УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, СОВЕРШАЮЩЕГО КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ,УЧИТЫВАЮЩАЯДЕПЛАНАЦИЮ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

© Владимир Иванович Ерофеев[1], Борис Борисович Лампси[2]

[1] *ФГБУН «Институт проблем машиностроения Российской академии наук». Россия, 603024, г. Н. Новгород, ул. Белинского, 85, ИПМ РАН.*
erf04@sinn.ru

[2]*ГОУ ВПО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет». Россия, 603950, г.Н. Новгород, ул. Ильинская, д. 65.*
nir@nngasu.ru, tstm@nngasu.ru

Аннотация: *Предложена математическая модель, позволяющая описать распространение крутильной волны в тонкостенном стержне. Модель включает в себя геометрическую и физическую упругие нелинейности, а так жедепланацию, т.е. выход поперечного сечения, в процессе деформации стержня, из первоначального плоского состояния. В этой модели связь между углом закручивания стержня и мерой депланации не постулируется, как в большинстве известных моделей, а находится в процессе решения задачи. Определено, что депланация, которая приводит к появлению дисперсии фазовой скорости крутильной волны, приводит еще и к появлению квадратичной нелинейности, характерной для интенсивных продольных колебаний и не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания.*

Ключевые слова: математическая модель, крутильная волна, тонкостенный стержень, депланация, *крутильные колебания*.

NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL OF ELASTIC ROD, COMMITS TORSIONAL VIBRATION CONSIDER WARPING CROSS-SECTION

© V.I. Erofeev[1], B.B. Lampsi[2]

[1]*MERIRAS, NizhnyNovgorod, Russia*
[2]*NNSUACE, Nizhny Novgorod, Russia*

Abstract.*A mathematical model, allowing us to describe the spread of torsional waves in a thin-walled rod . The model includes the geometric and physical elastic nonlinearity, as well as warping, i.e. output cross-section, in the process of deformation of the rod , from its initial flat condition. In this model the relationship between the angle of twist of the rod and measure the warping is not postulated as the most famous models and is in the process of solving the problem . Determined that the warping, which leads to phase velocity dispersion torsional wave , also leads to the appearance of the quadratic nonlinearity characteristic of intensive longitudinal vibrations and never met before in mathematical models describing the torsional oscillations.*

Key words:*mathematical model, torsion wave. thin-walled bar,warping, torsional oscillations.*

Крутильные волны наряду с продольными и изгибными волнами играют большую роль в формировании вибрационных полей строительных конструкций. Математические модели, используемые для изучения крутильных колебаний стержней, а также для изучения распространения крутильных волн, базируются на технической теории кручения и уточняющей ее теории стесненного кручения. Технические теории включают в себя модели Кулона и Сен-Венана, уточняющие – модели Тимошенко и Власова [1-3].

В основе теории Кулона лежат гипотезы о недеформируемости поперечного сечения стержня в своей плоскости и об отсутствии депланации, т.е. выхода сечения из первоначального плоского состояния. Сечения стержня, согласно этим предположениям, скользят относительно друг друга, поворачиваясь при этом в своей плоскости на малый угол как жесткие площадки. Согласно этой теории крутильная волна в стержне распространяется без дисперсии с той же скоростью, с которой распространяются сдвиговые волны в неограниченной среде.

По теории Сен-Венана предполагается, что кручение стержня складывается из кручения по Кулону (поворота поперечных сечений в своей плоскости) и продольных смещений, приводящих к депланации. Депланация полагается одинаковой для всех сечений и не зависящей от координаты x. Согласно этой теории крутильная волна в стержне не обладает дисперсией, но скорость крутильной волны отличается от скорости волны сдвига на постоянный множитель, зависящий от формы поперечного сечения стержня.

Если депланациянеоднородна вдоль стержня, то кручение принято называть стесненным. По теориям Тимошенко и Власова дапланация пропорциональна относительному углу закручивания, что приводит к дисперсии, т.е. зависимости фазовой скорости крутильной волны от ее частоты.

В монографии В. И. Сливкера [4] предложена еще одна уточняющая теория. В этой теории связь между углом закручивания $\theta(x,t)$ и мерой депланации$\beta\ (x,t)$ не постулируется как в теориях Тимошенко и Власова, а определяется в процессе решения задачи.

Выражение для плотности кинетической энергии имеет вид:

$$W_k = \frac{1}{2}\left[\rho I_r\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + \rho I_\omega\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2\right] \qquad (1)$$

где ρ– плотность материала стержня;

I_r– полярный момент инерции;

I_ω – секториальный момент инерции.

Для учета упругой нелинейности в выражении для плотности потенциальной энергии следует удержать не только квадратичные слагаемые, но и слагаемые в четвертой степени:

$$W_p = \frac{1}{2}GI_x\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}EI_\omega\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}GI_g\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\beta\right)^2 + +\alpha_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^4 + \alpha_2\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^4 + +\alpha_3\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\beta\right)^4 \qquad (2)$$

гдеE– модуль Юнга;

$G = \dfrac{E}{2(1+\gamma)}$ - модуль сдвига;

I_x – крутящий момент инерции;

$I_g = \dfrac{I_x}{(\psi-1)}$, ψ – геометрический параметр (см. [4]);

γ – коэффициент Пуассона;

α_i– коэффициенты, характеризующие геометрическую и физическую нелинейности стержня. Если стержень является геометрически нелинейным, то $\alpha_i > 0$, если – физически нелинейным, то $\alpha_i < 0$.

Составляя лагранжиан$L=W_k - W_p$и применяя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [2,3], получим систему уравнений динамики стержня:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta_t}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta_x}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \beta_t}\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \beta_x}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \beta}=0 \end{cases} \tag{3}$$

где введены обозначения: $\theta_t=\dfrac{\partial\theta}{\partial t};\ \theta_x=\dfrac{\partial\theta}{\partial x};\beta_t=\dfrac{\partial\beta}{\partial t};\ \ \beta_x=\dfrac{\partial\beta}{\partial x}.$

После проведения необходимых дифференцирований и преобразований (3) запишется в виде:

$$\begin{cases} \rho I_r\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-G\left(I_x+I_g\right)\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+GI_g\dfrac{\partial\beta}{\partial x}+N_1=0 \\ \rho I_\omega\dfrac{\partial^2\beta}{\partial t^2}-EI_\omega\dfrac{\partial^2\beta}{\partial x^2}-GI_g\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}-\beta\right)+N_2=0 \end{cases} \tag{4}$$

Здесь через $N_{1,2}$обозначены нелинейные слагаемые:

$$N_1=-12(\alpha_1+\alpha_3)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+24\alpha_3\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+$$

$$+12\alpha_3\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\beta}{\partial x}-24\alpha_3\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x}-12\alpha_3\beta^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+12\alpha_3\beta^2\frac{\partial\beta}{\partial x}, \tag{5}$$

$$N_2=-12\alpha_3\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}-4\alpha_3\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^3+12\alpha_3\beta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2-$$

$$-12\alpha_3\frac{\partial\theta}{\partial x}\beta^2+4\alpha_3\beta^3. \tag{6}$$

Система (4) – (6) достаточно сложна для анализа. Для ее упрощения будем предполагать, что депланация$\beta(x,t)$является малой. Поскольку нелинейные эффекты проявляются на величинах более высокого порядка малости, чем линейные, это позволяет учитывать депланацию только в линейной части уравнений, а в нелинейных слагаемых приближенно считать, что $\beta\approx\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$. Тогда нелинейные слагаемые будут иметь вид:

$$N_1=-12\alpha_1\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \tag{7}$$

$$N_2=-12\alpha_3\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{8}$$

При данных предположениях система уравнений (4) сводится к одному уравнению относительно $\theta(x,t)$. Для этого из первого уравнения системы выразим

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}=\frac{(I_x+I_g)}{I_g}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{I_r\rho}{GI_g}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{12\alpha_1}{GI_g}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

и подставим его во второе уравнение, предварительно продифференцированное по переменной x.

Таким образом, нелинейное дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня с учетом депланации его поперечного сечения, будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-c_S^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{EI_\omega(I_x+I_g)}{\rho I_g I_r}\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4}-\frac{I_\omega}{I_g I_r G}\left[(I_x+I_g)G+EI_r\right]\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2\partial t^2}++\frac{I_\omega}{c_T^2 I_g}\frac{\partial^4\theta}{\partial t^4}-$$
$$\frac{12I_\omega\alpha_1}{GI_g I_r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right]+\frac{12I_\omega\alpha_1 EI_\omega}{\rho I_r GI_g}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right]--\frac{12\alpha_1}{\rho I_r}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+$$
$$\frac{12\alpha_3}{\rho I_r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right)=0 \qquad (9)$$

Здесь $c_S=\sqrt{\frac{GI_x}{\rho I_r}}$ – скорость распространения крутильных волн в стержне.

Заметим, что уравнение (9) содержит в себе, наряду с кубической нелинейностью, характерной для интенсивных крутильных колебаний стержней [3], еще и квадратичную нелинейность (последнее слагаемое), характерную для интенсивных продольных колебаний и не встречавшуюся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (Проекты № 12-08-00888-а и № 13-08-97103-р_поволжье-а)

Список литературы

1. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
2. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Т.1/ под ред. Болотина В.В. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
3. Ерофеев В. И., Кажаев В. В., Семерикова Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
4. Сливкер В. И. Строительная механика. Вариационные основы. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов. 2005. 736 с.