www.vntr.ru №2 (78), 2013 г.

УДК 534

ОБ ЭФФЕКТАХ, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ СИЛОВОМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ КОЛЕБАНИЙ

© Виталий Львович Крупенин

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
krupeninster@gmail.com

Аннотация. *Исследуется задача об оценке механизма взаимодействия различных типов возбуждения при установлении в колебательных системах нелинейных резонансных периодических режимов. Линейная часть систем задана оператором динамической податливости общего вида. Даются методики оценки количества резонансных режимов. Показано, что число таких режимов определяется как структурой нелинейных позиционных сил, так и видом внешних возбуждающих воздействий. Рассмотрены вопросы конкуренции источников возбуждения, их согласованности и возможного доминирования одного над другим. Приводится пример виброударной системы с одной степенью свободы.*

***Ключевые слова*:** *колебания, нелинейные системы, принцип энергетического баланса, периодические резонансные режимы, силовое возбуждение, параметрическое возбуждение, смешанное возбуждение.*

ABOUT EFFECTS ACCOMPANYING THE OCCURRENCE OF PERIODIC MOTION MODE NONLINEAR OSCILLATORY SYSTEMS UNDER C POWER AND PARAMETRIC EXCITATION OF OSCILLATIONS

©V.L. Krupenin

Federal Budget-Funded Mechanical Engineering Research Institute, RAS, Moscow, Russia

Abstract. *We study the problem of estimating the mechanism of interaction of different types of excitation in establishing in oscillatory systems of nonlinear resonance periodic movements.. The linear part of systems defined using the dynamic compliance of the general form. Given methodology of assessment of resonant modes. Shows that the number of such regimes is defined as the structure of nonlinear positional forces and external views of stimuli. The problems of competition excitation sources , their consistency and possible dominance of one over the other. Is an example of vibro-impact system with one degree of freedom .*

Keywords: *vibrations, nonlinear system, the principle of energy balance, periodic resonant modes, power excitation, parametric excitation, mixed excitation.*

1. Рассмотрим параметрическую механическую систему с n степенями свободы и полной диссипацией [1, 2- 5] . Пусть модель системы имеет вид:

$$x(t)=L(p)\{F[t;x(t);px]\} \tag{1}$$

Здесь $p\equiv d/dt$ – оператор дифференцирования, $L(p)$ – оператор динамической податливости, приведенный к координате x [1, 2], даваемой меромофной функцией комплексного переменного p: $L(p)=W(p)V^{-1}(p)$, где функции W и V – аналитические функции. Пусть все полюса функции $L(p)$ p_k – простые и их число равно n. Тогда можно записать, ведя суммирование по всем k от 1 до n:

$$L(p)=\sum_{k=1}^{n} A_k(p-p_k)^{-1},$$

где коэффициенты A_k зависят от структур функций W и V; кратные нули функции обычно не рассматриваются, т.к. они возникают в механических системах весьма специального вида. Отметим, что уравнение (1) остается в силе, когда система имеет распределенные параметры. В этом случае $n\to\infty$. Для систем с распределенными параметрами без массивных включений, как правило, имеет место асимптотика $L(p)=O(p^{-1})$. Если к координате x приведено точечное массивное тело, то асимптотика $L(p)=O(p^{-2})$.

Отметим, наконец [3-5], что оператор L может быть задан в результате обработки опытных данных в виде динамических податливостей $L(i\omega)\equiv B_1(\omega)+iB_2(\omega)$ или их теоретического задания. Здесь B_1 и B_2 соответственно упругая и диссипативная составляющая линейной системы, подверженной внешним воздействиям.

Пусть, уравнение (1) имеет T-периодическое решение $x(t)$ и пусть, входящая в уравнение (1) функция F – периодична по времени t: $F(t;x;px)\equiv F(t+T;x;px)$. Домножив правую и левую части уравнения на скорость px, а затем, проинтегрировав результат по отрезку $\mathbf{T}\equiv[0, T]$, получим после простых преобразований:

$$\int_0^T [L^{-1}(p)x(t)-F(t;x;px)]pxdx=0. \qquad (2)$$

Равенство (2) выражает принцип энергетического баланса, в соответствии с которым на периодическом режиме за период движения в среднем сбалансируются работы сил диссипации и сил возбуждения. Очевидно, что если имеются периодические решения уравнения (1) с периодом T_1, то равенство (2) снова имеет место, интегрирование ведется по отрезку $\mathbf{T_1}\equiv[0, T_1]$. Кроме того, если решение $x(t)$ зависит от какого-либо неизвестного параметра, равенство (2) может рассматриваться, как уравнение для его определения.

2. Предположим, что силовой фактор $F(t;x;px)$, определяющий уравнение (1) представим в виде:

$$F(t;x;px)\equiv A(x)+\mu C(t, x,\ldots)+\psi \Pi(t, x,\ldots)+\varepsilon D(x, px, \ldots). \qquad (3)$$

Система консервативна, если параметры и величина B_2 одновременно равны нулю:

$$\mu=\psi=\varepsilon=B_2=0 \qquad (4)$$

система оказывается гамильтоновой, при $\mu\neq0$, $\psi\neq0$, но $\varepsilon=B_2=0$. В представлении (3) член $C(t, x,\ldots)$ – соответствует силовому возбуждению системы, член $\Pi(t, x,\ldots)$ – параметрическому и, наконец, $D(x, px, \ldots)$ – диссипативным силам, присутствующим, помимо сил, описываемых при посредстве структурного члена B_2.

Рассмотрим вначале консервативную модель:

$$x(t)=B_1(p)[A(x)]. \qquad (5)$$

Здесь $A(x)=-d\Pi/dx$, где Π – потенциальная энергия. Пусть уравнение (5) допускает двухпараметрическое периодических семейство решений с частотой ω_0:

$$x=x[E(\omega_0), \varphi;t], \qquad (6)$$

где E и φ - два интеграла движения. Первый - взаимно однозначно связан с полной энергией консервативной системы. Второй - с фазой движения. Как правило, множество допустимых частот режимов движения консервативной системы состоит из системы интервалов или (и) изолированных точек [1, 2, 6]. Обозначим ее Λ. Пусть $\omega\in\Lambda$. При малых μ и ε искомое решение будет близко к решению консервативной задачи при $\omega_0\cong\omega$. Такие режимы движения называют *нелинейными резонансными движениями* [1-5].

Поставим вначале, как и ранее в работе [7], задачу оценки числа таких режимов. Полагая, что резонансный режим движения имеет вид (6) при $\omega_0=\omega$, предположим, что входящие в (4) параметры больше нуля, но являются малыми. Тогда искомое решение имеет вид, близкий к получаемой по формуле (5) ($\omega_0=\omega$). Ставится задача: оценить сколько именно таких режимов может быть в данной системе.

Внесем (6) в уравнение энергетического баланса, выбирая промежуток интегрирования [0, T_1]:

$$\int_0^{T_1}[L^{-1}(p)x(\varphi;\,t)-F(t;x;px)p[x(\varphi;\,t)]dx=0. \qquad (7)$$

Или, учитывая представление (3) и консервативность силы $A[x(\varphi;\,t)]$, найдем:

$$\int_0^{T_1}[L^{-1}(p)x(\varphi;\,t)-\mu C(t)-\psi\Pi[a(t)x(\varphi;\,t)]-\varepsilon D[x(\varphi;\,t),\,p\,x(\varphi;\,t])]p[x(\varphi;\,t)]dx=0. \qquad (8)$$

Здесь для определенности отброшены возможные зависимости, обозначаемые посредством многоточий. Кроме того, явно показан вид «параметрического члена». Сила $C(t)$ предполагается T-периодической функцией времени и мы сразу можем представить её в виде

$$C(t)=\sum_{j=1}^{N}c_j\cos j(\omega t+\theta_j), \qquad (9)$$

где суммирование производится вплоть до произвольно выбранной N-й гармоники. Случай бесконечного ряда ($N\to\infty$), естественно, допускается.

Совершенно аналогично можно записать:

$$a(t)=\sum_{k=1}^{K}a_k\cos k(\omega t+\beta_k), \qquad (10)$$

где, как и выше, суммирование производится вплоть до произвольно выбранной K-й гармоники и допускается случай $K\to\infty$.

В формулах (9) и (10) величины амплитуд и фаз, вообще говоря, - заданы.

Заметим, что дальнейшие построения принципиально не изменятся, если рассмотреть ряды (тригонометрические полиномы) более общего вида.

Так как колебания – вынужденные, а режим движения –периодический, то относя к диссипативной силе εD и собственные диссипативные силы (определяются структурным членом B_2), и другие диссипативные силы, будем иметь вместо (8) [1, 2] следующее уравнение энергетического баланса:

$$\int_0^{T_1} [\mu C(t) + \psi \Pi[a(t)x(\varphi;\, t)] - \varepsilon D(x(\varphi;\, t),\, p\, x(\varphi;\, t))]p[x(\varphi;\, t)]dx = 0. \qquad (11)$$

3. Пусть при $\omega_0 \cong \omega$ в консервативной системе устанавливается режим периодический режим движения (6). Пусть, кроме того, T_1=T, т. е рассматриваются основные резонансные режимы. Тогда уравнение (11) преобразуется к виду [1, 2]:

$$G(E) = \sum_{k=1}^{Q} [v_k(E,\omega)\sin k\varphi + u_k(E,\omega)\cos r\varphi], \qquad (12)$$

где Q= max (N,K), $G(E)$ – суммарный уровень диссипативных сил.

Обозначим $\alpha(Q;\varphi)$ функцию, определяющую сумму, входящую в уравнение (12). Эту функцию будем называть *фазовой* [7]. Как правило, из-за чередования интервалов монотонности фазовой функции $\alpha(Q;\varphi)$, решения уравнения (12) существуют парами Число пар решений уравнения (12) (каждому решению соответствует резонансный режим) равно количеству интервалов монотонности фазовой функции на промежутке $0 \le \varphi < T$; условие существования хотя бы одного режима записывается как:

$$\sup_{0 \le \varphi < T} \alpha(Q;E;\omega;\, \varphi) \ge G(E) > 0, \qquad (13)$$

где знак равенства соответствует границе условия существования, при реализации которой пара режимов сливается в один предельный.

В работе [7] (см. также [1, 2, 8]) было показано, что при доминировании в возбуждающей силе, при чисто силовом возбуждении, высших гармоник возможно рождение нескольких пар (>2) резонансных режимов и, соответственно, нескольких устойчивых и неустойчивых режимов. При этом именно явление доминирования и порождает ветвление (бифуркацию) резонансных режимов.

В данном случае ситуация становится более многообразной из-за наличия двух источников возбуждения колебаний – силового и параметрического. Однако общий анализ остается похожим на прежний [7]. Ветвление порождается конкуренцией гармоник возбуждения. В данном случае конкурирующие гармоники могут быть порождены разными источниками возбуждения. На рис. 1 – 3 показаны примеры трех различных фазовых функций $\alpha(Q;E;\omega;\, \varphi)$. На рис. 1 показана фазовая функция вида $\alpha(Q;E;\omega;\, \varphi) = 0{,}1\sin\varphi + 5\sin 2\varphi + 1{,}5\sin 3\varphi$. «Уровни диссипации», откладываемые по оси ординат, берутся

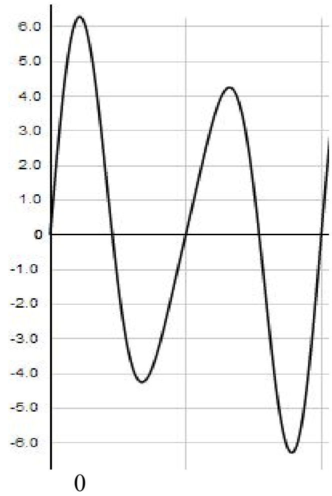

Рис.1

в некоторых условных единицах, период фазовой функции, без ограничения общности, считается равным 2π. Скорее всего в такой системе установятся две пары резонансных режимов, а при превышении величиной $G(E)$ значения условного уровня «4» – одна пара режимов.

Следующий аналогичный пример (рис.2) касается фазовой функции $\alpha(Q;E;\omega;\ \varphi)=$ $=0{,}1\sin\varphi+\sin2\varphi+1{,}5\cos3\varphi$. Видно, что здесь принципиально возможны три пары периодических режимов (при относительно низком уровне диссипации)

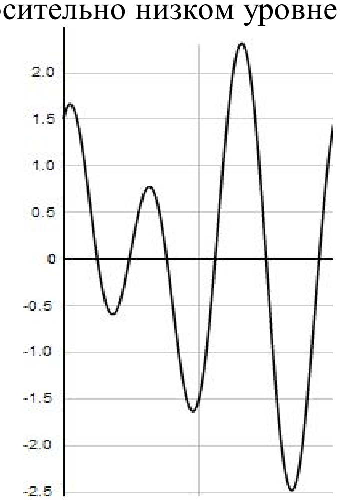

Рис.2.

Пусть $\alpha(Q;E;\omega;\ \varphi)=\sin\varphi+6\sin2\varphi+\sin3\varphi$

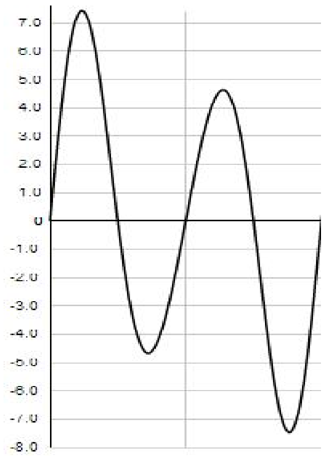

Рис.3

Здесь можно видеть, что в системе возможно появление одной или двух пар резонансных режимов движения. В этом смысле ситуация похожа на рассмотренную в работе [7].

В любом случае для существования хотя бы одной пары режимов необходимо, чтобы уровень диссипативных составляющих $G(E)$ был достаточно мал.

4. Рассматриваемые нами системы, ввиду наличия двух источников возбуждения допускают весьма разнообразное поведение. Коэффициенты $v_k(E,\omega), u_k(E,\omega)$ определяющего уравнения (12) в общем случае изменяются достаточно сложным образом, в зависимости от распределения частот линейного силового и параметрического резонансов. Кроме того определяющую роль играют разнообразные нелинейные факторы, учитываемые силой $F(t;x;px)$ (3) и характер зависимости $E(\omega_0)$ (6).

Сказанное определяет наличие двух механизмов, проявляющихся в рассматриваемой системе. Во-первых, *конкуренция* двух источников возбуждения. Так что колебания могут носить характер близкий к чисто параметрическим или, наоборот, к чисто силовым. В этом случае мы можем говорить о доминирование одного источника над другим. Во-вторых, неизбежно *взаимодействие* источников между собой. В результате параметрический и силовой источники могут действовать согласованно, вызывая интенсификацию колебаний, но в тоже время при определенной фазировке, действуя в противофазе параметрический и силовой источники могут взаимно компенсировать действие друг друга и колебания прекратятся.

Режимы движения, которые мы рассматриваем должны еще анализироваться на устойчивость. В [1, 2, 8] на примере виброударных систем показано, что один из режимов в каждой паре заведомо неустойчив.

Весьма ярко указанные явления проявляются в виброударных системах [1, 2, 8]. С формальной точки зрения, это обстоятельство определяется низкой гладкостью режимов движения консервативных виброударных систем. В уравнении (12) коэффициенты $v_k(E,\omega), u_k(E,\omega)$ убывают медленно, и влияние высших гармонических составляющих возбуждений обоих типов сказывается быстрее. В качестве примера кратко рассмотрим два различных варианта зависимости *J(ω) для системы с одной степенью свободы.* Здесь *J – импульс удара*, который в консервативных виброударных системах является интегралом движения.

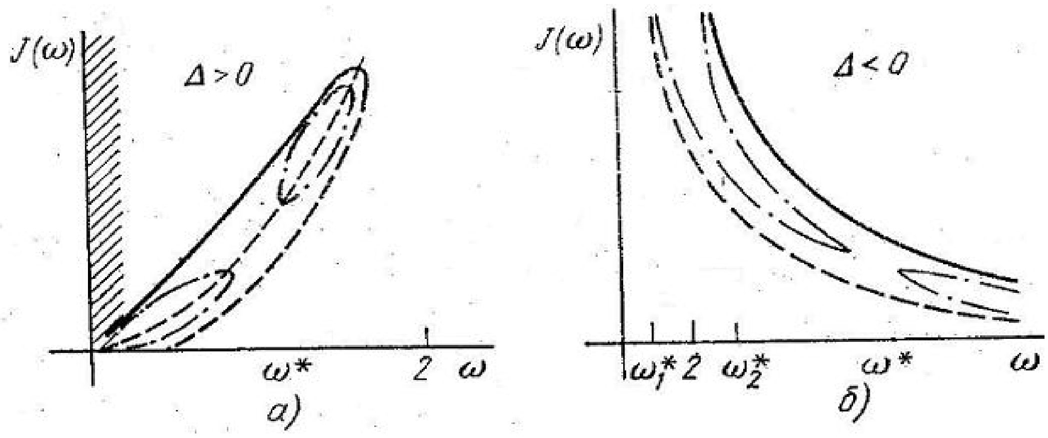

Рис. 4

На рис.4, *а, б* показаны возможные варианты зависимостей *J(ω)* при *Δ*>0 и *Δ*<0 при различных соотношениях между уровнями демпфирования и возбуждения. Анализ выполнялся при помощи энергетического условия неустойчивости [1, 2]. Заштрихованная полоса отвечает зоне первого побочного линейного параметрического резонанса. Пунктиром отмечены неустойчивые режимы, сплошными линиями – режимы, не удовлетворяющие условию неустойчивости. Штрих - пунктиром отмечены несогласованные режимы, анализ которых затруднен из-за изменения интервала принадлежности фазы. Из рисунков видно, что для несогласованных режимов возможно прекращение колебаний из-за взаимного подавления силового и параметрического источников. На рисунках частота линейных колебаний Ω=1. Характерные частоты виброударных режимов отмечены звездочками.

5. Сделаем общие замечания, касающиеся резонансных режимов в системах рассматриваемого типа.

В данной работе не ставилась цель отыскания самих решений. Задача заключалась в описании методик оценки их возможного числа, а также в иллюстрации причин появления многих пар резонансных режимов движения. Это явление оказывается, в частности связанным с появлением конкуренции между различными механизмами возбуждения. На практике подобные явления проявляются в виде нестабильности функционирования систем в некоторых частотных областях. Также, как и в случае полигармонической *T* -

периодической внешней силы [7], когда проявлялась конкуренция между различными гармоническими составляющими силового воздействия, здесь конкурируют не только составляющие источников возбуждения, но и сами источники. Поэтому задача усложняется, и конкретные описания становятся достаточно громоздкими. Как и в системах с силовым возбуждением в данной нелинейной системе могут появиться еще супергармонические и комбинационные резонансные режимы [1, 2, 7, 8]. Уравнения энергетического баланса, описывающие эти режимы, составляются так же, как и выше.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № № 13-08-01235, 13-08-90419).

Список литературы

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.
2. Babitsky V.I.,. Krupenin V.L Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
3. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний// Веприк А.М., Крупенин В.Л. и др.- Л.: Машиностроение, 1987. 76 с.
4. Крупенин В.Л. О прогнозировании структур вибрационных полей в конструкциях, содержащих ударные пары// Проблемы машиностроения и надежности машин - №3.- 2013.-С 3-11.
5. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах. // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1998, № 5, с. 13-30.
6. Вибрации в технике. Справочник. Т2 / Под ред.И.И. Блехмана – М.: Машиностроение, 1979.-352 с.
7. Крупенин В.Л.Об оценке числа периодических режимов движения нелинейных колебательных систем при периодическом полигармоническом возбуждении колебаний// Интернет-журнал «Вестник научно-технического развития», 2013, №4. С. 14-19
8. Бурд В. Ш. , Крупенин В. Л. Субгармонические резонансные колебания ударного осциллятора при полигармоническом возмущении//Интернет-журнал «Вестник научно-технического развития», 2013, №7. С. 3-14