УДК 534

ОБ ОПИСАНИИ ВИБРОВОДОВ СО СТРУКТУРНЫМИ РАЗРЫВАМИ ПРИ ПОМОЩИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ УДАРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

© Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

krupeninster@gmail.com

ABOUT THE DESCRIPTION VIBROVODOV WITH STRUCTURAL GAPS BY MEANS OF VIBRIMPACT SYSTEMS WITH THE DISTRIBUTED IMPACT ELEMENTS

V.L. Krupenin

IMASH RAS, Moscow, Russia

Аннотация. *Теория виброударных систем с распределенными ударными элементами используется для описания вибпроводящих систем сложной структуры со структурными разрывами. В таких системах можно явно выделить некоторые несущие упругие или вязкоупругие ("несущие части конструкций") и связанные с ними виброударные системы ("присоединенное оборудование"), которые имеют возможность взаимодействовать с несущими частями непосредственно, без участия упругих амортизирующих элементов. Для моделирования одномерных объектов такого рода предложены модифицированные модели сильно нелинейных виброводов сложной структуры со внутренними разрывами , содержащих распределенные ударные элементы. Обсуждаются некоторые динамические эффекты и, в частности, возникновения синхронных движений ударных элементов, а также локализации интенсивных ударов в определенных зонах вибровода.*

Ключевые слова. *Вибровод, виброударная система, распределенный ударный элемент, внутренние разрывы, области прозрачности, области запирания, зоны локализации ударов, нелинейные интегральные и операторные уравнения, проводник.*

ABOUT THE DESCRIPTION VIBROVODOV WITH STRUCTURAL GAPS BY MEANS OF VIBRIMPACT SYSTEMS WITH THE DISTRIBUTED IMPACT ELEMENTS

V.L. Krupenin

IMASH RAS, Moscow, Russia

Annotation. The theory of vibroimpact systems with the distributed impact elements is used for the description the vibproconductors systems of difficult structure with discontinuous structural. In such systems it is possible to allocate obviously some bearing elastic or viscoelastic ("bearing parts of designs") and the related vibrosimpact systems ("the attached equipment") which have opportunity to interact with bearing parts directly, without participation of elastic impact-absorbing elements. For modeling of one-dimensional objects such the modified models strongly nonlinear vibproconductors with compound structure, containing the distributed impact elements are offered. Some dynamic effects and, in particular, emergence of synchronous movements of impact elements, and also localizations of intensive impacts in certain zones of the vibroconductor are discussed.

Keywords. Vibroconductors, the vibroimpact system, the distributed impact element, internal gaps, areas of transparency, area of locking, a zone of localization of impacts, the nonlinear integrated and operator equations.,

1. В работе [1] рассмотрены, в частности, линейные (или близкие к таковым) специфические модели сплошных сред сложной структуры. Одной из особенностей этих моделей, оказывается наличие двух своеобразных "частей среды" - "несущей" и "присоединенной". Соответственно уравнения динамики таких сред содержат две группы уравнений. Первая - "отвечает" за несущую часть, вторая за - присоединенную. Как и всякая модель мультиполярной механики здесь существенной ревизии подвергается понятие точки, состояние которой может определятся произвольным числом кинематических параметров. В работах [2-6] рассмотрены сильно нелинейные модели подобных сред, в которых, в частности, для учета множественных соударений в элементах присоединенного оборудования использовались распределенные ударные элементы. Такие модели позволяют дать описание процесса формирования, а также и распространения вибрационных полей в сложных составных конструкциях. Кроме того, указанные модели позволяют получить ряд расчетных формул и значимых определяющих соотношений. Необходимость обращения к данным моделям диктуется прежде всего тем обстоятельством, что в реальных машинных конструкциях именно множественные систематические соударения элементов подсистем весьма часто "ответственны" за вид формируемых глобальных виброполей и за виброактивность конструкций в целом.

Возвращаясь к упомянутым выше двум группам уравнений движения, отметим, во-первых, необходимость постулирования существования упругой (упруго-вязкой) несущей среды. То есть необходимы уравнения несущих частей (примеры: классическое уравнение Ламе, уравнение продольных или поперечных колебаний стержня, etc.), к которым добавляются, ставящиеся стандартным образом, граничные условия.

Во-вторых, предполагая, что соударения как бы "размазаны" по некоторой, вообще говоря, пространственной области, к уравнениям несущих частей добавляются уравнения движения присоединенного оборудования с распределенными ударными элементами. Механизм связи несущей и присоединенной частей определяет глобальную структуру индуцируемого объектом вибрационного поля.

В данной работе изучается процесс прохождения синусоидальной вибрации через одномерные оснащенные конструкции - продольно колеблющиеся стержни (несущие части), с каждой точкой которой, связан симметричный ударный элемент. Системы такого рода (динамическая схема дискретного аналога, изучаемого объекта дана на рис.1). Здесь m', M' *и* c – соответственно масса ударника, масса полости, в которой этот ударник находится и, наконец, упругость. Предполагается, что к правой полости приложена синусоидальная сила $P(t)=P_1\cos\omega t$.

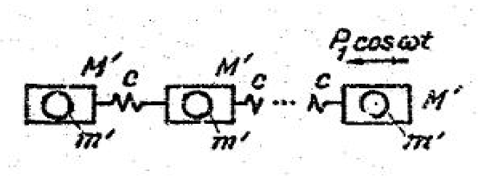

Рис.1

В отличии от систем с упруго амортизированным оборудованием [2-6] - сильно нелинейных виброводов (рис. 2 а, б), такие системы- названы сильно нелинейными виброводами со структурными (внутренними) разрывами. В соответствии с этим при различных обобщениях мы снова приходим к моделям сильно нелинейных сред сложной структуры, которые, однако, имеют своеобразную специфику, определяемую увеличением «степени разрывности решений».

На рис.2. символически показана континуальная модель сильно нелинейного вибровода м с упруго амортизированным оборудованием. Здесь на рис. 1, а показана несущая часть системы, а на рис. 1, б символически показано присоединенное оборудование (взаимодействующие подсистемы $A^{(I)}(x)$ и $A^{(II)}(x)$); смысл осталь ных обозначений, очевидно, ясен из рисунка.

В основу дальнейшего анализа положены частотно-временные методы, для чего предложены методики построения сответствующих периодических функций Грина (ПФГ). При помощи частотно-временных методов изучаются нелинейные формы колебаний

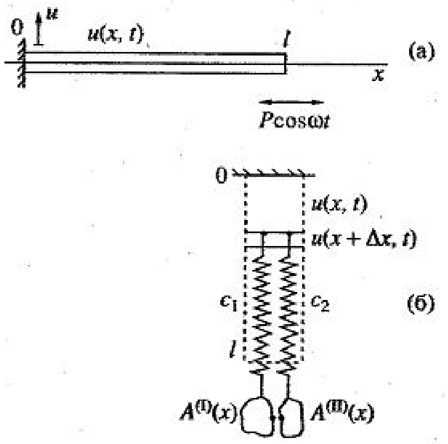

Рис.2

(движения, обладающие определенными свойствами симметрии) и далее уже рассматриваются различные случаи прохождения вибрации. Показано, что в зависимости от частотных соотношений, стержень-вибровод может быть открыт или закрыт для прохождения синусоидальной вибрации. Причем зоны "открытости" и "закрытости" могут существовать одновременно. В запертых для основного тона зонах присутствуют, генерированные ударами высокочастотные процессы. Анализ проведен на основании полученных приближенных представлений полей перемещений всех структурных элементов вибропроводящей среды.

2. Вернемся к модели рис.1. Обозначим u_k и y_k (k=1,2,…..) координаты полости и ударника, показанных на рис. 1. При большой концентрации упруго связанных виброударных систем, как и в работах [2-6] можно перейти к континуальным моделям, для чего постулируем существование одномерной среды с определяющими уравнениями

$$\rho u_{tt} - Eu_{xx} - \Phi(y^\circ) = 0, \quad (1)$$

$$m(y^\circ_{tt} + u_{tt}) + \Phi(y^\circ) = 0. \quad (2)$$

где ρ и E - погонная масса и модуль Юнга стержня, по длине которого как бы "размазывается" присоединенное оборудование - $\Phi(y^\circ)$ плотность силы удара; m - погонная масса ударных элементов; $y^\circ(x,t)$ - распределение их относительного смещения. Граничные условия, .ставящиеся для только для несущей части среды [4], возьмем для определенности в виде

$$u(0,t)=0,\ Eu_x(l,t) = \varepsilon P_1 \cos\omega t, \quad (3)$$

что отвечает случаю закрепления левого конца стержня и приложения к его правому концу внешнего периодического силового воздействия. В (3): ε - параметр, ω - частота внешнего воздействия; $T=2\pi\omega^{-1}$.

Плотность силы удара $\Phi(y^\circ)$ определяется условиями, отвечающими континуальному аналогу гипотезы Ньютона [2-6]:

$y°[x, \varphi(x)]=\Delta(x); \quad \Delta(x) \geq |y°(x, t)|;$ (4)

$J(x)=M(x)[1+R(x)]\, y_t°[x, \varphi(x)-0] \geq 0$. (5)

Здесь Δ(x) - распределение зазоров (натягов); J(x), φ(x), R(x) - плотность ударного импульса, распределения моментов удара и коэффициента восстановления; погонная масса ударных элементов ш(x); y°(x,t) - распределение их относительного смещения; приведенная плотность $M(x) = \rho m(\rho + m)^{-1}$.

Для того, чтобы избежать здесь громоздких выкладок и не привлекать численные решения внесем упрощения:m(x) = const; M(x) = const; Δ(x) =const; R=1.

3.В соответствии с общими методиками [2 - 6], определяя Т-периодические режимы, перейдем к интегральным уравнениям периодических колебаний. В силу симметрии системы, эти уравнения могут быть записаны на полупериоде [7, 8]:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^l \int_0^{T/2} \chi(x,z,t-s)\Phi[y^0(z,s)]dzds, \qquad (6)$$

$$y°(x,t) = -u(x,t) - \int_0^{T/2} \chi_1(t-s)\Phi[y°(x,s)]ds, \qquad (7)$$

где χ и χ_1 –периодические функции Грина (ПФГ) [7, 8]; см. также ниже. Поле перемещенийнесущего структурного элемента в пренебрежении соударениями:

$u_1(x,t)= [P_1 \sin\omega_0 x \cos\omega t\,][E\omega_0 \cos\omega_0 l]^{-1}$, (8)

причем в соответствии с общими построениями, данными в [5, 6], в данном случае $\omega_0 = \omega a^{-1}$, где $a = (E/\rho)^{1/2}$. ПФГ $\chi_1(t)$ в соответствии с общими определениями дается рядом:

$$\chi_1(t) = T^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{-mk^2\omega^2}.$$

В соответствии с методикой, описанной в [7, 8], при $0<t\leq T/2$ данный бесконечный ряд можно записать в конечной форме:

$$\chi_1(t) = m^{-1}[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\pi\omega^{-1}].$$

Вне интервала]0, T/2] данное представление можно следует продолжить по периодичности, исходя из условий симметрии. В результате получим пилообразную периодическую функцию («треугольный синус»).

ПФГ χ(x, z, t) соответствует линейному волновому оператору и типу рассматриваемых граничных условий [см.(3)].Пользуясь сведениями о динамических податливостях распределенных систем их ПФГ, данных в [7, 8], находим:

$$\chi(x,z,t) = (lT\rho)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\Omega_n \cos \tfrac{1}{4}\Omega_n T)^{-1} \sin(h_n x)\sin(h_n z)\cos[\Omega_n(t - \tfrac{1}{4}T)], \qquad (9)$$

$$h_n = [(2l)^{-1}(2n+1)\pi]; \Omega_n = {}^1\!/\!_2\, a(2n+1)\pi l^{-1}; a = \sqrt{E/\rho}; 0, < t \le \frac{1}{2}T.$$

Функция, определяемая (9) должна быть продолжена на всю числовую ось, исходя из условия Т-периодичности и симметрии [7, 8]. Показывается (см. также [4]), что для ПФГ (9) имеет место и следующее представление

$$\chi(x,z,t) = 4(Ta^2\rho)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} G_{2k+1}(x,z)\cos[(2k+1)\omega t], \tag{10}$$

причем функции

$$G_k(x,z) = [-k\omega_0 \cos k\omega_0]^{-1}\cos k\omega_0(z-l)\sin k\omega_0 x, 0 \le x \le l;$$

$$G_k(x,z) = [-k\omega_0 \cos k\omega_0]^{-1}\cos k\omega_0(x-l)\sin k\omega_0 z, z \le x \le l; \tag{11}$$

Определяются функциями Грина соответствующей задачи Штурма - Лиувилля, в данном случае задачи с левым закрепленным и правым свободным концом [9]. При использовании ряда (10) суммирование ведется лишь по нечетным индексам k.

В соответствии с условиями (4) и (5), принимая, что в системе реализуются симметричные двухударные режимы движения ([7, 8]) запишем плотность силы ударного взаимодействия как

$\Phi(y^\circ)=J(x)\delta^{T/2}[t-\varphi(x)]$,

где симметричная последовательность δ-функций Дирака определяется обобщенным рядом Фурье вида:

$$\delta^{T/2}(t)=2/T\sum_{\sigma=-\infty}^{\infty}\exp[i(2\sigma+1)\omega t],\ \omega=2\pi/T,$$

который равносилен следующему ряду в обобщенных функциях:

$$\delta^{T/2}(t)=\sum_{K=-\infty}^{\infty}[\delta(t-KT)-\delta(t-T/2-KT)].$$

С учетом приведенных выше соотношений, внося (6) в (7), получаем двухфункциональное представление [10] вида:

$$y^0(x,t) = -u_1(x,t) - J(x)\chi_1[t-\varphi(x)] - \int_0^l J(z)\chi[(x,z,t-\varphi(z)]dz. \tag{12}$$

Двухфункциональные представления типа (12), определяют при сделанных предположениях искомые поля перемещений. Воспользуемся (4),(5) и (8).Имеем ($\omega_0=\omega a^{-1}$; $^{-}\chi_1=\chi_1(0)$)**:**

$$J(x) = J_0 - \chi_1^{-1}\int_0^l J(z)\chi[x,z,\varphi(x)-\varphi(z)]dz - \varepsilon P_1[E\omega_0\chi_1\cos\omega_0 l]^{-1}\sin\omega_0 x\cos[\omega_0\varphi(x)] \tag{13}$$

$$J(x)=2M\{(2m)^{-1}J(x)-\int_0^l J(z)\chi_{-t}[x,z,\varphi(x)-\varphi(z)]dz+\varepsilon P_1 a[E_0\cos\omega_0 l]^{-1}\sin\omega_0 x\cos[\omega_0\varphi(x)]\}\qquad(14)$$

Причем $J_0= -\Delta/\chi_1(0)$ - плотность импульса удара, отвечающая абсолютно жесткой несущей части среды (замороженной системе) и учтено, что в соответствии со свойствами ПФГ [7, 8]: $\chi_1(0)=-1/2m$.

Решение этой интегро-операторной системы уравнений полностью определяет двухфункциональное представление для поля перемещений несущей части вибровода. В соответствии с (6) имеем

$$u(x,t)=u_1(x,t)+\int_0^l J(z)\chi[x,z,t-\varphi(z)]dz,\qquad(15)$$

4. Рассмотрим случай прохождения через область первой резонансной частоты. В работах [2 - 6] показано, что в этом случае в системах рассматриваемого типа реализуются синфазные формы нелинейных колебаний. Предположим, кроме того, что линейная плотность присоединенного оборудования существенно меньше погонной массы несущего стержня: ρ »m. Тогда вне зон резонансных частот линейной системы, ПФГ (9) мала: ρ <<1

При помощи формулы (9), учитывая свойства ПФГ [7, 8] можно показать, что в рассматриваемом гамильтоновом случае значения $\omega\varphi=0$, π тождественно удовлетворяют уравнению (14).Учитывая, что в при действии реальной диссипации устойчивому режиму в порождающей системе ($\rho\to\infty$) может отвечать только большее значение импульса удара, при $\omega_0<\pi/2l$ выберем $\omega\varphi=0$; в тоже время при $\pi/2l<\omega_0<\pi/l$ выбираем $\omega\varphi=\pi$.

Следует специально подчеркнуть, что при анализе ситуации в зарезонансных областях $\omega_0>\pi/l$, необходимо введение в рассмотрение различного рода антифазных форм нелинейных колебаний. Для виброводов с внутренними разрывами описание таких форм требует отдельных рассмотрений, выводящих за рамки данной статьи, т.к. в отличии от более ранних работ [2-61 здесь появляется необходимость нетривиального оперирования с моделями в обобщенных функциях.

Ограничиваясь важнейшим случаем синхронизации ударников вблизи первой резонансной зоны, заметим, что если φ=const, то уравнение (13) - суть уравнение Фредгодьма. Считая ρ^{-1} - малым (см. выше), вне малой окрестности значения $\omega_0>0{,}5\pi/l$, при помощи метода последовательных приближений найдем первое приближение для плотности импульса $J(x)$, полагая, что в нулевом (порождающем) приближении $J(x)\approx.\approx J_0=-\Delta/\chi_1(0)$. Имеем после вычислений с учетом (9) - (11):

$$J(x)=J_0\{1-\frac{8m}{\pi\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)\omega_0(x-l)]}{(2k+1)^2\{1-\cos[(2k+1)\omega_0 l]\}}\}+4\varepsilon\frac{P_1 am}{\pi E}\left|\frac{\sin\omega_0 x}{\cos\omega_0 l}\right|,\qquad(16)$$

Причем здесь: $\omega_0\neq\pi/2l;\omega_0<\pi/l;\chi_1(0)=\pi/4m\omega$.

Из формулы (15) с точностью до малых высшего порядка найдем:

$$u(x,t)=4\varepsilon\frac{P_1 am}{\pi E}\frac{\sin\omega_0 x}{\cos\omega_0 l}\cos\omega t+\frac{8\Delta m}{\pi^2\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\{\frac{\cos[(2k+1)\omega_0(x-l)]}{(2k+1)^2\cos[(2k+1)\omega_0 l]}-1\}\cos[(2k+1)\omega(t-\varphi)]+\ldots, \quad (17)$$

откуда обычным для сильно нелинейных виброводов анализом [2-6] можно получить, что при $\omega_0 < \pi/2l; \varphi = 0$ вибровод прозрачен для основного тона и система вибрирует. Если $\omega_0 > \pi/2l; \varphi = \pi$, то вибровод заперт для основного тона и вибрации практически нет. В обоих случаях в системе генерируется представительный набор высших гармонических составляющих.

5. В заключении сделаем несколько замечаний общего характера.

А. Необходимость обращения к подобным задачам диктуется прежде всего тем обстоятельством, что в реальных машинных конструкциях именно множественные систематические соударения элементов подсистем весьма часто оказываются "ответственными" за формирование глобального виброполя и за виброактивность конструкций в целом.

Б. Предложенью модели позволяют также исследовать и стохастизацию вибрационных полей, хотя в силу максимально большой интенсивности наиболее опасными для вибростойкости конструкций оказываются резонансные виброударные процессы, исследуемые с помощью изложенных методик

В. Рассмотренные модели могут быть существенно обобщены за счет более полного учета частотных свойств несущей и присоединенной частей

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 13-08-01235, 13-08-90419).

Список литеоатуры

1. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел.-М.: Наука,1976.-328 с.
2. Крупенин В.Л. К теории сильно нелинейных виброводов // Машиноведение.-1987. N 1.С..25-32.
3. Веприк А.М., Litre Вознюк П.Д. , Крупенин В.Л. и др. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний.- Л.:Машиностроение,1987. -87 с.
4. Крупенин В.Л. Модель сильно нелинейной вибропроводящей среды с распределенным ударным элементом// ДАН. 1995. Т. 343. №6. С. 759-763.
5. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 1) // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www. vntr.ru). 2011. №6. С. 26-33.
6. Крупенин В.Л. К описанию процессов прохождения нелинейных волн через машинные конструкции, моделируемые посредством сильно нелинейных сплошных сред сложной структуры (часть 2) // Интернет- журнал «Вестник научно-технического развития» (www. vntr.ru). 2011. №7. С. 3-16.
7. БабицкийВ.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. - М.: Наука. 1985. 320 с.
8. Babitsky V.I., Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.p.

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
10. Крупенин В.Л. О представлении периодических виброударных процессов через параметры движения «импульс - фаза» // Проблемы машиностроения и надежности машин. № 1. 2010 г. С. 12 – 18.