Кинки в сильно периодически возмущенном уравнении синус-Гордон

В.Ш. Бурд

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Аннотация. Рассматривается периодически возмущенное уравнение синус-Гордон. Возмущение представляет собой быстро осциллирующую периодическую функцию с нулевым средним значением и большой амплитудой. Строится усредненное уравнение и выясняется, когда это уравнение имеет в качестве решений кинки.

Ключевые слова: уравнение синус-Гордон, периодическое возмущение, метод усреднения, кинки.

1. Введение

Как известно, действие быстро изменяющихся возмущений может привести к существенному изменению динамики нелинейной системы. В частности, возмущение может стабилизировать некоторые типы динамических режимов. Знаменитым примером такого типа является стабилизация верхнего состояния равновесия маятника с колеблющейся точкой подвеса. В работе [1] показано, что подобный эффект может быть достигнут при действии внешней периодической силы с большой амплитудой. амплитудой. В работах [2,3] рассматривался вопрос о возникновении кинков под действием периодического возмущения с большой амплитудой в системе синус-Гордон. В [4] исследуется динамика кинков уравнения синус-Гордон в присутствии быстро изменяющихся возмущений. В частности, предполагается, что периодическая внешняя сила имеет большую частоту ω и амплитуду пропорциональную ω^2. Приближенное решение ищется в виде ряда Фурье с медленно меняющимися коэффициентами. Авторам удалось построить усредненное уравнение первого приближения в случае специального возмущения. В [5] динамика кинков изучалась при действии периодической внешней силы с большой частотой и постоянной амплитудой. Исходная система записывалась в гамильтоновой форме и метод канонических преобразований применяется, чтобы получить усредненные уравнения.

В настоящей работе предполагается, что вынужденная периодическая сила является быстро осциллирущей с большой амплитудой. Вводится малый параметр ε и делаются точные предположения об асимптотике амплитуды и частоты внешней силы. Для построения усредненных уравнений используется классический метод усреднения [6,7]. Исследуемая система записывается в гамильтоной форме аналогичной той, которая использовалась при иследований движений маятника с вибрирующей точкой подвеса (см.[7], гл. 11). Сначала рассматривается возмущенное уравнение маятника. Полученные здесь результаты, повидимлму, ранее не отмечались. Затем соответствующая задача исследуется для уравнения синус-Гордон.

2. Маятник в присутствии вынужденной быстро осциллирующей периодической силы с большой амплитудой

Начнем с уравнения простого маятника с быстро осциллирующим периодическим возмущением большой амплитуды. Уравнение имеет вид

$$x'' + \sin x = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{1}$$

где ε - малый параметр, $f(t)$ - периодическая функция с периодом 2π, M - постоянная. В уравнении (1) сделаем замену

$$x = y + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

где $F''(t) = f(t)$. После замены уравнение (1) принимает вид

$$y'' + \sin\left[y + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right] = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$y'' + A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin y + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\cos y = 0, \tag{3}$$

где

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right),\ B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right).$$

Введем некоторые дополнительный обозначения. Через $\langle g(t)\rangle$ обозначим среднее значение периодической функции $g(t)$. Далее, через $A_{-1}(t)$, и $B_{-1}(t)$ обозначим периодические функции с нулевым средним значением, производные которых удовлетворяют равенствам $A'_{-1}(t) = A(t) - \langle A(t)\rangle$ и $B'_{-1}(t) = B(t) - \langle B(t)\rangle$ соответственно.

Уравнение (3) похоже на уравнение движения маятника, точка подвеса которого совершает колебания в плоскости движения маятника. От уравнения (3) перейдем к системе уравнений в гамильтоновой форме (см. [7], гл.11)

$$\begin{array}{l}
\frac{dy}{dt} = z - \varepsilon A_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin y - \varepsilon B_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\cos y, \\
\frac{dz}{dt} = \varepsilon A_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) z\cos y - \varepsilon B_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) z\sin y + \frac{\varepsilon^2}{2}(B^2_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - A^2_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right))\sin 2y - \\
\varepsilon^2 A_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) B_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\cos 2y - \langle A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\rangle\sin y + \langle B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\rangle\cos y.
\end{array}$$

В последней системе сделаем замену времени

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Получим систему

$$\begin{array}{l}
\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon z - \varepsilon^2 A_{-1}(\tau)\sin y - \varepsilon^2 B_{-1}(\tau)\cos y, \\
\frac{dz}{d\tau} = \varepsilon^2[A_{-1}(\tau) z\cos y) - B_{-1}(\tau) z\sin y] - \frac{\varepsilon^3}{2}(B^2_{-1}(\tau) - A^2_{-1}(\tau))\sin 2y - \\
\varepsilon^3 A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\cos 2y - \varepsilon[\langle A(\tau)\rangle\sin y + \langle B(\tau)\rangle\cos y].
\end{array} \tag{4}$$

Система (4) имеет стандартную форму для применения метода усреднения. Построим усредненные уравнения. Сделаем замену переменных

$$\begin{array}{l} y = \xi + \varepsilon^2 u_2(\tau, \xi) + \varepsilon^3 u_3(\tau, \xi), \\ z = \eta + \varepsilon^2 w_2(\tau, \xi, \eta) + \varepsilon^3 w_3(\tau, \xi, \eta). \end{array} \tag{5}$$

Замена (5) должна привести систему (4) к виду

$$\begin{array}{l} \frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon\eta + \varepsilon^2 A_2(\xi, \eta) + \varepsilon^3 A_3(\xi, \eta) + O(\varepsilon^4), \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\varepsilon[\langle A(\tau)\rangle \sin\xi + \langle B(\tau)\rangle \cos\xi] + \varepsilon^2 B_2(\tau, \xi) + \varepsilon^3 B_3(\xi, \eta) + O(\varepsilon^4). \end{array}$$

Нам необходимо найти функции A_2, A_3, B_2, B_3. Подставим формулы замены (5) в систему (4). Получим

$$\begin{array}{l} \varepsilon\eta + \varepsilon^2 A_2(\xi, \eta) + \varepsilon^3 A_3(\xi, \eta) + \varepsilon^2 v_{2\tau} + \varepsilon^3 v_{2\xi}\eta + \varepsilon^3 v_{2\eta}[-\langle A(\tau)\rangle \sin\xi - \langle B(\tau)\rangle \cos\xi] + \\ \varepsilon^3 v_{3\tau} + O(\varepsilon^4) = -\varepsilon^2 A_{-1}(\tau)\sin\xi - \varepsilon^2 B_{-1}(\tau)\cos\xi + \varepsilon^3 w_2(\tau, \xi, \eta) + O(\varepsilon^4). \end{array} \tag{6}$$

$$\begin{array}{l} -\varepsilon[\langle A(\tau)\rangle \sin\xi - \langle B(\tau)\rangle \cos\xi] + \varepsilon^2 B_2(\xi, \eta) + \varepsilon^3 B_3(\xi, \eta) + \varepsilon^2 w_{2\tau} \\ +\varepsilon^3 w_{2\xi}\eta + \varepsilon^3 w_{2\eta}[\langle A(\tau)\rangle \sin\xi - \langle B(\tau)\rangle \cos\xi] + \\ \varepsilon^3 w_{3\tau} + O(\varepsilon^4) = -\varepsilon[\langle A(\tau)\rangle \sin\xi + \langle B(\tau)\rangle \cos\xi] + \varepsilon^2[A_{-1}(\tau)\eta\cos\xi) - B_{-1}(\tau)\eta\sin\xi] - \\ \frac{\varepsilon^3}{2}(B_{-1}^2(\tau) - A_{-1}^2(\tau))\sin 2\xi - \varepsilon^3 A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\cos 2\xi \end{array} \tag{7}$$

Приравнивая слагаемые в обеих частях равенств (6) и (7) при ε^2, получим

$$A_2(\xi, \eta) + v_{2\tau} = B_{-1}(\tau)\cos\xi, \quad B_2(\xi, \eta) + w_{2\tau} = A_{-1}(\tau)\eta\cos\xi - B_{-1}(\tau)\eta\sin\xi. \tag{8}$$

Функции $A_2(\xi)$, $B_2(\xi, \eta)$ определяются как средние значения по τ правых частей равенств (8), а функции $v_2(\tau, \xi)$, $w_2(\tau, \xi, \eta)$ - как периодические по τ с нулевым средним значением. Поэтому $A_2(\xi) = B_2(\xi, \eta) = 0$, а

$$v_2(\tau, \xi) = \int B_{-1}(\tau)d\tau\cos\xi, \quad w_2(\tau, \xi, \eta) = \int A_{-1}(\tau)d\tau\eta\cos\xi - \int B_{-1}(\tau)d\tau\eta\sin\xi.$$

Далее, приравниваем слагаемые при ε^3 в равенствах (6) и (7). Получим соотношения

$$A_3(\xi, \eta) + v_{2\xi}\eta + v_{3\tau} = w_2(\tau, \xi, \eta).$$

$$\begin{array}{l} B_3(\xi, \eta) + w_{2\eta}[\langle A(\tau)\rangle \sin\xi - \langle B(\tau)\rangle \cos\xi] + w_{3\tau} = \\ \frac{1}{2}(B_{-1}^2(\tau) - A_{-1}^2(\tau))\sin 2\xi - A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\cos 2\xi. \end{array}$$

Из этих соотношений следует, что

$$A_3(\xi, \eta) \equiv 0, \quad B_3(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\langle(B_{-1}^2(\tau) - A_{-1}^2(\tau))\rangle \sin 2\xi - \langle A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\rangle \cos 2\xi.$$

Следовательно, усредненная система имеет вид

$$\begin{array}{l} \frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon\eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\varepsilon[\bar{A}\sin\xi + \bar{B}\cos\xi] - \varepsilon^3[\bar{C}\sin 2\xi + \bar{D}\cos 2\xi], \end{array}$$

где

$$\bar{A} = \langle A(\tau) \rangle, \quad \bar{B} = \langle B(\tau) \rangle, \quad \bar{C} = \frac{1}{2} \langle (A_{-1}^2(\tau) - B_{-1}^2(\tau)) \rangle, \bar{D} = \langle A_{-1}(\tau) B_{-1}(\tau) \rangle. \qquad (9)$$

Усредненную систему можно записать в виде уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \varepsilon^2 [\bar{A} \sin\xi + \bar{B} \cos\xi] + \varepsilon^4 [\bar{C} \sin 2\xi + \bar{D} \cos 2\xi] = 0.$$

В исходном времени t усредненное уравнение выглядит следующим образом

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + [\bar{A} \sin\xi + \bar{B} \cos\xi] + \varepsilon^2 [\bar{C} \sin 2\xi + \bar{D} \cos 2\xi] = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) можно записать в более компактной форме

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + E \sin(\xi - \gamma) + \varepsilon^2 F \sin(2\xi - \delta) = 0, \qquad (11)$$

где

$$\bar{A} = E \cos\gamma, \quad \bar{B} = E \sin\gamma, \quad \bar{C} = F \cos\delta, \quad \bar{D} = F \sin\delta. \qquad (12)$$

Усредненное уравнение первого приближения

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + E \sin(\xi - \gamma) = 0$$

имеет два состояния равновесия $\xi_1 = \gamma$ и $\xi_2 = \pi + \gamma$, причем ξ_1 устойчиво, а ξ_2 неустойчиво. Если $\bar{A} = \bar{B} = 0$, то уравнение (10) имеет четыре состояния равновесия. Состояния равновесия $\delta/2$, $\pi + \delta/2$ устойчивы, а состояния равновесия $\pi/2 + \delta/2$, $3\pi/2 + \delta/2$ неустойчивы.

В качестве примера положим

$$f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = -\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Из известных соотношений для функций Бесселя (см., напр.[8])

$$\cos(z \sin\theta) = J_0(z) + 2 \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos(2k\theta),$$
$$\sin(z \sin\theta) = 2 \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z) \sin[(2k+1)\theta],$$

где $J_k(z)$ - функция Бесселя целого порядка k, следует, что

$$\bar{A} = \langle A(t) \rangle = J_0(M), \quad \bar{B} = \langle B(t) \rangle = 0,$$

Далее,

$$A_{-1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2k}(M)}{k} \sin 2kt, \quad B_{-1}(t) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2k+1}(M)}{2k+1} \cos(2k+1)t.$$

Следовательно,
$$\bar{C} = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_{2k+1}^2(M)}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2k}^2(M)}{k^2}, \quad \bar{D} = 0.$$
В данном случае усредненное уравнение (9) принимает вид
$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + J_0(M)\sin\xi + \varepsilon^2\bar{C}\sin 2\xi = 0. \tag{13}$$
В первом приближении получим уравнение
$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + J_0(M)\sin\xi = 0.$$
Состояния равновесия $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pi$. Устойчивость состояний равновесия определяется знаком числа $J_0(M)$.

Теперь рассмотрим уравнение
$$x'' + \alpha x' + \sin x = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{14}$$
где ε - малый параметр, $f(t)$ - периодическая функция с периодом 2π, α - коэффициент затухания, M - постоянная. Уравнение (14) отличается от уравнения (1) наличием члена с затуханием. В уравнении (14) сделаем замену
$$x = y + G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$
где функция $G(t)$ является решением уравнения
$$G'' + \alpha G' = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$
После замены получим уравнение
$$y'' + \alpha y' + A(\frac{t}{\varepsilon})\sin y + B(\frac{t}{\varepsilon})\cos y = 0, \tag{15}$$
где
$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left(G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \quad B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left(G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right).$$
Соответствующая гамильтонова система имеет вид
$$\begin{aligned}
&\tfrac{dy}{dt} = z - \varepsilon A_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\sin y - \varepsilon B_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\cos y,\\
&\tfrac{dz}{dt} = -\alpha z + \varepsilon A_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)(\alpha\sin y + z\cos y) + \varepsilon B_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)(\alpha\cos y - z\sin y) +\\
&\tfrac{\varepsilon^2}{2}(B_{-1}^2\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right) - A_{-1}^2\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right))\sin 2y - \varepsilon^2 A_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)B_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\cos 2y - \langle A\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\rangle\sin y - \langle B\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\rangle\cos y.
\end{aligned}$$
Переходим к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$. Получим систему в стандартной форме
$$\begin{aligned}
&\tfrac{dy}{d\tau} = \varepsilon(z - \varepsilon A_{-1}(\tau)\sin y - \varepsilon B_{-1}(\tau)\cos y),\\
&\tfrac{dz}{d\tau} = \varepsilon[-\alpha z + \varepsilon A_{-1}(\tau)(\alpha\sin y + z\cos y) + \varepsilon B_{-1}(\tau)(\alpha\cos y - z\sin y) +\\
&\tfrac{\varepsilon^2}{2}(B_{-1}^2(\tau) - A_{-1}^2(\tau))\sin 2y - \varepsilon^2 A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\cos 2y - \langle A(\tau)\rangle\sin y - \langle B(\tau)\rangle\cos y].
\end{aligned} \tag{16}$$

После усредняющих замен вида (5) получим усредненную систему

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon\eta, \\ &\tfrac{d\eta}{d\tau} = -\varepsilon[\alpha\xi + \bar{A}\sin\xi + \bar{B}\cos\xi] - \varepsilon^3[\bar{C}\sin 2\xi + \bar{D}\cos 2\xi], \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь использованы обозначения (9). Усредненная система первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon\eta, \\ &\tfrac{d\eta}{d\tau} = -\varepsilon[\alpha\eta + \bar{A}\sin\xi + \bar{B}\cos\xi]. \end{aligned}$$

Эту систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon\eta, \\ &\tfrac{d\eta}{d\tau} = -\varepsilon[\alpha\eta + E\sin(\xi - \gamma)]. \end{aligned}$$

Состояние равновесия $\xi_1 = \gamma$ этой системы асимптотически устойчиво, а состояние равновесия $\xi_2 = \pi + \gamma$ неустойчиво. Из теоремы об усреднении на бесконечном промежутке (см. [6,7]) следует, что при достаточно малых ε система (16) имеет асимптотически устойчивое 2π-периодическое решение $y_1(\tau)$, близкое к ξ_1 и неустойчивое 2π-периодическое решение $y_2(\tau)$, близкое к ξ_2. Отсюда следует, что при достаточно малых ε уравнение (14) имеет два быстро осциллирующих периодических решения $x_1(t) = y_1(t/\varepsilon) + G(t/\varepsilon)$ и $x_2(t) = y_2(t/varepsilon) + G(t/\varepsilon)$.

Если $f(t) = -\sin t$, то

$$G(t) = \frac{\varepsilon\gamma M}{1+\gamma^2\varepsilon^2}\cos\frac{t}{\varepsilon} + \frac{M}{1+\gamma^2\varepsilon^2}\sin\frac{t}{\varepsilon}.$$

Легко видеть, что

$$G(t) = M\sin\frac{t}{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

Поэтому усредненное уравнение в этом случае с точностью до члена с затуханием совпадает с усредненным уравнением (13).

Периодически возмущенное уравнение синус-Гордон

Теперь обратимся к периодически возмущенному уравнению синус-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{18}$$

где ε - малый параметр, $f(t)$ - периодическая функция с периодом 2π, M - постоянная. В уравнении (18) сделаем замену

$$u = v + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

где $F''(t) = f(t)$. После замены уравнение (18) принимает вид

$$v_{tt} - v_{xx} + \sin\left(v + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) = 0. \tag{19}$$

Уравнение (19) можно записать в виде

$$v_{tt} - v_{xx} + A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin v + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\cos v = 0, \tag{20}$$

где

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right),\ B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right).$$

Как и в случае рассмотрения уравнения (3) вводим обозначение для среднего значения периодической функции, а также функции $A_{-1}(t)$ и $B_{-1}(t)$. Запишем уравнение (20) в виде эквивалентной системы уравнений

$$\begin{aligned}
&v_t = p - A_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\sin v - B_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\cos v,\\
&p_t = v_{xx} - A_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)p\cos v - B_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)p\sin v +\\
&\tfrac{1}{2}(B^2_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right) - A^2_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right))\sin 2v - A_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)B_{-1}\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\cos 2v - \langle A\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\rangle\sin v - \langle B\left(\tfrac{t}{\varepsilon}\right)\rangle\cos v.
\end{aligned}$$

После перехода ко времени $\tau = t/\varepsilon$, получим систему

$$\begin{aligned}
&v_\tau = \varepsilon[p - A_{-1}(\tau)\sin v - B_{-1}(\tau)\cos v],\\
&p_\tau = \varepsilon[v_{xx} - A_{-1}(\tau)p\cos v - B_{-1}(\tau)p\sin v +\\
&\tfrac{1}{2}(B^2_{-1}(\tau) - A^2_{-1}(\tau))\sin 2v - A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\cos 2v - \langle A(\tau)\rangle\sin v - \langle B(\tau)\rangle\cos v].
\end{aligned} \tag{16}$$

Выполним стандартную замену метода усреднения

$$\begin{aligned}
&v = \xi + \varepsilon^2 v_2(\tau,\xi) + \varepsilon^3 v_3(\tau,\xi),\\
&p = \eta + \varepsilon^2 w_2(\tau,\xi,\eta) + \varepsilon^3 w_3(\tau,\xi,\eta).
\end{aligned}$$

Мы хотим исключить время τ и получить систем

$$\begin{aligned}
&\xi_\tau = \varepsilon\eta + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \varepsilon^3 A_3(\xi) + O(\varepsilon^4)\\
&\eta_\tau = \varepsilon\xi_{xx} - \varepsilon(\langle A(\tau)\rangle\sin v - \langle B(\tau)\rangle\cos v) + \varepsilon^2 B_2(\xi,\eta) + \varepsilon^3 B_3(\xi,\eta) + O(\varepsilon^4).
\end{aligned}$$

Подставим формулу замены в систему (16). Получим соотношения почти идентичные соотношениям (6) и (7)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\eta + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \varepsilon^3 A_3(\xi) + \varepsilon^2 v_{2\tau} + \varepsilon^3 v_{2\xi}\eta + \varepsilon^3 v_{2\eta}[-\langle A(\tau)\rangle\sin\xi - \langle B(\tau)\rangle\cos\xi] +\\
&\varepsilon^3 v_{3\tau} + O(\varepsilon^4) = -\varepsilon^2 A_{-1}(\tau)\sin\xi - \varepsilon^2 B_{-1}(\tau)\cos\xi + \varepsilon^3 w_2(\tau,\xi,\eta) + O(\varepsilon^4).
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\xi_{xx} - \varepsilon[\langle A(\tau)\rangle\sin\xi - \langle B(\tau)\rangle\cos\xi] + \varepsilon^2 B_2(\xi,\eta) + \varepsilon^3 B_3(\xi,\eta) + \varepsilon^2 w_{2\tau}\\
&+\varepsilon^3 w_{2\xi}\eta + \varepsilon^3 w_{2\eta}[\langle A(\tau)\rangle\sin\xi - \langle B(\tau)\rangle\cos\xi] +\\
&\varepsilon^3 w_{3\tau} + O(\varepsilon^4) = -\varepsilon[\langle A(\tau)\rangle\sin\xi + \langle B(\tau)\rangle\cos\xi] + \varepsilon^2[A_{-1}(\tau)\eta\cos\xi) - B_{-1}(\tau)\eta\sin\xi] -\\
&\tfrac{\varepsilon^3}{2}(B^2_{-1}(\tau) - A^2_{-1}(\tau))\sin 2\xi - \varepsilon^3 A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\cos 2\xi
\end{aligned} \tag{18}$$

Приравниваем слагаемые при степенях ε^2 и ε^3 в обеих частях равенств (17) (18). Как и в случае систем (6) и (7) получим $A_2 = A_3 = B_2 = 0$, а

$$B_3(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\langle(B^2_{-1}(\tau) - A^2_{-1}(\tau))\rangle\sin 2\xi - \langle A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\rangle\cos 2\xi.$$

Следовательно, усредненная система имеет вид

$$\begin{aligned}
&\xi_\tau = \varepsilon\eta,\\
&\eta_\tau = \varepsilon\xi_{xx} - \varepsilon(\langle A(\tau)\rangle \sin v - \langle B(\tau)\rangle \cos v) + \varepsilon^3[\tfrac{1}{2}\langle (B_{-1}^2(\tau) - A_{-1}^2(\tau))\rangle \sin 2\xi -\\
&\langle A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\rangle \cos 2\xi].
\end{aligned} \tag{19}$$

Усредненную систему (19) можно записать в виде одного уравнения второго порядка

$$\begin{aligned}
&\xi_{\tau\tau} - \varepsilon^2\xi_{xx} + \varepsilon^2(\langle A(\tau)\rangle \sin v + \langle B(\tau)\rangle \cos v) - \varepsilon^4[\tfrac{1}{2}\langle (B_{-1}^2(\tau) - A_{-1}^2(\tau))\rangle \sin 2\xi -\\
&\langle A_{-1}(\tau)B_{-1}(\tau)\rangle \cos 2\xi] = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Усредненное уравнение (20) запишем во времени t, используя обозначения (9)

$$\xi_{tt} - \xi_{xx} + (\bar{A}\sin v + \bar{B}\cos v) + \varepsilon^2[C\sin 2\xi + D\cos 2\xi] = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) можно записать в более компактной форме (см. обозначения (12))

$$\xi_{tt} - \xi_{xx} + E\sin(\xi - \gamma) + \varepsilon^2 F\sin(2\xi - \delta) = 0. \tag{22}$$

Усредненное уравнение первого приближения имеет вид

$$\xi_{tt} - \xi_{xx} + E\sin(\xi - \gamma) = 0. \tag{23}$$

Если $f(t) = -\sin t$, то как показывают вычисления, проведенные в предыдущем разделе для обыкновенного дифференциального уравнения, уравнение (22) превращается в уравнение

$$\xi_{tt} - \xi_{xx} + J_0(M)\sin\xi = 0.$$

Это уравнение синус-Гордон. Его волновое решение типа кинк (2π-кинк) при $J_0(M) > 0$ имеет вид

$$\xi(t,x) = 4\arctan\exp\left[\frac{(J_0(M))^{1/2}(x-ct)}{\sqrt{1-c^2}}\right].$$

Уравнение (22) в данном случае принимает вид

$$\xi_{tt} - \xi_{xx} + J_0(M)\sin\xi + \varepsilon^2\bar{C}\sin 2\xi = 0, \tag{24}$$

где

$$\bar{C} = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_{2k+1}^2(M)}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2k}^2(M)}{k^2}.$$

Уравнение (24) - это двойное уравнение синус-Гордон.

Теперь рассмотрим уравнение синус-Гордон с диссипативным членом и периодическим возмущением

$$u_{tt} + \alpha u_t - u_{xx} + \sin u = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{25}$$

В уравнении (25) делам замену

$$u = v + G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

где функция $G(t)$ является решением уравнения

$$G'' + \alpha G' = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

После замены получим уравнение

$$v_{tt} + \alpha v_t - v_{xx} + A(\frac{t}{\varepsilon}) \sin v + B(\frac{t}{\varepsilon}) \cos v = 0, \tag{26}$$

где

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left(G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \quad B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left(G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right).$$

Эквивалентная система имеет вид

$$\begin{array}{l} v_t = p - A_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \sin v - B_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \cos v, \\ p_t = v_{xx} - \alpha p + A_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) [\alpha \sin v + p \cos v] + B_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) [\alpha \cos v - p \sin v] + \\ \frac{1}{2}(B^2_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - A^2_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)) \sin 2v - A_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) B_{-1}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \cos 2v - \langle A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\rangle \sin v - \langle B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\rangle \cos v. \end{array}$$

Дальнейшие шаги аналогичны тем, которые сделаны при анализе уравнения синус-Гордон без диссипации. Переходим к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$. Получим систему в стандартной форме. Далее, делаем усредняющие замены. Получим усредненное уравнение во времени t

$$\xi_{tt} + \alpha \xi_t - \xi_{xx} + (\bar{A} \sin v + \bar{B} \cos v) + \varepsilon^2 [C \sin 2\xi + D \cos 2\xi] = 0,$$

где коэффициенты $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ определяюся формулами (9).

Литература

1. Miles J. Directly forced oscillations of an inverted pendulum, Physical Letters A, 1988, vol. 133, issue 6, p. 295–297.
2. Kivshar Yu. S., Gronbech-Jensen N., Samuelsen M.R. π kinks in a parametricaly driven sine-Gordon chain // Physical Review B, 1992, vol. 45, no. 14, pp. 7789–7794.
3. Gronbech-Jensen N., Kivshar Yu. S. Inverted kinks in ac driven damped sine-Gordon cnains // Physics Letter A 171 (1992) 338–343.
4. Kivshar Yu. S., Gronbech-Jensen N., Parmentier R.D. Kinks in the presence of rapidly varying perturbations // Physical Review E, 1994, vol. 49, no. 5, pp. 4542–4551.
5. Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N. π kinks in strongly ac driven sine-Gordon systems, Physical Review E, 1998, vol. 58, n 1, R52–R55.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М.: Наука, 1974.- 411 с.
7. Burd V. Method of averaging for differential equations on an infinite interval. Theory and applications, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 255. Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 2007, 356 c.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами под ред. М. Абрамовица и Стигун И., Наука, 1979.