = \frac{1}{\mu_0 S} \left\{ \Phi_{II}^2 + \frac{1}{2} \Phi_a^2 + 2\Phi_{aI} \sin(\omega t - \varphi) - \frac{1}{2} \Phi_a^2 \cos[2(\omega t - \varphi)] \right\}, \quad (5)$$

Из (5) видно, что при монографическом управлении  $U$  при наличии подмагничивания в ЭМВС тяговое  $F$  содержит в себе постоянную составляющую  $F_{II} = \frac{1}{\mu_0 S} \left( \Phi_{II}^2 + \frac{1}{2} \Phi_a^2 \right)$  и две переменные составляющие  $F_{1\sim} = \frac{2}{\mu_0 S} \Phi_{aI} \sin(\omega t - \varphi)$ ,  $F_{2\sim} = \frac{1}{2\mu_0 S} \Phi_a^2 \cos[2(\omega t - \varphi)]$ .

Если же переменное управляющее воздействие является полигармоническим сигналом  $U = \sum_{k=1}^n U_{ak} \sin \omega_k t$ , то с учетом рассматриваемого анализа для монограммического  $U$  тяговое усилие  $F$  в ЭМВС будет выражаться следующим соотношением

$$F = F_{II\Sigma} + \sum_{k=1}^n F_{1k\sim} + \sum_{k=1}^n F_{2k\sim} + \sum_{k=2}^{C_n^2} F_{3k\sim}, \quad (6)$$

где  $F_{II\Sigma} = \frac{1}{\mu_0 S} \left( \Phi_{II}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_{ak}^2 \right)$ ;  $F_{1k\sim} = \frac{2}{\mu_0 S} \Phi_{II} \Phi_{ak} \sin(\omega_k t - \varphi_k)$ ;

$$F_{2k\sim} = \frac{1}{2\mu_0 S} \Phi_{ak}^2 \cos[2(\omega_k t - \varphi_k)]; F_{3k\sim} = \frac{2}{\mu_0 S} \Phi_{ak} \Phi_{al} \sin(\omega_k t - \varphi_k) \cdot \sin(\omega_l t - \varphi_l);$$

$C_n^2$  – число сочетаний из  $n$  по 2;  $\left[ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \right]$ . В свою очередь, после тригонометрического преобразования [5]

$$F_{3k\sim} = \frac{\Phi_{ak} \Phi_{al}}{\mu_0 S} \left\{ \cos[(\omega_k - \omega_l)t + \varphi_k - \varphi_l] - \cos[(\omega_k + \omega_l)t + \varphi_k + \varphi_l] \right\}.$$

А это значит, что число  $F_{3k\sim}$  увеличивается в два раза, то есть становится  $2C_n^2$ .

Таким образом, в ЭМВС при наличии подмагничивания и полигармонического управляющего воздействия в виде  $n$  гармоник общее тяговое усилие  $F$  (силовое воздействие на якорь 2 совместно с испытуемым изделием, находящимся на платформе якоря 2) включает в себя  $(n+1)$  постоянных составляющих,  $n$  – гармонических составляющих с частотами, соответствующими частотам входных гармоник,  $n$  – гармонических составляющих с частотами в два раза большими, чем у входных гармоник,  $C_n^2$  – гармонических  $(\omega_k - \omega_l), k \neq l$  и  $C_n^2$  – гармонических составляющих с частотами  $(\omega_k + \omega_l), k \neq l$ . А это значит, что общее тяговое усилие  $F$  включает в себя  $(n+1)^2$  составляющих, из которых  $n(n+1)$  – гармонических и  $(n+1)$  – постоянных.

Связь между входными гармоническими напряжениями  $U_k = U_{ak} \sin \omega_k t$  и токами  $i_k$ , формирующими по закону полного тока магнитные потоки  $\Phi_k$  в установившемся режиме следующая  $i_k = \frac{U_{ak}}{\sqrt{r^2 + (\omega_k L)^2}} \sin(\omega_k t - \varphi_k)$ , где  $r$ ,  $L$  – активное сопротивление и индуктивность электрической цепи ЭМВС соответственно;  $\varphi_k$  – угол сдвига между  $U_k(t)$  и  $i_k(t)$ .

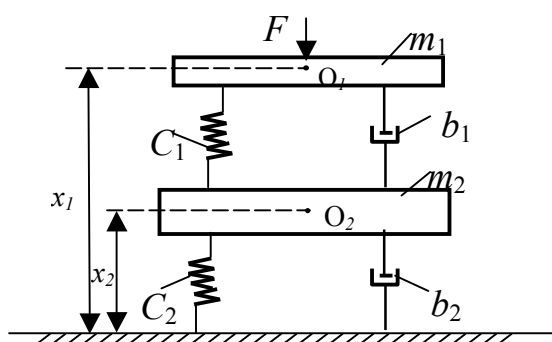


Рис. 2.

Далее рассмотрим динамику механической части ЭМВС. Для детального анализа представим механическую схему ЭМВС, изображенную на рис. 2,

где  $m_1, m_2$  – массы якоря 2 с испытуемым изделием и реактивной массой 3 соответственно;  $C_1, C_2$  – коэффициенты жесткости пружин 4 и 5 соответственно;  $b_1, b_2$  – коэффициенты диссипации демпферов 6, 7 соответственно.

Как видно из рис. 2, механическая часть ЭМВС является колебательной системой с двумя степенями свободы. Уравнение движения этой системы запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_{1n} + b_1 \dot{x}_{1n} + c_{1n} x_{1n} &= F + b_1 \dot{x}_2 + c_{1n} x_{2n}; \\ m_2 \ddot{x}_{2n} + (b_1 + b_2) \dot{x}_{2n} + (c_{1n} + c_2) x_{2n} &= b_1 \dot{x}_{1n} + c_{1n} x_{1n} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ;  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ;  $C_{1n}$  – коэффициент жесткости пружин 4, зависящий от

числа гармоник ( $n$ ) на входе ЭМВС. Последнее объясним следующим образом.

При действии на якорь 2 только общей постоянной составляющей  $F_{П\Sigma}$  уравнения (7) записывается так

$$\left. \begin{aligned} c_{1n} x_{1n0} &= F_{П\Sigma} = \frac{1}{\mu_0 S} \left( \Phi_{П}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_{ak}^2 \right); \\ (c_{1n} + c_{2n}) x_{2n0} &= c_{1n} x_{10} \end{aligned} \right\} ,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} c_{1n} &= \frac{1}{\mu_0 S x_{1n0}} \left( \Phi_{П}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_{ak}^2 \right); \\ c_{2n} &= \frac{c_{1n}}{x_{2n0}} (x_{1n0} - x_{2n0}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $x_{1n0}$  – величина постоянного притяжения якоря 2 к магнитопроводу 1;  $x_{2n0}$  – постоянное смещение массы  $m_2$  в сторону корпуса ЭМВС.

Из (8) видно, что жесткость пружин 4 и 5 зависит от величин  $x_{1n0}$  и  $x_{2n0}$ , которые, в свою очередь, зависят от  $(n+1)$  постоянных составляющих в общем тяговом усилии  $F$ . Заметим, что при наличии  $x_{1n0}$  для ЭМВС необходимо соблюдать условие, заключающееся в том, чтобы

$$x_{1n0} + \sum_{s=1}^{n(n+1)} x_{as} \leq \delta \quad (9)$$

где  $x_{as}$  – амплитуды гармоник, входящих в тяговое усиление  $F$ .

В противном случае в ЭМВС будут удары якоря 2 о полюса магнитопровода 1. При соблюдении условия (9) колебательная система (КС) ЭМВС является линейной. Поэтому к ее динамике применим принцип суперпозиции. При этом рассмотрим два случая в анализе ЭМВС, которые обуславливаются наличием диссипации в движении КС. Обычно в ЭМВС диссипация определяется трением движущихся частей о воздух. В этом случае можно считать, что  $b_1 = b_2 = 0$ . Если же используются в ЭМВС специальные средства демпфирования при сохранении колебательности механической части, то тогда  $b_1 \neq 0$  и  $b_2 \neq 0$ . В первом случае КС стенда является консервативной, а во втором случае – диссипативной. После оп-

ределения постоянного сдвига якоря 2 в сторону магнитопровода 1, выраженного в виде (9)

будем считать, что масса  $m_1$  колеблется относительно положения  $\left( \delta - x_{1n0} - \sum_{s=1}^{n(n+1)} x_{as} \right)$ . Эти

колебания будут состоять из суммы собственных и вынужденных составляющих и записываются в виде [6]

$$x_{1n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n(n+1)} [x_{a1k} \sin(\omega_{01}t + \varphi_{1k}) + x_{b1k} \sin(\omega_{02}t + \varphi_{2k})] + x_{a1bk} \cos(\omega_k t - \Psi_k) ;$$

$$x_{2n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n(n+1)} [k_1 x_{a1k} \sin(\omega_{01}t + \varphi_{1k}) + k_2 x_{b1k} \sin(\omega_{02}t + \varphi_{2k})] + x_{a2bk} \cos(\omega_k t - \Psi_k), (10)$$

где  $k_1 = \frac{x_{a1}}{x_{a2}} = \frac{c_{1n} + c_{2n} - m_2 \omega_{02}^2}{c_{1n}} ; k_2 = \frac{x_{b1}}{x_{b2}} = \frac{c_{1n} + c_{2n} - m_2 \omega_{01}^2}{c_{1n}} .$

$$\left\{ \begin{aligned} x_{a1k} &= \frac{\left\{ [(\dot{x}_{20} k_1 - \dot{x}_{10}) - \omega_k (k_1 x_{a2bk} - x_{a1bk})]^2 + \omega_{02}^2 (x_{20} k_1 - x_{10})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\omega_{02} (k_1 - k_2)} ; \\ x_{b1k} &= \frac{\left\{ [(\dot{x}_{20} k_2 - \dot{x}_{10}) - \omega_k (k_2 x_{a2bk} - x_{a1bk})]^2 + \omega_{01}^2 (k_1 x_{20} - x_{10})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\omega_{01} (k_2 - k_1)} ; \\ \varphi_{1k} &= \arctg \frac{\omega_{02} (x_{20} k_1 - x_{10})}{(\dot{x}_{20} k_1 - \dot{x}_{10}) - \omega_k (k_2 x_{a2bk} - x_{a1bk})} ; \\ \varphi_{2k} &= \arctg \frac{\omega_{01} (x_{20} k_2 - x_{10})}{(\dot{x}_{20} k_2 - \dot{x}_{10}) - \omega_k (k_2 x_{a2bk} - x_{a1bk})} , \end{aligned} \right. (11)$$

$x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}$  – начальные условия.

Амплитуды  $x_{a1bk}, x_{a2bk}$  вынужденных составляющих определяются на основе подстановки вынужденных составляющих  $x_{1b}(t) = \sum_{k=1}^{n(n+1)} x_{a2bk} \cos(\omega_k t - \Psi_k) ;$

$x_{2b}(t) = \sum_{k=1}^{n(n+1)} x_{a1bk} \cos(\omega_k t - \Psi_k)$  в уравнения (7) при условии, что  $b_1 = b_2 = 0$ . В результате получаем

$$x_{a1bk} = \frac{F_{a1k} c_{1n}}{(c_{1n} + c_{2n} - m_2 \omega_k^2)(c_{1n} - m_1 \omega_k^2) - c_{1n}^2} ;$$

$$x_{a2bk} = \frac{F_{a1k} (c_1 - m_1 \omega_k^2)}{(c_{1n} + c_{2n} - m_2 \omega_k^2)(c_{1n} - m_1 \omega_k^2) - c_{1n}^2} .$$

Если частоты  $\omega_k = k\omega$  кратные частотам  $\omega_{01}, \omega_{02}$ , то в системе КС стенда возникают резонансные режимы. При нулевых начальных условиях выражения (11) имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} x_{a1k} &= \frac{\omega_k (k_1 x_{a2bk} - x_{a1bk})}{\omega_{02} (k_1 - k_2)} ; \\ x_{b1k} &= \frac{\omega_k (k_2 x_{a2bk} - x_{a1bk})}{\omega_{01} (k_2 - k_1)} . \end{aligned} \right.$$

В этом случае колебания  $x_1$  и  $x_2$  включают в себя вынужденные составляющие. Заметим, что верхний предел сумм в (10) есть  $n(n+1)$ , что означает, что в общие переменные ве-

личины  $x_{1n(n+1)}$  и  $x_{2n(n+1)}$  входят  $n(n+1)$  переменных составляющих, полученных от воздействия на КС  $n(n+1)$  переменных составляющих тягового усилия  $F$ .

Для диссипативной КС в ЭМВС установившееся движение можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} x_{1n(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n(n+1)} [c_{1k} \cos(\omega_k t - \Psi_k) + c_{2k} \sin(\omega_k t - \Psi_k)]; \\ x_{2n(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n(n+1)} [c_{3k} \cos(\omega_k t - \Psi_k) + c_{4k} \sin(\omega_k t - \Psi_k)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Постоянные  $c_{ik}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) определяются подстановкой выражения (12) в (7), что приводит к соотношению  $c_{ik} = \frac{\Delta_{cik}}{\Delta_k}, i = \overline{1,n}$ ,

где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_{1n} + c_{2n} - m_2 \omega_k^2, & (b_1 + b_2) \omega_k, & -c_{1n}, & -b_1 \omega_k \\ -\omega_k (b_1 + b_2), & c_{1n} + c_{2n} - m_2 \omega_k^2, & b_1 \omega_k, & -c_{1n} \\ -c_{1n}, & -\omega_k b_1, & c_1 - m_1 \omega_k^2, & \omega_k b_1 \\ \omega_k b_1, & -c_1, & \omega_k b_1, & c_1 - m_1 \omega_k^2 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{c1k} = F_{ak} \begin{vmatrix} c_{1n} + c_{2n} - m_2 \omega_k^2, & b_1 \omega_k, & -c_{1n}, \\ -b_1 \omega_k, & c_{1n} - m_1 \omega_k^2, & -b_1 \omega_k, \\ -c_{1n}, & -b_1 \omega_k, & c_{1n} - m_1 \omega_k^2, \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{c2k} = -F_{ak} \begin{vmatrix} -(b_1 + b_2) \omega_k, & b_1 \omega_k, & -c_{1n}, \\ -c_{1n}, & c_{1n} - m_1 \omega_k^2, & b_1 \omega_k, \\ b_1 \omega_k, & -b_1 \omega_k, & c_{1n} - m_1 \omega_k^2, \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{c3k} = F_{ak} \begin{vmatrix} -(b_1 + b_2) \omega_k, & c_{1n} + c_{2n} - m_2 \omega_k^2, & -c_{1n}, \\ -c_{1n}, & -b_1 \omega_k, & b_1 \omega_k, \\ b_1 \omega_k, & -c_{1n}, & c_{1n} - m_1 \omega_k^2, \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{c4k} = -F_{ak} \begin{vmatrix} -(b_1 + b_2) \omega_k, & c_{1n} + c_{2n} - m_2 \omega_k^2, & b_1 \omega_k, \\ -c_{1n}, & -b_1 \omega_k, & c_{1n} - m_1 \omega_k^2, \\ b_1 \omega_k, & -c_1, & -b_1 \omega_k, \end{vmatrix}.$$

В соответствии с [4] выражения (12) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} x_{1n(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n(n+1)} A_{1k} \cos(\omega_k t - \Psi_k + \alpha_{1k}); \\ x_{2n(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n(n+1)} A_{2k} \cos(\omega_k t - \Psi_k + \alpha_{2k}) \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где  $A_{1k} = \sqrt{c_{1k}^2 + c_{2k}^2}$ ;  $A_{2k} = \sqrt{c_{3k}^2 + c_{4k}^2}$ ;  $\alpha_{1k} = \arctg \frac{c_{2k}}{c_{1k}}$ ;  $\alpha_{2k} = \arctg \frac{c_{4k}}{c_{3k}}$ .

Если частоты  $\omega_k, k = \overline{1, n(n+1)}$  или кратные  $s\omega_k, s = \overline{1, m}$  совпадают с собственными частотами КС  $\omega_{01}, \omega_{02}$ , то в системе ЭМВС возникает резонанс, что, с точки зрения надежности ЭМВС, нежелательно. Зная  $\omega_{01}, \omega_{02}$  и  $\omega_k$ , можно определить те гармоники, которые вызывают резонанс, и тогда не допустить появления их в тяговом усилии  $F$ . Собственные частоты  $\omega_{01}, \omega_{02}$  определяются из (7) при условии  $b_1 = b_2 = 0$ . В этом случае характеристическое уравнение (7)

$$\omega_k^4 - \omega_k^2 \left( \frac{c_{1n}}{m_1} + \frac{c_{1n} + c_{2n}}{m_2} \right) + \frac{c_{1n}c_{2n}}{m_1m_2} = 0$$

имеет корни

$$\omega_{01} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{c_{1n}}{m_1} + \frac{c_{1n} + c_{2n}}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_{1n}}{m_1} + \frac{c_{1n} + c_{2n}}{m_2} \right)^2 - \frac{c_{1n}c_{2n}}{m_1m_2}} \right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\omega_{02} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{c_{1n}}{m_1} + \frac{c_{1n} + c_{2n}}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c_{1n}}{m_1} + \frac{c_{1n} + c_{2n}}{m_2} \right)^2 - \frac{c_{1n}c_{2n}}{m_1m_2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

которые являются собственными частотами КС ЭМВС с реактивной массой.

Резонансные частоты КС ЭМВС  $\omega_{1p}$  и  $\omega_{2p}$ , незначительно отличаются (меньше)

$\omega_{01}, \omega_{02}$  на величины под внутренним радикалом, равные для  $\omega_{1p}$  на  $\left( \frac{b_1}{m_1} \omega_{1p} \right)^2$ , для  $\omega_{2p}$  на  $\left( \frac{b_1 + b_2}{m_2} \omega_{2p} \right)^2$ . Но так как диссипация в ЭМВС очень мала, то  $\omega_{1p} - \omega_{01} \approx \varepsilon_1$ ,

$\omega_{2p} - \omega_{02} \approx \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – малые величины, которыми, с практической точки зрения, можно пренебречь.

Таким образом, в результате данного исследования приведены основы теории ЭМВС с реактивной массой при входных воздействиях в виде подмагничивающего напряжения  $U_{\Pi}$  и полигармонического управления  $U$ . Наличие в управлении  $U$   $n$  гармоник увеличивает число гармоник в тяговом усилии  $F$  в  $(n+1)$  раз. На этом факт следует обратить внимание при программировании задания по управлению ЭМВС при испытании изделий на полигармоническую вибрацию. Следует заметить, что в силу того, что импульсные воздействия можно путем разложения в ряд Фурье представить в виде набора гармоник, то при испытании изделий на ЭМВС на удар следует учесть теоретические результаты данной статьи с целью уточнения условий динамических испытаний изделий.

*Статья выполнена при поддержке Государственного Фонда Фундаментальных Исследований Украины (проект № Ф53.7/038) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 13-08-90419).*

### Список литературы

1. Божко А.Е., Белых В.И., Мякохлеб К.Б. Принципиальные особенности в формировании подмагничивания электромагнитных вибровозбудителей. – Доп. НАН Украины, 2002. – № 5. – С. 112-116.

2. Вибрации в технике. Т. 4 / Под ред. проф. Э.Э. Лавендела. – М.: Машиностроение, 1981. – 510 с.
3. Божко Е.А., Крупенин В.Л., Мягкохлеб К.Б. Воспроизведение полигармонической вибрации электромагнитными вибровозбудителями // Интернет-журнал «Вестник научно-технического развития». ([www.vntr.ru](http://www.vntr.ru)). №8 (72), 2013 г. – С. 3-11.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. М.: Высш. шк., 1985. – 528 с.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Гос. изд-во технико-теор. лит-ры, 1956. – 608 с.
6. Божко А.Е., Голуб Н.М. Динамико-энергетические связи колебательных систем. Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.