

УДК 534.1

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, СОВЕРШАЮЩЕГО ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

© Николай Николаевич Веричев, Владимир Иванович Ерофеев

Институт проблем машиностроения Российской академии наук,

Нижний Новгород, Россия

erf04@sinn.ru

Аннотация. Рассматривается система нелинейных уравнений в частных производных, описывающая связанные изгибно-крутильные колебания упругого стержня. Для одночастотных процессов исходная система методом Бубнова-Галеркина сведена к системе двух связанных нелинейных осцилляторов, описывающих изменение во времени амплитуд изгибного и крутильного колебаний. Показано, что последняя система является гамильтоновой. Проведено качественное исследование ее регулярной и хаотической динамики.

Ключевые слова: стержень, нелинейность, изгибно-крутильные колебания, гамильтонова система, регулярная и хаотическая динамика.

DYNAMICS OF NONLINEAR-ELASTIC ROD MAKES BENDING-TORSIONAL VIBRATIONS

© Nikolai Verichev, Vladimir Erofeev

*Mechanical Engineering Research Institute of Russian Academy of Sciences, Nizhny
Novgorod, Russia*

Abstract. A system of nonlinear partial differential equations describing the associated flexural- torsional oscillations of an elastic rod . For single-frequency processes the original system by the Bubnov-Galerkin reduced to a system of two coupled nonlinear oscillators , describing the time variation of the amplitude of the bending and torsional vibrations. Shown that the latter system is Hamiltonian . A qualitative investigation of its regular and chaotic dynamics .

Keywords: core, non-linearity, flexural- torsional vibrations, the Hamiltonian system, regular and chaotic dynamics.

Связанные изгибно-крутильные колебания стержня описываются следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 2c_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\theta^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} r_y^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2c_m^2 I_y}{I_\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta}{\rho I_\rho} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 + c_m^2 \theta^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \\ - \frac{2c_m^2}{r_\rho^2} \theta^3 - \frac{2c_m^2}{r_\rho^2} \theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - c_m^2 \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $w(x,t)$ – поперечное перемещение частиц срединной линии стержня; $\theta(x,t)$ – угол поворота его поперечного сечения; $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны в материале; $c_s = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны (стержневая

скорость); $c_m = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$; E – модуль Юнга; λ, μ – константы Ламе; ρ – плотность материала; r_y и r_p – осевой и полярный радиусы инерции, соответственно, определяемые соотношениями: $r_{y,p} = \sqrt{I_{y,p}/F}$; где $I_y = \iint_F z^2 dF$ – осевой момент инерции; $I_p = \iint_F (y^2 + z^2) dF$ – полярный момент инерции; F – площадь поперечного сечения стержня; $\beta = (\frac{\lambda}{2} + \mu) \iint_F (y^2 + z^2) dF$.

Для решения уравнений (1) воспользуемся методом Бубнова-Галеркина. В качестве системы функций, удовлетворяющих граничным условиям шарнирного опирания, выберем $\sin nx$, где n – номер собственного колебания. При одночастотных процессах изменения амплитуд изгибного $a(t)$ и крутильного $b(t)$ колебаний описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{a}}{d\tau^2} + \tilde{a} + \tilde{a}^3 &= \tilde{a} \tilde{b}^2, \\ \frac{d^2 \tilde{b}}{d\tau^2} + \tilde{b} + \tilde{b}^3 &= -\tilde{a}^2 \tilde{b} \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) представляет собой систему двух связанных нелинейных осцилляторов; ее векторное поле имеет нулевую дивергенцию.

1. Покажем, что (2) является гамильтоновой системой, для чего запишем уравнения в эквивалентной нормальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{a}}{d\tau} &= u, \\ \frac{du}{d\tau} &= -\tilde{a} - \tilde{a}^3 + \tilde{a} \tilde{b}^2, \\ \frac{d\tilde{b}}{d\tau} &= -v, \\ \frac{dv}{d\tau} &= \tilde{b} + \tilde{b}^3 + \tilde{a}^2 \tilde{b} \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя двумерную систему

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{a}}{du} &= -\frac{u}{\tilde{a} + \tilde{a}^3 - \tilde{a} \tilde{b}^2}, \\ \frac{d\tilde{b}}{dv} &= -\frac{v}{\tilde{b} + \tilde{b}^3 + \tilde{a}^2 \tilde{b}}, \end{aligned}$$

получаем интегралы вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} \tilde{a}^2 + \frac{1}{4} \tilde{a}^4 &= \frac{1}{2} \int \tilde{b}^2 d\tilde{a}^2, \\ \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \tilde{b}^2 + \frac{1}{4} \tilde{b}^4 &= -\frac{1}{2} \int \tilde{a}^2 d\tilde{b}^2, \end{aligned}$$

а, в свою очередь, из этих уравнений:

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\tilde{a}^2 + \frac{1}{4}\tilde{a}^4 - \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\tilde{b}^2 + \frac{1}{4}\tilde{b}^4 \right) = \frac{1}{2} \int d(\tilde{b}^2 \tilde{a}^2).$$

Таким образом, получаем, что система (3) (соответственно, (2)), является системой гамильтоновой с гамильтонианом вида

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\tilde{a}^2 + \frac{1}{4}\tilde{a}^4 - \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\tilde{b}^2 + \frac{1}{4}\tilde{b}^4 \right) - \frac{1}{2}\tilde{b}^2 \tilde{a}^2 = H. \quad (4)$$

Общая теория гамильтоновых систем с двумя степенями свободы достаточно хорошо известна. См., например, [2-4] и др. Далее мы будем использовать общеизвестные факты их динамики, а здесь только заметим, что из существования трехмерной гиперповерхности (4) следует: все множества траекторий системы (3), в том числе и хаотические множества, если они существуют (об этом покажет исследование), имеют размерность не более трех.

Дальнейший наш интерес в отношении системы (3) будет состоять в исследовании качественно различных стационарных множеств траекторий в ее фазовом пространстве, реализующихся в зависимости от начальных условиях, и их интерпретация на динамику волн в стержне.

Заметим, что численное решение поставленной задачи «напрямую», т.е. изучение поведения траекторий при изменении начальных условий, технически весьма неудобно. По этой причине, в численном исследовании вместо системы (3) будем рассматривать систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= -x_1 - bx_1^3 + \mu bx_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -x_2 - bx_2^3 - \mu bx_2 x_1^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Системы (3) и (5) взаимосвязаны. А именно, (5) получается из (3) в результате замены вида $\tilde{a} = \sqrt{b}x_1, u = \sqrt{b}y_1, \tilde{b} = \sqrt{b}x_2, v = -\sqrt{b}y_2$. Кроме того, дополнительно в (5) введен коэффициент осцилляторов связи ε . Как видно, системы (3) и (5) совпадают при $\mu = 1, b = 1$ (точнее, они совпадают после замены $y_2 \rightarrow -y_2$).

Поясним смысл рассмотрения системы (5) вместо системы (3). Как видно, b является масштабным параметром. Это значит, что если при некотором $b = b_0$ и начальных условиях $x_{1,2}(t_0) = x_{1,2}^0, y_{1,2}(t_0) = y_{1,2}^0$ в системе (5) реализуется некоторая фазовая траектория, то такая же траектория (только растянутая в $\sqrt{b_0}$ раз по всем направлениям) реализуется и в системе (3). Соответственно, это происходит при начальных условиях: $\tilde{a}(t_0) = \sqrt{b_0}x_1^0, u(t_0) = \sqrt{b_0}y_1^0, \tilde{b}(t_0) = \sqrt{b_0}x_2^0, v(t_0) = -\sqrt{b_0}y_2^0$. То есть, исследуя структуры и бифуркации фазовых траекторий в системе (5) при изменении параметра b , мы опосредованно получаем информацию о характере пространственных бифуркаций траекторий в системе (3), происходящих при движении от точки к точке в ее фазовом пространстве. Тем самым поставленная задача относительно системы (3) обращается в классическую задачу исследования динамических свойств системы (5) (структур траекторий в ее фазовом пространстве) в зависимости от ее параметра.

Смысл введения параметра связи осцилляторов ε состоит в следующем.

Структура траекторий в фазовом пространстве системы (3) и структура траекторий системы (5) при $b=1$ и $\mu=1$ совпадают. Это позволяет любое, интересующее нас множество траекторий системы (3) интерпретировать как результат эволюции соответствующего множества траекторий системы (5), происходящей при изменении параметра связи до значения $\mu=1$. То есть, введение параметра ε позволит нам определять бифуркационные сценарии рождения интересующих нас множеств траекторий. Кроме того, эти результаты могут быть сверены с другими известными результатами динамики консервативных осцилляторов в зависимости от их параметра связи, а также с положениями теории КАМ.

Обратимся к другим свойствам систем (3) и (5).

2. Система (3) имеет единственное состояние равновесия $O(\tilde{a}, \tilde{b}, u, v) = O(0, 0, 0, 0)$.

В малой окрестности состояния равновесия все нелинейности могут рассматриваться в качестве малых возмущений, а вся система может интерпретироваться системой двух связанных квазилинейных осцилляторов. То есть, можно утверждать, что малая окрестность начала координат в фазовом пространстве системы заполнена гладкими двумерными резонансными и нерезонансными двумерными торами.

Интерпретируя сказанное на динамику стержня, получаем вполне естественный результат: при малых возмущениях стержня на изгиб и кручение (квазилинейный случай), все его волновые движения являются или периодическими с периодом осцилляторов или квазипериодическими. В последнем случае один из периодов является собственным периодом колебаний осцилляторов, а второй - периодом модуляции, который существенно больше основного периода. Отношение периодов имеет порядок малости нелинейных возмущений.

На рис.1,а изображены фазовые портреты осцилляторов в системе (5), иллюстрирующие квазипериодическое движение, а на рис.1,б изображены портреты точечного отображения плоскости $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0$ по фазовым траекториям системы, в проекциях на координатные плоскости осцилляторов.

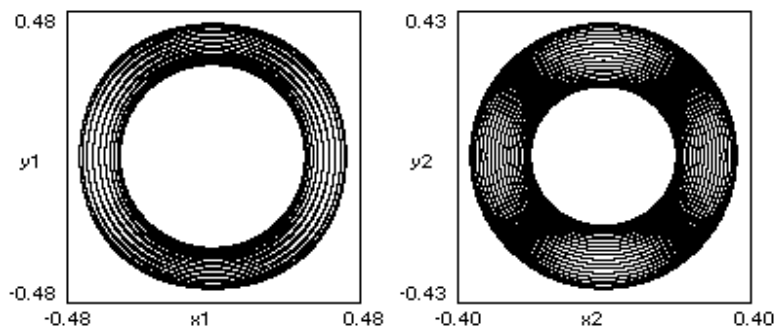


Рис.1а.

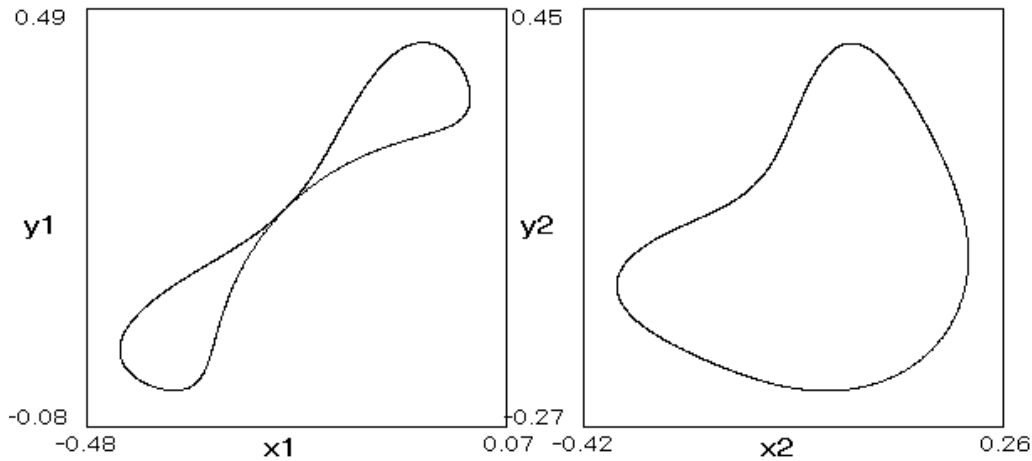


Рис.16.

Период движения изображающей точки по инвариантной кривой является периодом модуляции.

Таким образом, при малых возмущениях стержня на изгиб и кручение мы имеем квазипериодическую волну с двухчастотным временным спектром.

3. Система (3) имеет два многообразия:

$M_1 = \{\tilde{a} = 0, u = 0\}$ и $M_2 = \{\tilde{b} = 0, v = 0\}$ (координатные плоскости (\tilde{b}, v) и (\tilde{a}, u) , соответственно). Фазовые траектории на этих плоскостях определяются уравнениями одинаковых осцилляторов:

$$\frac{d^2 \tilde{b}}{d\tau^2} + \tilde{b} + \tilde{b}^3 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 \tilde{a}}{d\tau^2} + \tilde{a} + \tilde{a}^3 = 0, \text{ соответственно.}$$

Приведем определение устойчивости интегрального многообразия [5].

Определение. Интегральное многообразие $M(x)$ динамической системы $\dot{x} = X(x)$ называется устойчивым, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\rho(x_0, M) < \delta$ вытекает неравенство $\rho(x(t), M) < \varepsilon, t > t_0$, где $\rho(x_0, M)$ обозначает расстояние от точки x_0 до множества M .

По определению, если все фазовые траектории динамической системы, стартующие из малой окрестности ее многообразия далее остаются вблизи его, то такое многообразие устойчиво. Заметим, что многообразие может делиться на устойчивые и неустойчивые «куски».

Рассмотрим динамику системы (2) в окрестности $M_1 = \{\tilde{a} = 0, u = 0\}$.

При условии $|\tilde{a}| \ll 1, |u| \ll 1$ система (2), линеаризованная в окрестности этого множества имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{a}}{d\tau^2} + (1 - \tilde{b}^2) \tilde{a} &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{b}}{d\tau^2} + \tilde{b} + \tilde{b}^3 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Как видим, в системе (6) второй нелинейный осциллятор является независимым и он параметрически возбуждает первый, линейный осциллятор. Теория линейного параметрического резонанса хорошо известна (см., например, [6-8]).

Каждое решение второго уравнения является 2π - периодическим по времени и может быть представлено рядом Фурье. Для получения оценки устойчивости линейного уравнения ограничимся первой гармоникой решения и будем считать, что оно (решение) имеет вид $\tilde{b}(\tau) = b_0 \cos \tau$. В таком случае, первое уравнение (6) после преобразования времени $2\tau = \tau_n + \pi$ приобретает вид уравнения Матье, которое запишем в обозначениях параметров принятых в [6]:

$$\frac{d^2 \tilde{a}}{d\tau_n^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau_n) \tilde{a} = 0 \tag{7}$$

где: $\delta = \frac{1}{4} - \frac{b_0^2}{8}, \varepsilon = \frac{b_0^2}{8}$.

В [6] на плоскости параметров (δ, ε) дана подробная картина областей устойчивости (неустойчивости) уравнения Матье. Заимствуя эти результаты, добавочно учтем, что в нашем случае параметры на плоскости (δ, ε) изменяются по прямой $\varepsilon = 1/4 - \delta$, при значениях $\delta \leq 1/4$, см., формулы (7). Картина областей устойчивости (заштрихованы) и неустойчивости изображена на рис.2.

Из приведенной диаграммы получаем, что тривиальное решение первого уравнения (6) устойчиво в интервале $-\mu < \delta < 1/4$, где μ - некоторое достаточно малое положительное число. Соответствующий интервал на рисунке изображен жирной линией. В пересчете на параметр b_0 получаем, что для всех начальных условий из интервала $|b_0| < \sqrt{2 + 8\mu}$ множество M_1 устойчиво, а вне этого интервала оно неустойчиво.

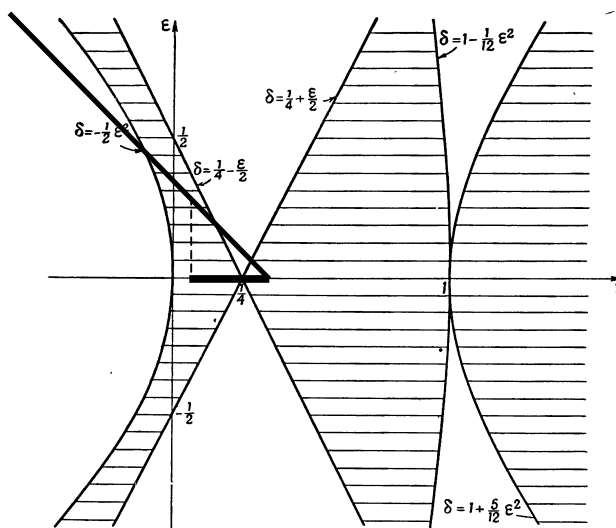


Рис.2. К устойчивости многообразия M_1 .

Численное исследование системы (2) показывает, что многообразие $M_1 = \{\tilde{a} = 0, u = 0\}$ неустойчиво, по крайней мере, при всех $|b_0| > 1.7$ и оно является устойчивым, по крайней мере, при $|b_0| < 1.2$. То есть, аналитический и численный результаты достаточно близки.

Для примера, на рис.3, 4, 6 показана характерная динамика осцилляторов с начальными условиями в малой окрестности многообразия M_1 .

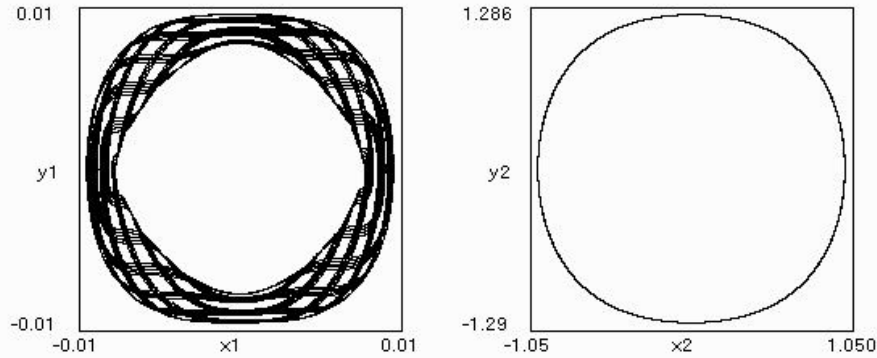
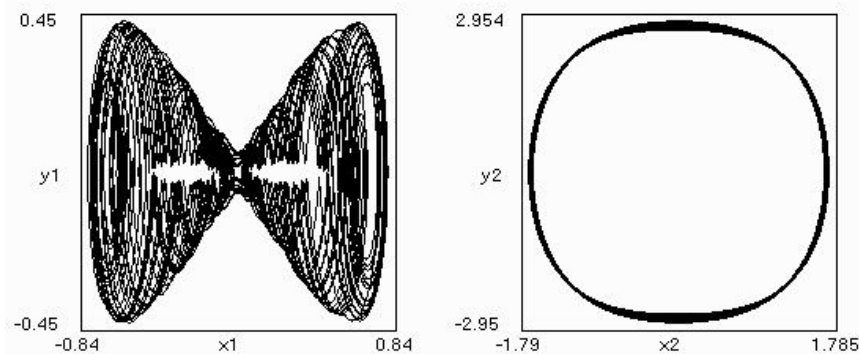


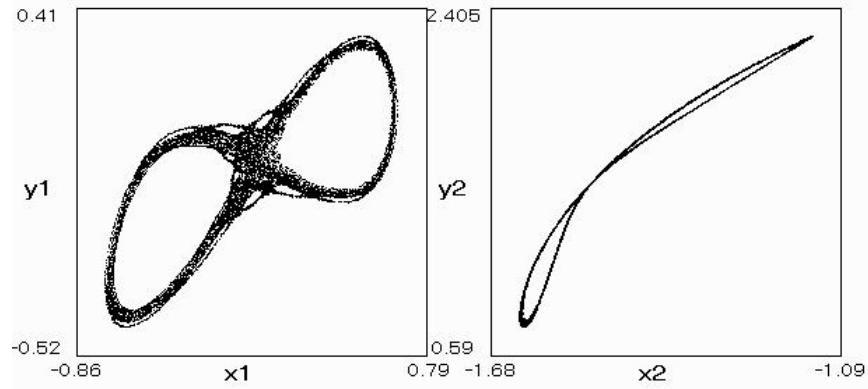
Рис.3

На рис.3 изображены фазовые портреты осцилляторов, полученные при интегрировании уравнений (5) с параметрами $b=1$, $\mu=1$ и начальными условиями $x_1(0)=0.01$, $y_1(0)=0$, $x_2(0)=1.0$, $y_2(0)=0$. Как видим по рисунку, фазовая траектория остается в малой окрестности M_1 , причем движения второго осциллятора являются практически периодическими.

Совсем другую картину наблюдаем на рис.4. Здесь фазовая траектория, стартуя из точки $x_1(0)=0.01$, $y_1(0)=0$, $x_2(0)=1.7$, $y_2(0)=0$, удаляется от многообразия и блуждает по некоторому хаотическому множеству. На рис.4а изображены фазовые портреты, а на рис.4б – портреты точечного отображения по этой траектории.



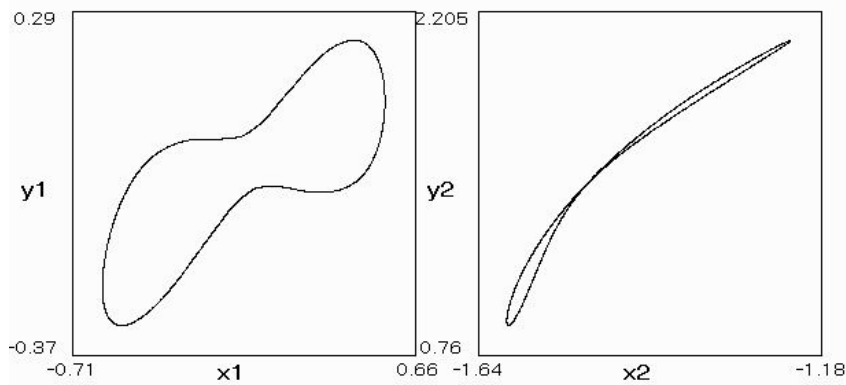
а)



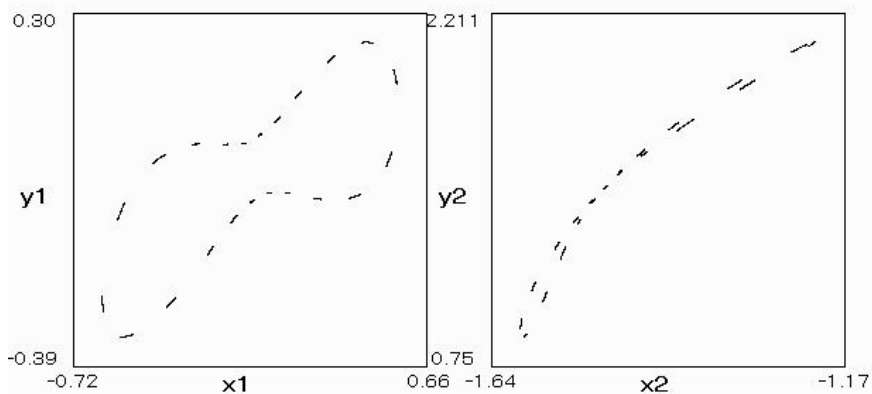
б)

Рис.4. а) проекции траектории хаотического движения осцилляторов на фазовые плоскости, б) проекции точечного отображения плоскости $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0$ в себя по этой траектории.

Для выяснения природы этого хаотического движения изменяется параметр связи осцилляторов. Выясняем, что при $\mu = 0.95$ в фазовом пространстве имеется гладкий тор, рис.5а, далее, при $\mu = 0.96$, на торе рождается резонанс – периодическое движение, рис.5б, а еще далее, при $\mu = 0.97$, тор разрушается [9] с возникновением на его месте гомоклинической структуры и что влечет за собой хаотическое поведение траекторий. С приближением параметра связи μ к единице это хаотическое множество «развивается» до состояния, зафиксированного на рис.4б



а, $\mu = 0.95$



б, $\mu = 0.96$

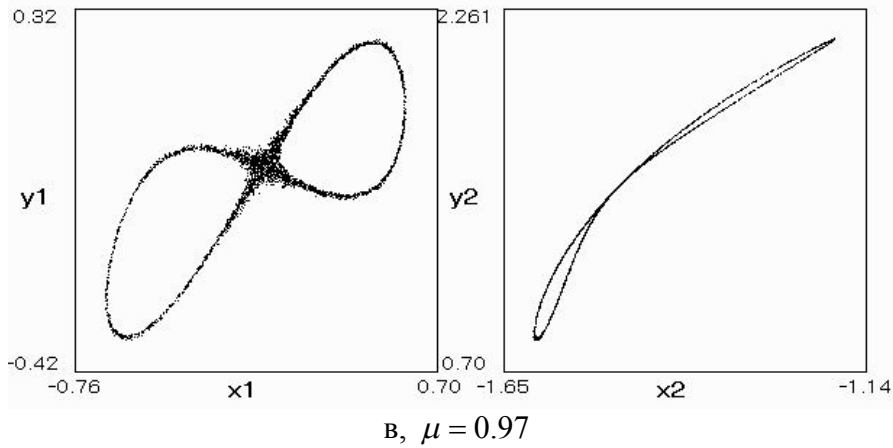


Рис.5. Бифуркации, ведущие к хаосу при изменении параметра связи: $\mu = 0.95, 0.96, 0.97$.

С увеличением начального отклонения $x_2(0)=b_0$ (начального угла закрутки стержня), неустойчивость многообразия M_1 усиливается, как усиливается и хаотичность финального поведения траекторий стартующих из малой окрестности M_1 , рис.6.

Подробности рождения и эволюции хаотических множеств будут рассматриваться ниже.

В отношении динамики волн в данном случае главным является существование порогового значения начального угла закрутки стержня, начиная с которого происходит самовозбуждение изгибных колебаний. Причем, изгибно-крутильные волновые движения стержня в этом случае, как правило, имеют хаотический характер и сплошной временной спектр.

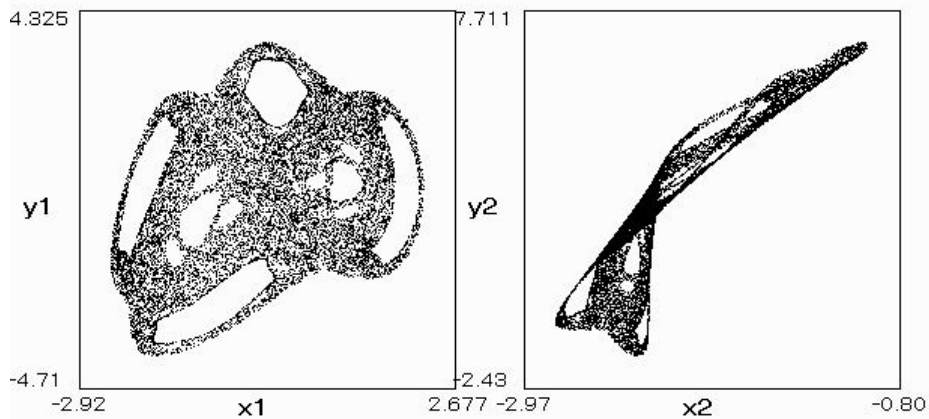


Рис.6. Развитая хаотическая динамика осцилляторов, реализованная при начальных условиях: $x_1(0)=0.01, y_1(0)=0.00, x_2(0)=3.0, y_2(0)=0.00$.

Исследуем устойчивость многообразия $M_2 = \{\tilde{b} = 0, v = 0\}$.

Система (2), линеаризованная в малой окрестности M_2 , имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{a}}{d\tau^2} + \tilde{a} + \tilde{a}^3 &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{b}}{d\tau^2} + (1 + \tilde{a}^2) \tilde{b} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

В данном случае роли осцилляторов меняются: в (8) первый осциллятор является ведущим, а второй является ведомым, параметрически возбуждаемым осциллятором. Рассматриваем свойства системы (8) при тех же условиях, что и (6).

Будем считать, что $\tilde{a}(\tau) = a_0 \cos \tau$. Подставляя это усеченное решение во второе уравнение (8) и проводя преобразования, получаем тоже самое уравнение Матье (7) с параметрами $\delta = \frac{1}{4} + \frac{a_0^2}{8}, \varepsilon = \frac{a_0^2}{8}$. В отличие от прошлого случая, здесь на бифуркационной диаграмме параметры δ и ε изменяются по прямой $\varepsilon = \delta - 1/4$, на интервале $\delta \geq 1/4$. Интервалы устойчивости на рис.7 изображены отрезками жирных линий.

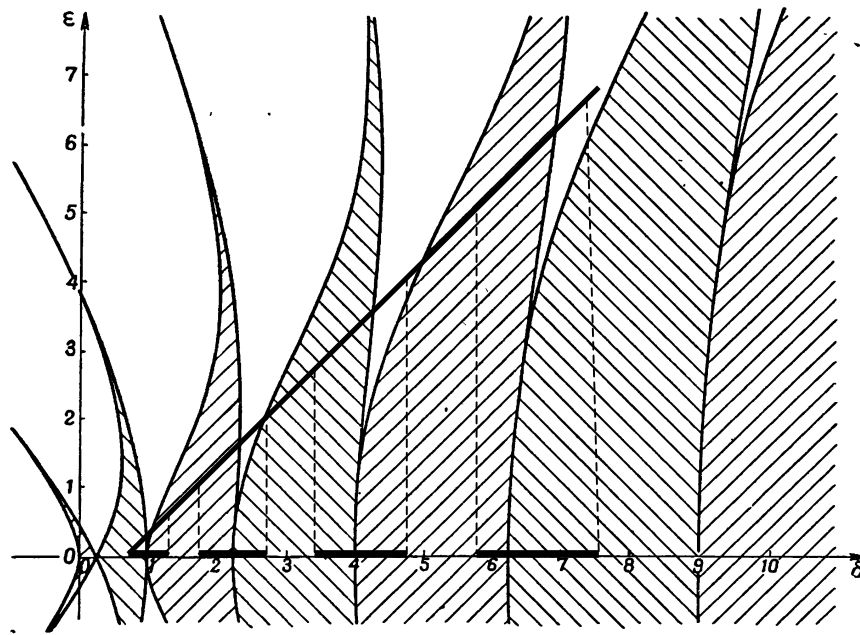


Рис.7. К устойчивости многообразия M_2 .

Как видим, область устойчивости множества M_2 представляет собой бесконечную совокупность интервалов, разделенных между собой интервалами неустойчивости.

Как показывает численное исследование, область устойчивости множества M_2 в фазовом пространстве (множество точек (x_1, y_1, x_2, y_2) примыкающее к M_2) представляет собой крайне тонкий слой. По крайней мере, фазовые траектории с начальными условиями, такими как: $\|x_2(0)\|, \|y_2(0)\| = 10^{-2}, |x_1(0)| > 0.8$ покидают малую окрестность M_2 и при этом финальные колебания осцилляторов имеют амплитуды одинакового порядка.

Характерной особенностью поведения траекторий, стартующих от многообразия, является их возвращаемость к нему (периодически или хаотически). При этом имеет место «пиковый» динамический режим, характеризующийся короткими выбросами (пиками) амплитуды колебаний осцилляторов на их осциллограммах. Пример такого режима дан на рис.8а. В данном случае колебания осцилляторов является квазипериодическими, о чем свидетельствует гладкая инвариантная кривая на рис.8б, полученная в отображении Пуанкаре плоскости $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0$.

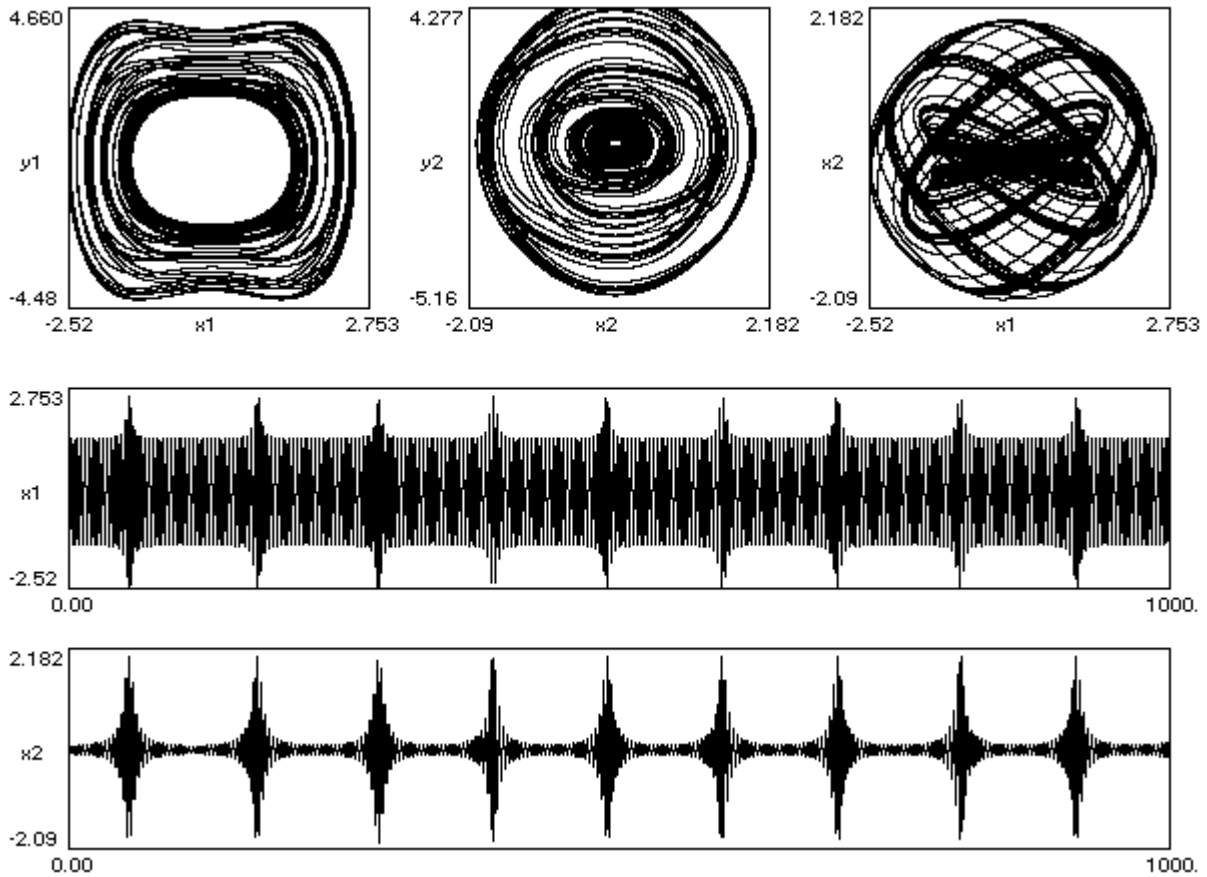


Рис.8, а. $x_1(0)=2.5, y_1(0)=0.00, x_2(0)=0.01, y_2(0)=0.00$.

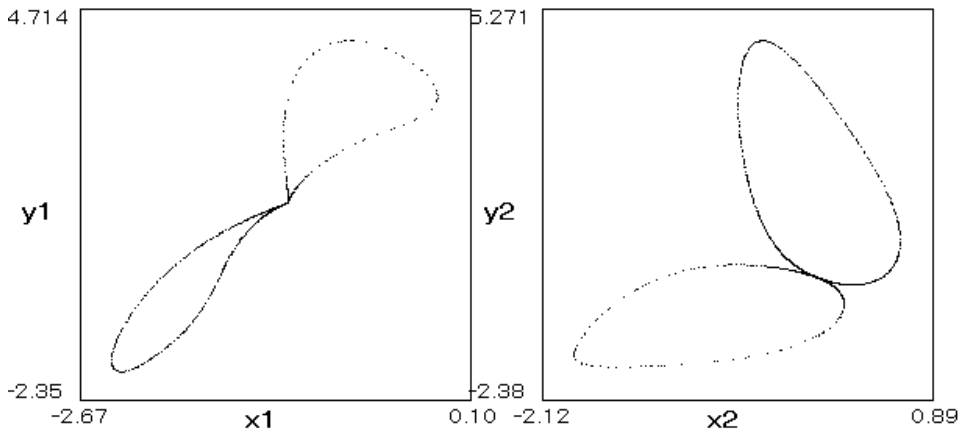


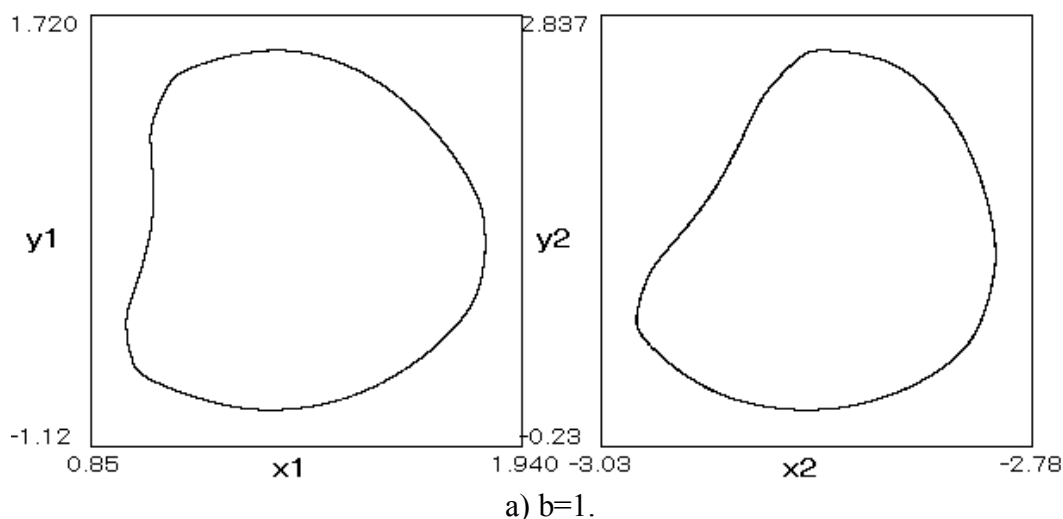
Рис.8,б. Проекция отображения Пуанкаре плоскости $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0$ в пичковом режиме.

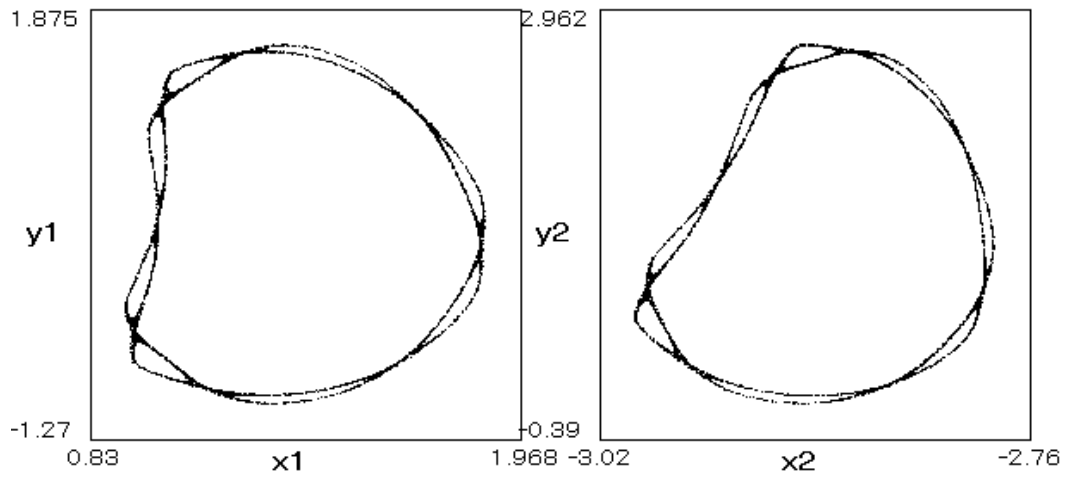
Динамика осцилляторов с начальными условиями вдали от интегральных многообразий.

Некоторую общую (без конкретных деталей) априорную картину фазового пространства исследуемой системы можно представить исходя из главных положений теории КАМ, рассматривая (2) частным случаем системы (5). То расхождение, что теория КАМ формулируется для малых возмущений гамильтониана, (для малых значений параметра ε), а для системы (2) $\varepsilon = 1$, можно преодолеть, рассматривая последовательность гамильтоновых систем с малыми возмущениями.

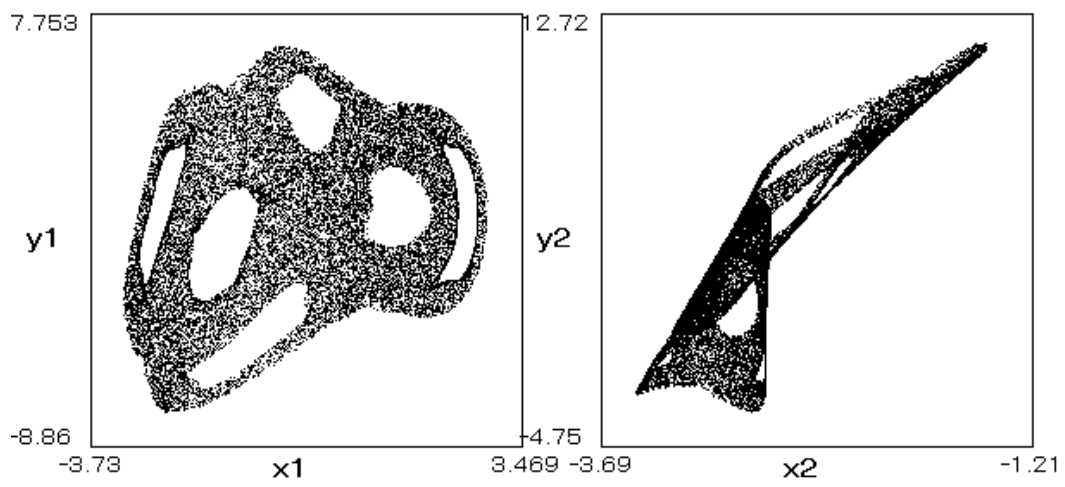
А именно, рассматриваем сначала систему с гамильтонианом $H = H_0 + \varepsilon H_1$, где $H_0 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\tilde{a}^2 + \frac{1}{4}\tilde{a}^4 - \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\tilde{b}^2 + \frac{1}{4}\tilde{b}^4\right)$ - невозмущенная его часть, а $\varepsilon H_1 = -\varepsilon \frac{1}{2}\tilde{b}^2 \tilde{a}^2$ - возмущение. Если $\varepsilon = 0$, то в фазовом пространстве (5) имеется континуум двумерных торов, являющихся декартовым произведением периодических траекторий осцилляторов. При возрастании коэффициента связи до значения $\varepsilon = \varepsilon_1$ часть торов разрушается, а другая часть остается (теория это гарантирует при малом ε_1). Далее рассматриваем систему с гамильтонианом $H = H_{01} + \varepsilon H_1$, где $H_{01} = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\tilde{a}^2 + \frac{1}{4}\tilde{a}^4 - \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\tilde{b}^2 + \frac{1}{4}\tilde{b}^4\right) - \varepsilon_1 \frac{1}{2}\tilde{b}^2 \tilde{a}^2$, а возмущение имеет первоначальный вид. Если в этой системе параметр ε увеличивать от нуля до значения $\varepsilon = \varepsilon_2$, то разрушение оставшихся торов продолжится. Далее рассуждения можно повторять вплоть до того, пока величина $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots$ не станет равной единице. Таким образом, фазовое пространство системы (2) заполнено инвариантными торами, разделенными стохастическими слоями, возникшими на месте разрушенных торов. Это значит, что при изменении начальных условий в системе (2) следует ожидать реализацию периодических, квазипериодических или хаотических колебаний осцилляторов.

На рис.9 а)-з) показана типичная эволюция структур фазовых траекторий в системе (5) при изменении параметра b . Здесь везде изображены проекции пространства точечного отображения Пуанкаре плоскости $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 0$ на координатные плоскости осцилляторов. Начало счета производится из точки $x_1(0) = 1.0, y_1(0) = 0.0, x_2(0) = 3.0, y_2(0) = 0$, а параметр b изменяется при реализации в системе установившегося движения.

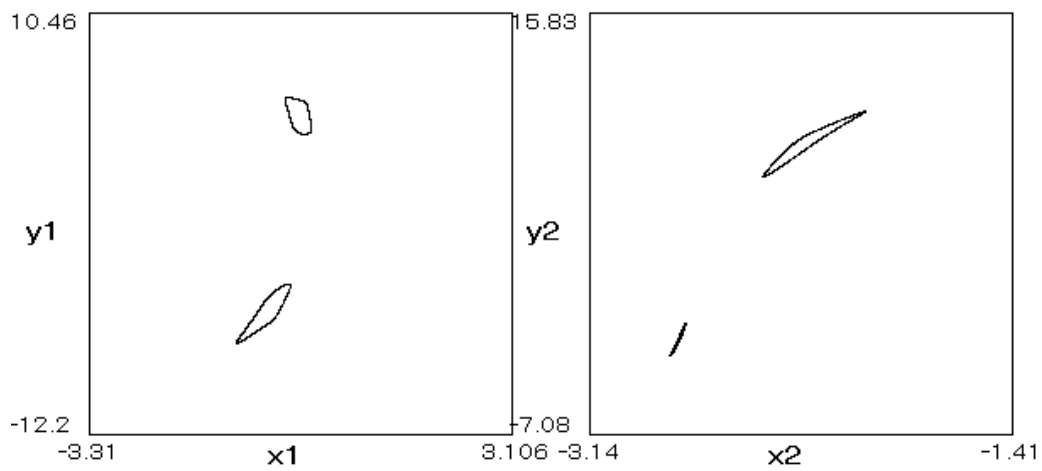




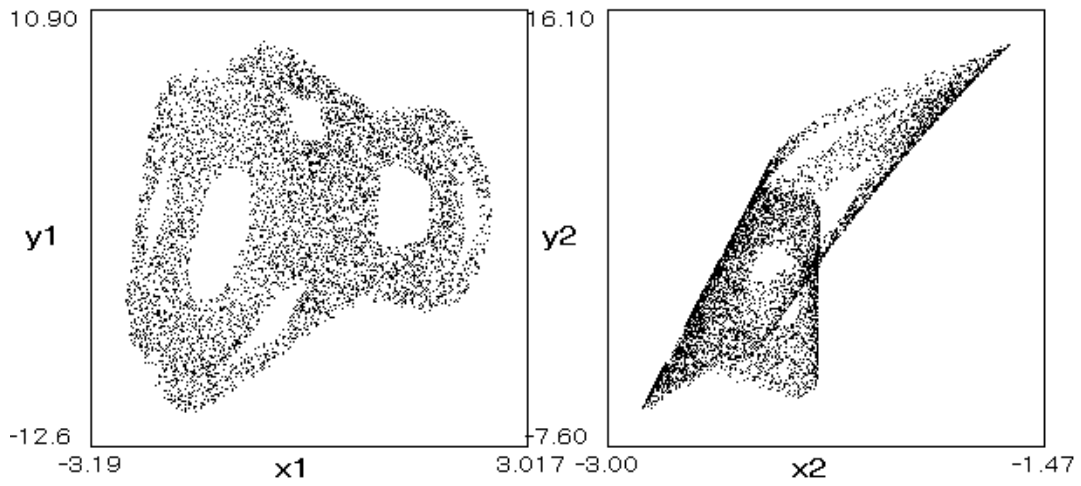
б) $b=1.1$.



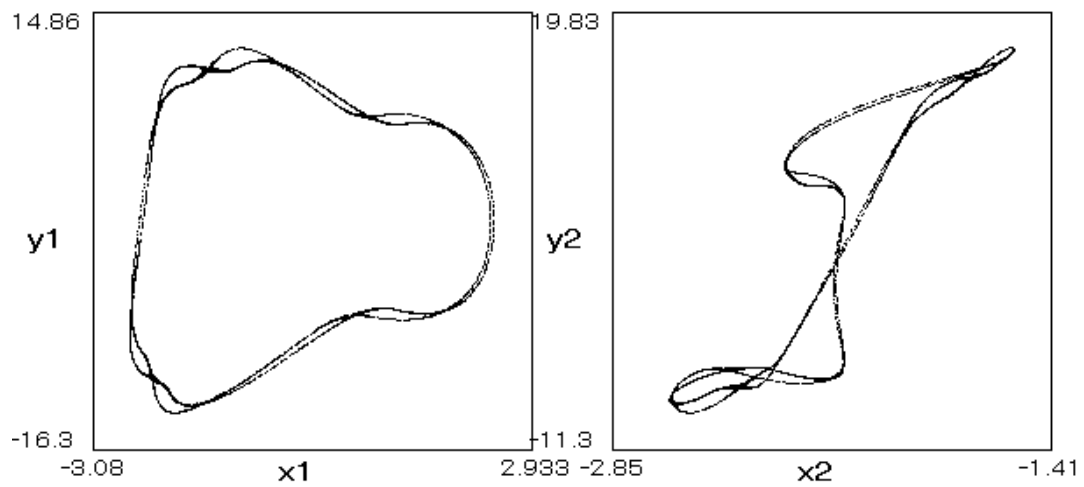
в) $b=1.2$.



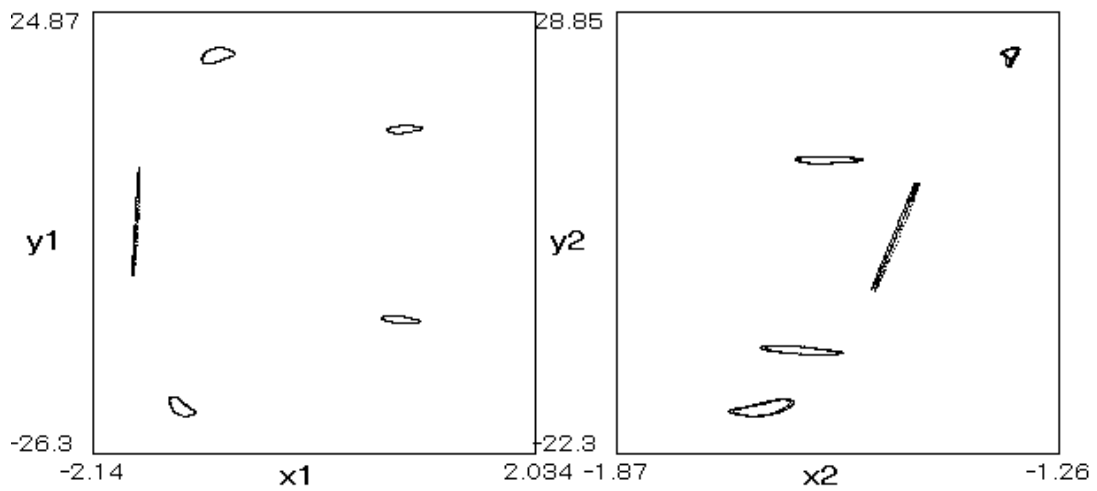
г) $b=3.9$.



д) $b=4.2$.



е) $b=7.3$.



ж) $b=73$.

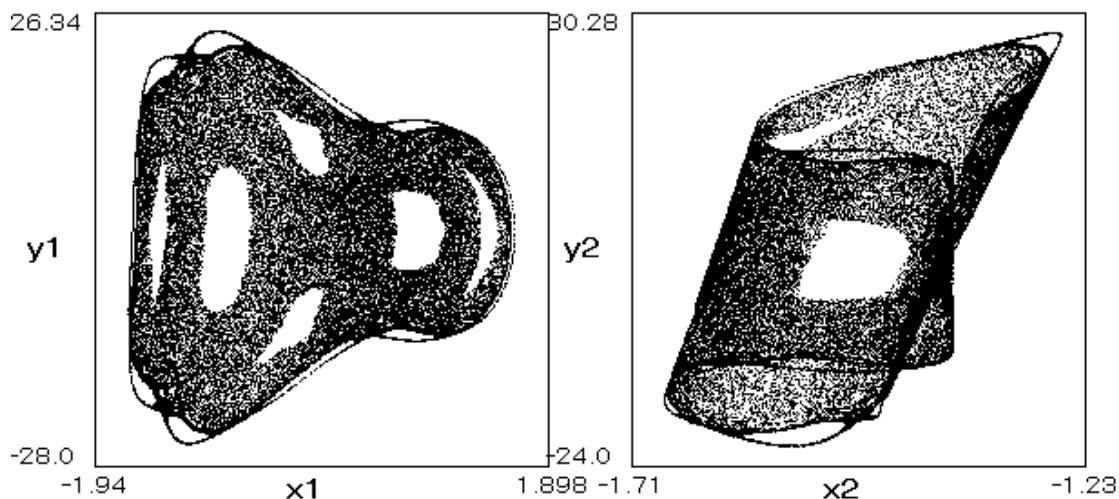
з) $b=125$.

Рис.9

Как видим, вначале реализуется квазипериодическое движение, соответствующее гладкой инвариантной кривой на рис.а). С увеличением параметра b на торе возникает резонанс. На рис.б) тор находится вблизи этого резонанса, когда наблюдается цепочка практически сливающихся инвариантных кривых (ожерелье), узлы которых соответствуют седловой неподвижной точке (седловому периодическому движению в фазовом пространстве системы). Затем этот тор разрушается, и система скачком переходит в режим хаотических колебаний, рис.в). Соответствующее хаотическое множество в фазовом пространстве к этому моменту уже сформировалось на месте других разрушенных торов. Движения осцилляторов являются хаотическими вплоть до $b=3.9$, при котором движения вновь становятся квазипериодическими, рис.г) и остаются таковыми до $b=4.2$. При этом значении данный тор разрушается, и система вновь возвращается в хаотический режим, изображенный на рис.д. Последний существует до $b=7.3$, после чего система вновь возвращается на уже другой квазипериодический режим, рис.е). Далее последовательность переключений динамики осцилляторов с регулярной на хаотическую продолжается. Последним в данной экспериментальной серии является переход от тора, рис.ж), через его разрушение к хаотическому множеству, изображенному на рис.з.

Список литературы

1. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Орехова О.И. Интенсивные изгибные и крутильные волны в упругом стержне // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 1. С.11-15.
2. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М. «Наука», 1984, 271с.
3. Мозер Ю. Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория. Москва – Ижевск: РХД, 1999, 296с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М. «Наука», 1989, 472с.
5. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М. «Наука», 1977, 304с.
6. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952.
7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. «Наука», 1967, 472 с.
8. Арнольд В.И Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. «Наука», 1971, 239 с.
9. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во ГГУ. 1983. С.3-26.