

УДК 534.1

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ РЕЗЦА ПРИ ПРЯМОУГОЛЬНОМ СВОБОДНОМ РУЗАНИИ

© Георгий Константинович Корендяев

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

korenduba@gmail.com

Аннотация. Разработана и исследована численная термомеханическая модель автоколебаний при резании. Моделированием обнаружены эффекты самовозбуждения и установления автоколебаний, выявлены условия склонности к возникновению автоколебаний для различных материалов. Производится анализ влияния свойств технологической системы, параметров режима резания, а также свойств обрабатываемого материала на характер автоколебательного процесса.

Ключевые слова. автоколебания, термомеханическая модель, падающая характеристика силы резания, конечноэлементная модель, компьютерное моделирование.

Abstract. A numerical model of the tool auto-oscillations at the processing of metal was developed. This model is based on temperature dependence of ultimate strength dropping characteristic. In this paper we analyzed the influence of various factors on system stability.

Keywords: computer simulation, thermomechanical chatter, metal cutting.

1. Качество и производительность обработки деталей на металлорежущих станках в первую очередь определяется характером динамических процессов, протекающих при резании.

Автоколебания являются наиболее сложным и малоизученным явлением, сопутствующим процессу резания. Они могут возникать при любом способе механической обработки в широком диапазоне режимов резания. Несмотря на то, что автоколебательная природа вибраций при резании является общепризнанной, различные исследователи толкуют причину возникновения автоколебаний по-разному.

Существующие модели автоколебаний при резании могут быть условно разделены на 2 группы. Первая группа – это теории, основанные на выявлении причин двузначного характера силы резания в системах с одной степенью свободы. К ней относятся следующие модели: модель, основанная на падающей по скорости зависимости силы резания [1], модель, основанная на неоднозначности силы резания при врезании и отталкивании инструмента [2], модель, основанная на отставании изменения силы резания от изменения толщины среза [3]. Все теории, принадлежащие к этой группе, основаны на явлениях, наблюдаемых экспериментально, однако они не раскрывают истинных физических причин этих явлений. Ко второй группе относятся теории, основанные на принципе координатной связи [4,5]. Данные теории основаны на представлении системы «резец-заготовка» в качестве системы с несколькими степенями свободы.

В работе [6] была представлена термомеханическая модель автоколебаний при резании, с помощью которой возможно дать объяснение явлений, лежащих в основе теорий первой группы.

В данной работе было показано, что температурное разупрочнение материала заготовки может стать причиной возбуждения автоколебаний при обработке металлов резанием. Была сформирована идеализированная математическая модель автоколебаний:

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + cu = F(\Theta) \quad (1)$$

$$CM\dot{\Theta} + H(\Theta - \Theta_0) = F(\Theta)(v - \dot{u}) \quad (2)$$

Выражение (1) является уравнением колебаний резца (рис.1), где m – масса резца, b – коэффициент демпфирования, c – приведенная жесткость, $F(\theta)$ – сила резания, зависящая от температуры; выражение (2) – уравнением теплового баланса, где Θ_0 – температура окружающей среды; M – нагреваемая масса; C – удельная теплоемкость; N – коэффициент теплоотдачи.

Были найдены границы устойчивости данной системы и выявлены заведомо неустойчивые режимы.

Разработанная модель на качественном уровне объясняет физические причины возбуждения автоколебаний. Однако при ее формировании был принят ряд предположений. В частности предполагается, что нагрев при резании происходит равномерно в объеме, обладающем массой M , а передача тепла в среду происходит через границу резкого перепада температур. Аналитическое решение уточненной модели этого процесса весьма затруднительно. Поэтому для описания этого процесса и уточнения условий возникновения термомеханических колебаний в реальной системе необходимо формирование численной модели, учитывающей реальные условия контакта режущего инструмента и заготовки, характер теплоотвода в заготовку, резец и стружку и т.д.

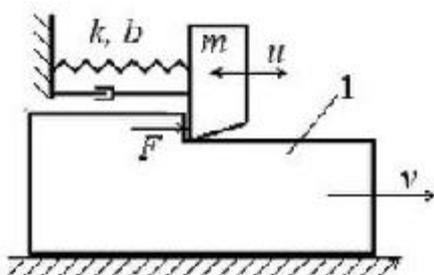


Рис.1. Расчетная схема.

Физические процессы, происходящие при обработке металлов резанием весьма сложны. Доминирующее влияние на автоколебательные явления оказывают следующие процессы: упругая и пластическая деформация материала заготовки, разрушение материала заготовки, внешнее трение между поверхностями инструмента, заготовки и стружки, внутреннее трение в материале инструмента и заготовки, упругая деформация элементов системы СПИД, а также целый комплекс термодинамических явлений и сопутствующих им структурных превращений в материале заготовки и инструмента. Очевидно, что формирование численной модели в полной мере отражающей данные процессы является достаточно непростой задачей, как с точки зрения количественного описания этих процессов, так и с точки зрения потребных вычислительных ресурсов. С другой стороны, переход от аналитической модели, построенной на значительном количестве предположений и допущений к численной модели, отражающей весь спектр физических процессов, перечисленных выше, едва ли внесет ясность в понимание природы автоколебаний. По этой причине на первом этапе имитационного моделирования необходимо формирование и исследование идеализированной численной модели, максимально приближенной к математической, для того, чтобы выделить из всего комплекса возмущений, влияющих на закон движения колебательной системы, термомеханические автоколебания.

2. Для изучения физики процесса термомеханических автоколебаний была сформирована упрощенная численная модель. Модель позволяет исследовать условия возбуждения и поддержания термомеханических автоколебаний, а также оценить влияние параметров процесса на амплитуду и частоту этих колебаний, не погружаясь в изучение пластического деформирования и разрушения материала заготовки. В данной модели, сила резания заменяется эквивалентной силой сцепления.

$$F = \mu N, \quad (3)$$

где μ - коэффициент пропорциональности, а N - сила, прижимающая инструмент к заготовке. Если положить $\mu = \mu(\Theta)$, где Θ - средняя температура контактирующих поверхностей, получаем полную математическую аналогию между силой сцепления $F = F(\Theta)$ и силой резания $F_{рез} = F_{рез}(\Theta)$ в системе уравнений (1, 2). Как известно, сила резания в первом приближении прямо пропорциональна пределу прочности обрабатываемого материала [7]. Поэтому зная зависимость $\sigma_b = \sigma_b(\Theta)$ обрабатываемого материала возможно построить зависимость $F_{рез} = F_{рез}(\Theta)$, а следовательно определить характер зависимостей $F = F(\Theta)$ и $\mu = \mu(\Theta)$. В таблице 1 приведены значения предела прочности стали AISI 1045, измеренные при различных температурах [8].

Таблица 1. Зависимость $\sigma_b = \sigma_b(\Theta)$ для стали AISI 1045.

$\Theta, \square C$	20	200	400	600
$\sigma_b, \text{МПа}$	650	670	560	255

Значения предела прочности при более высокой температуре определялись интерполяцией.

Задача решалась в двумерной постановке с использованием программы abaqus explicit (student edition).

Колебательная система представлена абсолютно жестким кубиком (инструментом), соединенным с неподвижной стойкой невесомой упруго-диссипативной связью, направленной вдоль оси X. Кубик помещен на абсолютно жесткую пластину (заготовку), движущуюся с постоянной скоростью вдоль этой же оси. Кубик имеет поступательные степени свободы вдоль осей X и Y. Необходимый вес кубика, обуславливающий значение силы, прижимающей инструмент к заготовке, а следовательно и значение силы сцепления обеспечивался за счет выбора соответствующего значения ускорения свободного падения. Длина пластины выбиралась таким образом, чтобы свести к минимуму влияние краевых эффектов и исследовать процесс установившихся термомеханических автоколебаний. Толщина пластины выбиралась таким образом, чтобы захватить область наибольшего градиента температур. Термодинамические свойства системы представлены теплоемкостью, теплопроводностью, а также коэффициентом конвективной теплоотдачи кубика и пластины. Между телами действует сила сцепления, зависящая от температуры на контактной площадке. Работа силы сцепления полностью переходит в тепло, которое распределяется между контактирующими телами пропорционально термодинамическим свойствам их материалов. Граничные условия модели представлены на рис.2.

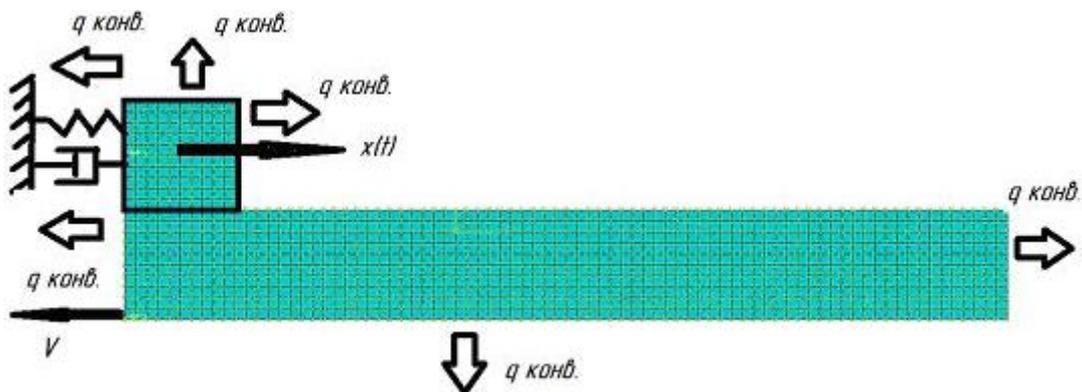


Рис.2 Граничные условия КЭ-модели.

Начальные условия: начальная температура системы, начальная скорость заготовки. Поскольку данная система состоит из абсолютно жестких тел, в модель обрабатываемого и

инструментального материала входят лишь термодинамические и массовые свойства (таблица 2).

Таблица 2. Свойства инструментального и обрабатываемого материалов.

Плотность	7800 кг/м ³
Теплопроводность	45 Вт/(м · °С)
Теплоемкость	461 Дж/(кг·К)

Коэффициент теплоотдачи α , характеризующий интенсивность процесса теплоотдачи зависит от большого числа факторов, связанных с условиями воздействия окружающей среды, геометрическими параметрами системы и режимами резания и является, вообще говоря, переменной величиной. Его определение - предмет отдельной научной работы [9]. В данном исследовании коэффициенты теплоотдачи выбирались таким образом, чтобы обеспечить сокращение времени переходного процесса и иметь возможность наблюдения установившихся термомеханических автоколебаний. Значение коэффициента теплоотдачи составляет 0.35 для наружных поверхностей кубика и 0.3 мВт/(мм²·К) для наружных поверхностей пластины.

В модели использованы 4-х узловые элементы CPE4RT с тремя степенями свободы (два перемещения и температура).

Основным отличием сформированной КЭ-модели от аналитической модели [6] является учет распределенности температурного поля заготовки и инструмента, т.е. замена уравнения теплового баланса (2) уравнениями теплопроводности и теплоотдачи.

3. Изучение механизма термомеханических автоколебаний. Анализ энергетики процесса.

В ходе моделирования были получены кривые, отражающие закон изменения основных параметров автоколебательного процесса от времени: смещение инструмента (поз.1), относительная скорость кубика и пластины (поз.2), сила сцепления (поз.3), средняя температура в контакте кубика и пластины (поз.4).

На графике (рис.3) данные кривые для наглядности показаны в нормированном виде.

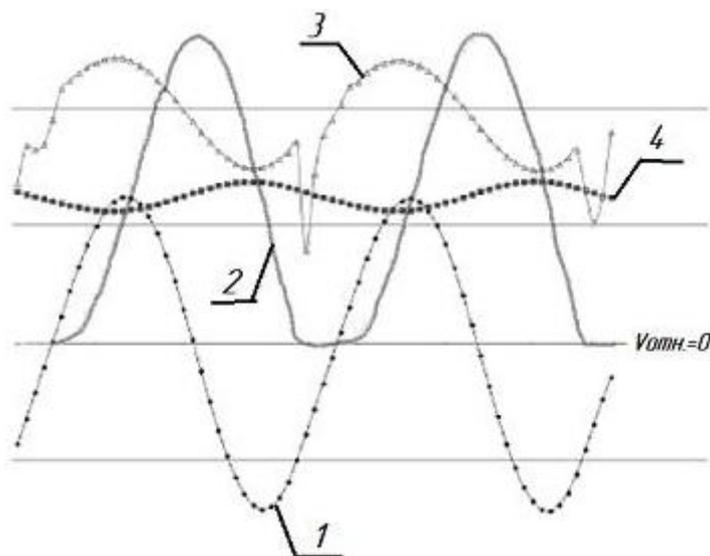


Рис.3. График установившихся автоколебаний.

Анализ графиков показал, что данные колебания имеют черты как релаксационных, так и квазигармонических. С одной стороны, колебания носят почти синусоидальный характер, с другой стороны законы изменения $F_{рез}(t)$ и $v_{отн}(t)$ показывают, что энергия в колебательную систему вкладывается лишь в тот момент, когда относительная скорость кубика и пластины равна нулю. Таким образом, амплитуда автоколебаний определяется разностью координат «остановки» и «срыва» кубика.

На графике (рис.4а) представлена зависимость энергии, рассеиваемой посредством конвективной теплоотдачи от времени для переходного процесса врезания инструмента в заготовку. Данный график показывает, что в данной системе достигается равенство подводимой и рассеиваемой энергии, а значит и постоянство амплитуды колебаний. На рисунке 4б фрагмент этого графика показан в увеличенном виде.

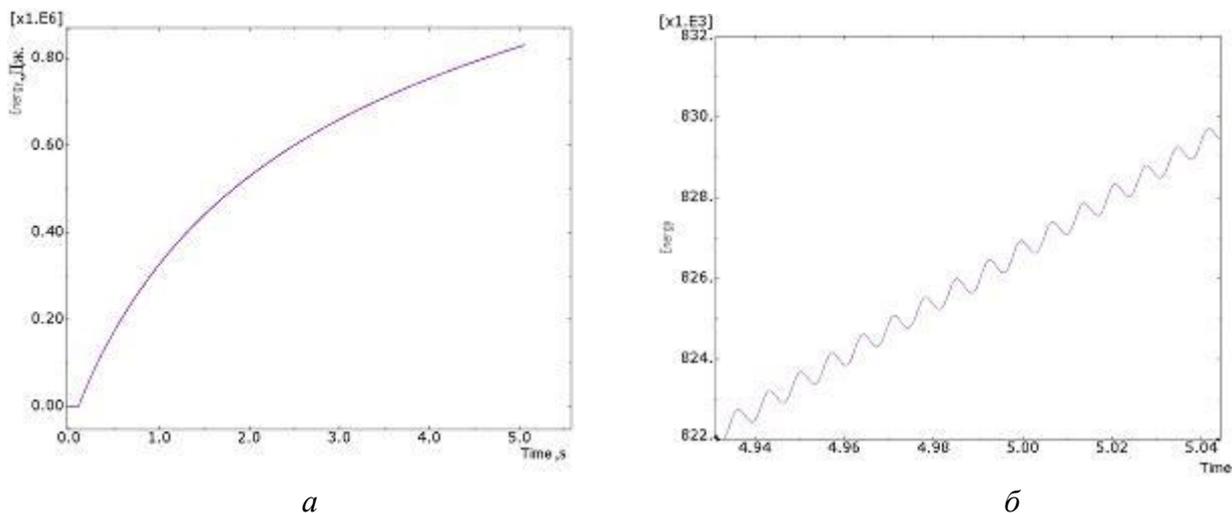


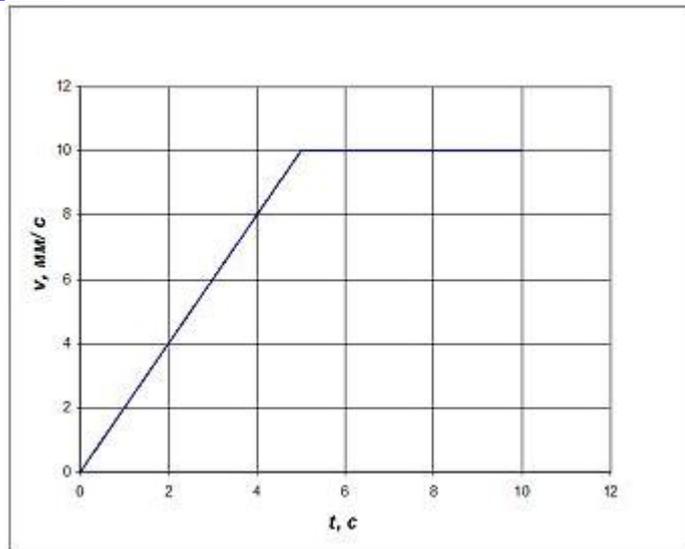
Рис.4. Зависимость рассеиваемой энергии от времени.

Анализируя состав автоколебательной системы, находим ее основные части: источник энергии - двигатель, обеспечивающий постоянную скорость пластины, колебательная система – кубик на пружине. Роль клапана играет механизм сцепления. Обратная связь с колебательной системы на клапан состоит в том, что упругая сила пружины обуславливает срыв кубика в определенном его положении. В момент, когда скорости кубика и пластины сравниваются, тепловая энергия перестает поступать в систему, температура системы начинает снижаться. Падение температуры вызывает увеличение силы сопротивления. В связи с этим продолжительность сцепления кубика и пластины достигает приблизительно 1/3 периода колебаний. Описанный механизм ограничивает амплитуду автоколебаний.

4. Влияние условий возбуждения на процесс развития термомеханических автоколебаний.

Для выяснения влияния условий возбуждения на процесс развития и поддержания термомеханических автоколебаний было исследовано 3 случая возбуждения автоколебаний:

а. Случай «мягкого самовозбуждения». Для моделирования «мягкого самовозбуждения» был принят следующий закон изменения скорости пластины от времени (рис.5). В течении 5 секунд скорость пластины нарастает линейно, затем выходит на установившееся значение.

Рис.5. Закон изменения $v(t)$

5. Случай «жесткого возбуждения». В начальный момент кубик смещался на величину, превышающую естественный уровень его колебаний, т.е. среднее значение его координаты в процессе установившихся термомеханических автоколебаний. После снятия этого ограничения начинался процесс развития автоколебаний.

в. Случай, соответствующий врезанию инструмента в заготовку. В начальный момент времени кубик находится в состоянии равновесия, а пластина движется с постоянной скоростью. Затем кубик вступает в контакт с пластиной. С точки зрения изменения сил, действующих в системе этот случай наиболее адекватно описывает возмущение, вызванное врезанием инструмента в заготовку.

Законы движения кубика для описанных случаев приведены на рисунках 6 а, б и в соответственно.

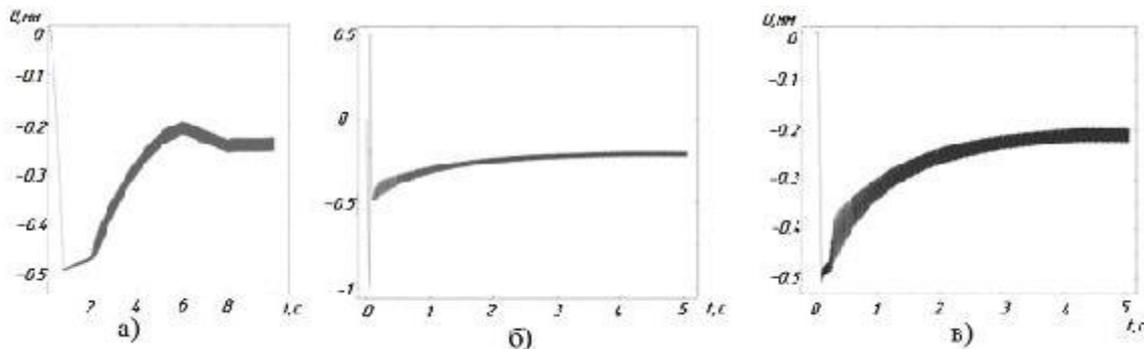


Рис. 6. Влияние условий возбуждения на характер автоколебаний.

Анализ данных случаев показал, что амплитуда автоколебаний, а также состояние устойчивого динамического равновесия, т.е. средняя величина смещения кубика не зависят от условий возбуждения. Таким образом, условия возбуждения автоколебаний влияют лишь на время и характер переходного процесса. Причем минимальное время переходного процесса соответствует случаю жесткого возбуждения, что связано, по-видимому, с тем, что дополнительная энергия, вкладываемая в систему жестким возбуждением, идет на разогрев тел и, как следствие, тепловой баланс системы достигается за меньший промежуток времени.

6. Оценка влияния скорости резания на характер автоколебательного процесса.

Для оценки влияния скорости резания на характер автоколебательного процесса была проведена серия численных экспериментов. Значения скорости движения пластины

варьировались от 1мм/с до 100м/с. Эксперименты показали, что при малых скоростях резания автоколебания носят ярко выраженный релаксационный характер. На рис. 7 представлен закон движения кубика соответствующий скорости пластины равной 1 мм/с.

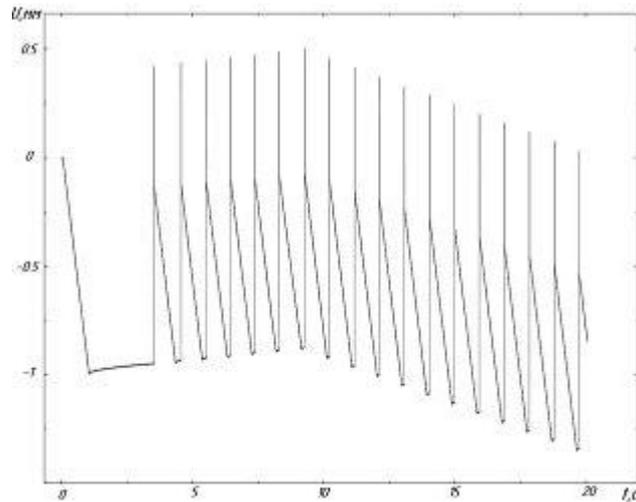


Рис. 7. Релаксационные автоколебания кубика.

Как видно, график имеет ярко выраженную пилообразную форму. Характерные «всплески» на вершинах пики связаны с тем, что выход инструмента в новое состояние равновесия сопровождается высокочастотными затухающими колебаниями.

При столь малых скоростях резания, единственным накопителем энергии является деформированный упругий элемент. По сути, колебание складывается из двух этапов:

а) пластина сцеплена с кубиком, а пружина взводится. Происходит переход кинетической энергии пластины в потенциальную энергию сжатой пружины;

б) после того, как сила деформированной пружины превысит силу сцепления между пластиной и кубиком происходит переход потенциальной энергии пружины в кинетическую энергию кубика и тепловую энергию системы.

В диапазоне скоростей резания от 1мм/с до 10мм/с, колебания постепенно начинают приобретать гармонический вид. Свою роль начинает играть второй накопитель энергии – инерционность кубика. Закон движения кубика имеет вид (рис. 3, кривая 1).

При дальнейшем увеличении скорости данный закон движения сохраняется, меняется лишь амплитуда колебаний. При скоростях порядка 1-5 м/с амплитуда автоколебаний достигает своего максимума и затем начинает снижаться. Частота колебаний при этом остается неизменной и равной собственной частоте колебательной системы.

При скоростях порядка 100 м/с автоколебания практически исчезают. На рисунке 8 представлен график зависимости амплитуды автоколебаний от скорости резания.

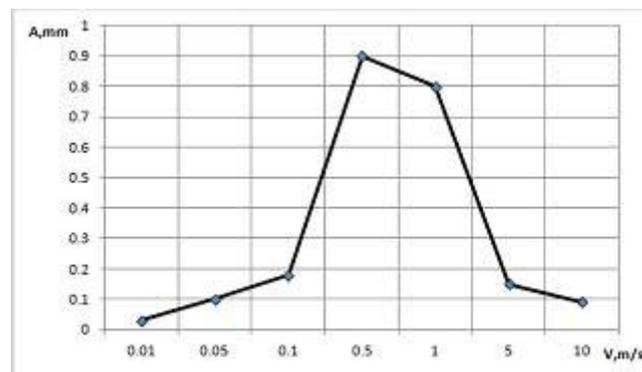


Рис.8. Зависимость амплитуды автоколебаний от скорости резания.

Экстремальный характер зависимости амплитуды автоколебаний от скорости резания объясняется, по-видимому, тем, что в промежутке скоростей пластины от 10 мм/с до 5м/с рост мощности, развиваемой ее двигателем вызывает рост колебательной мощности. Мощность колебаний в свою очередь зависит от колебательной скорости, которая определяется произведением частоты колебаний на их амплитуду. Следовательно, при постоянной частоте мощность может возрасти только за счет роста амплитуды колебаний. При дальнейшем повышении скорости пластины постепенно начинается срыв. Процесс сцепления становится нестабильным.

После достижения определенной скорости пластины сцепление перестает происходить совсем, так как максимальная мгновенная скорость кубика становится ниже скорости пластины и автоколебания исчезают совсем. Характер зависимости амплитуды термомеханических автоколебаний от скорости резания сходен с результатами, полученными в натуральных экспериментах [10]. Данная зависимость также весьма схожа с результатами, представленными в [11] для случая фрикционных автоколебаний.

Интерес представляют эпюры распределения температур системы для различных скоростей резания (рис.9).

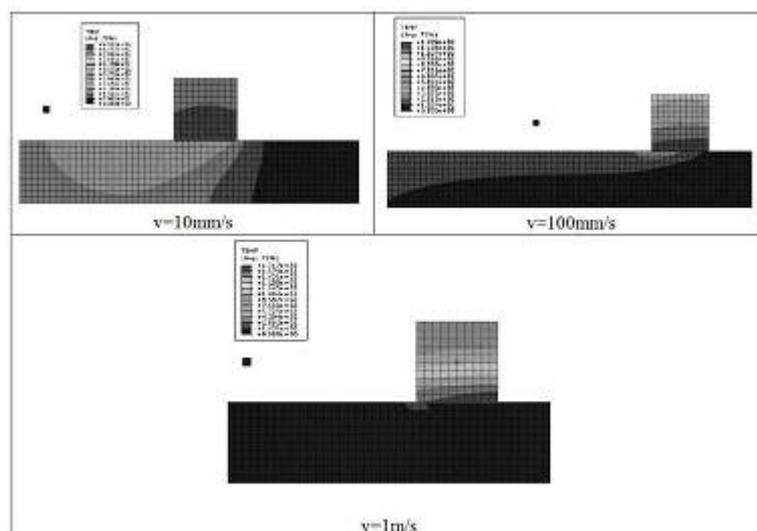


Рис.9. Эпюры распределения температуры для различных скоростей резания.

Видно, что при повышении скорости резания, возрастает температура обрабатывающего инструмента, температура обрабатываемой поверхности же при этом снижается. На высоких скоростях резания заготовка не успевает прогреться. Снижение температуры заготовки при высоких скоростях обработки, так же как и снижение вибраций является предпосылкой широкого развития сверхскоростного резания.

Очевидно, что в производственных условиях выбор скорости резания является основным рычагом для предотвращения автоколебаний. Результаты данного исследования показывают, что правильный выбор скорости резания способен стать весьма эффективным методом борьбы с этим явлением.

7. Влияние собственной частоты колебательной системы на процесс термомеханических автоколебаний.

Собственную частоту будем изменять путем варьирования жесткости пружины k . Была проведена серия виртуальных экспериментов для наиболее полного охвата собственных частот, встречающихся в станках [12].

Связь жесткости пружины и собственной частоты системы дается элементарной

формулой $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$, где m – масса кубика.

Значения собственных частот колебательной системы варьировались от 40 до 1803 Гц (таблица 3). Испытания проводились при скорости резания 0,2 м/с.

Таблица 3.

$f, \text{Гц}$	$k, \text{Н/мм}$
40	5000
57	10000
180	100000
400	500000
570	1000000
1275	5000000
1803	10000000

На низких частотах (40, 57 Гц) в системе возбуждаются релаксационные колебания. Колебания таких частот могут возникать в основном в несущих системах станков, либо при обработке массивных деталей на тяжелых станках.

В диапазоне частот от 57 до 180 Гц релаксационные колебания постепенно превращаются в почти гармонические. При дальнейшем повышении собственной частоты колебания сохраняют гармонический характер. Изменяются лишь их амплитуда и частота. При частотах порядка 1 кГц амплитуда автоколебаний становится пренебрежимо малой (рис.10). Применительно к термомеханическим автоколебаниям деление на виды [4] может быть применено лишь в том смысле, что низкочастотные автоколебания являются релаксационными, а колебания средних и высоких частот почти гармоническими.

Исследование показало, что термомеханические автоколебания могут возбуждаться практически на всем диапазоне собственных частот, встречающихся в станках общего назначения, однако с увеличением собственной частоты системы их амплитуда снижается.

В таблице 4 приведены величины амплитуды автоколебаний для различных значений собственных частот.

Таблица 4.

$f, \text{Гц}$	$A, \text{мм}$
180	0.3
400	0.1
570	0.05
1275	0.001

С практической точки зрения данные результаты иллюстрируют очевидный факт: с повышением жесткости системы СПИД происходит снижение амплитуды возбуждаемых автоколебаний.

8. Оценка влияния тепловых свойств материалов обрабатываемого инструмента и заготовки на характер термомеханических автоколебаний.

В данном разделе представлены результаты анализа влияния соотношения тепловых параметров инструментального материала и материала заготовки на характер термомеханических колебаний и распределение тепловых полей. Для наглядности будем использовать тепловые характеристики реальных материалов, не изменяя при этом закона $\sigma_s = \sigma_s(\Theta)$. Тепловые свойства инструментального материала: теплоемкость $C_p = 0,46 \text{ Дж/г}^\circ\text{С}$, теплопроводность $H = 50 \text{ Вт/м}^\circ\text{С}$.

Тепловые свойства и плотность некоторых металлов, обрабатываемых резанием, приведены в таблице 5.

Таблица 5.

	сталь	алюминий	медь
$C_p, \text{ Дж/г}^\circ\text{С}$	0,5	0,92	0,4
$H, \text{ Вт/м}^\circ\text{С}$	50	210	385
$\rho, \text{ г/см}^3$	7.8	2,7	9

На рис. 10 представлены эпюры распределения температуры при обработке выбранных материалов для одной и той же фазы колебаний, соответствующей максимальному значению температуры. Из рисунка видно, что наиболее однородное распределение температур наблюдается для меди, характеризующейся высокой теплопроводностью на фоне низкой теплоемкости. Наиболее высокий градиент температур в области контакта наблюдается для стали, обладающей низкими теплоемкостью, и теплопроводностью. Алюминий занимает промежуточное положение. Повышение теплопроводности обрабатываемого материала приводит к незначительному снижению температуры инструмента.

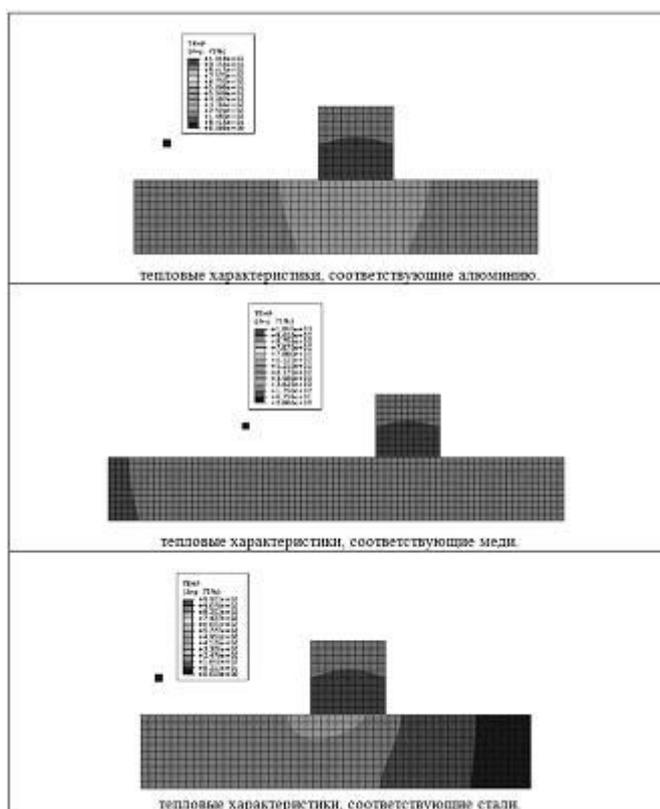


Рис.10. Эпюры распределения температуры при обработке выбранных материалов.

9. Исследование влияния условий охлаждения на процесс термомеханических автоколебаний.

В интервале температур от 20 до 200 °С предел прочности стали является постоянной величиной и для большинства марок этого материала даже демонстрирует небольшое возрастание [13]. Поэтому повышение коэффициента конвективной теплоотдачи до величины, обеспечивающей снижение температуры в области резания до температур, соответствующих возрастающему участку характеристики $\sigma_s = \sigma_s(\Theta)$, может стать эффективным инструментом для борьбы с термомеханическими колебаниями.

На рис. 11а представлен график зависимости контактной температуры от времени для переходного процесса, соответствующего случаю «мягкого самовозбуждения» автоколебаний (см. раздел 4).

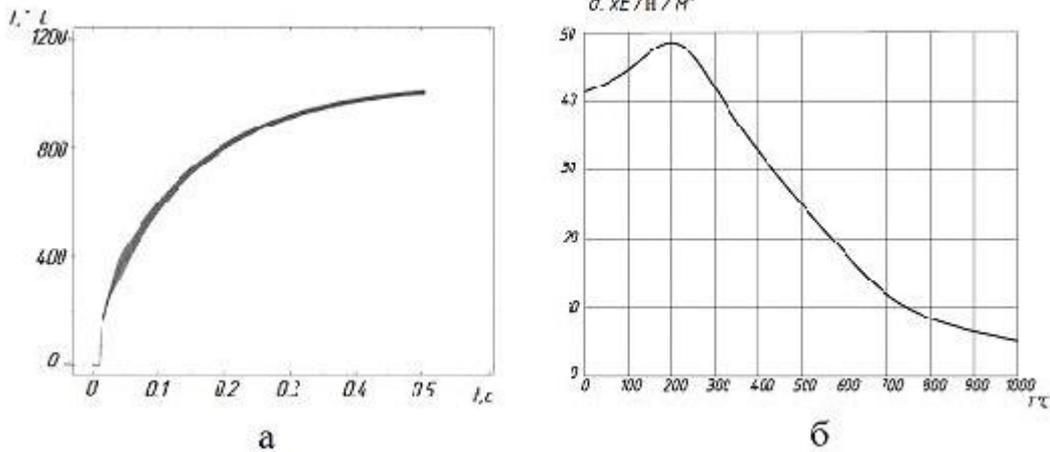


Рис.11. График зависимости контактной температуры от времени для переходного процесса, соответствующего мягкому самовозбуждению автоколебаний и кривая $\sigma_v = \sigma_v(\Theta)$ обрабатываемого материала.

Из графика видно, что процесс врезания сопровождается быстрым разогревом зоны резания. В диапазоне температур от 0 до 200 °С разогрев происходит плавно без наложенных колебаний, температура нарастает по показательному закону. Термомеханические колебания в этом диапазоне температур отсутствуют. После превышения температурой отметки в 200°С наблюдается наложение на общий показательный рост температуры дополнительных гармонических колебаний. Начинается процесс развития термомеханических автоколебаний. Причем, как видно из рисунков 11, а, б максимальная амплитуда этих колебаний соответствует диапазону температур, обеспечивающему максимальный отрицательный наклон кривой $\sigma_v = \sigma_v(\Theta)$. (от 200° до 600 °С).

Подберем такое сочетание режима резания и условий теплоотдачи, которое обеспечивало бы значение температуры в области резания, находящееся в диапазоне от 0 до 200°С. Для этого постепенно будем увеличивать коэффициент конвективной теплоотдачи.

На рис. 12,а изображен график, отражающий закон движения кубика при коэффициенте теплоотдачи равном 10 мВт/(мм²·К) На рисунке 12,б приведен соответствующий график зависимости контактной температуры от времени.

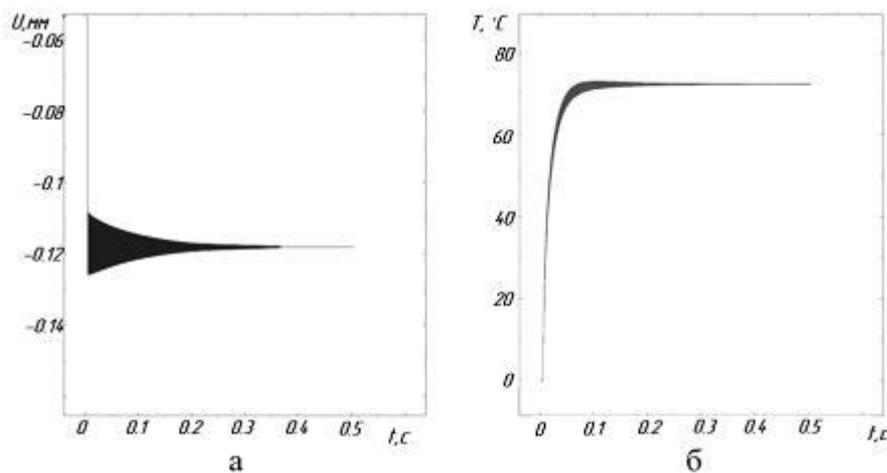


Рис. 12. Процесс затухающих колебаний, соответствующий возрастающему участку кривой $\sigma_v = \sigma_v(\Theta)$.

Из данных рисунков видно, что в данном случае термомеханические автоколебания отсутствуют. Процесс затухающих колебаний, который можно увидеть на рисунке 3.11, а, является результатом ступенчатого воздействия, вызванного врезанием инструмента.

На основании анализа данных результатов возникает идея о теоретической возможности создания способа предотвращения автоколебаний на основании управления температурой в зоне резания, например с помощью СОЖ. Для снижения амплитуды автоколебаний в области резания должна обеспечиваться температура, соответствующая либо возрастающему участку кривой $\sigma_s = \sigma_s(\theta)$, либо, если это невозможно, участку с минимальным наклоном данной кривой.

Сформирована и исследована численная термомеханическая модель автоколебаний при резании. Исследовано влияние режимов резания, свойств технологической системы и обрабатываемого материала на устойчивость при обработке резанием. Несмотря на простоту сформированной модели, полученные результаты согласуются с результатами натуральных экспериментов [10] и раскрывают физическую природу явлений, наблюдаемых в эксперименте, что косвенно подтверждает верность гипотезы о термомеханической природе автоколебаний при резании. Подтверждена справедливость предположений, лежащих в основе математической модели процесса [6]. Однако для более полного изучения процесса автоколебаний на основе аналитической модели [6] необходимо усложнение численной модели и введение в рассмотрение всего спектра физических процессов, влияющих на устойчивость процесса резания.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 13-08-01235А.

Список литературы

1. Каширин А.И. Исследование вибраций при резании металлов. М.-Л.: АН СССР, 1944, 282 с.
2. Соколовский А.П. Вибрации при работе на металлорежущих станках. – Исследование колебаний металлорежущих станков при резании металлов. – М.: Машгиз. 1958.
3. Эльясберг М.Е. Основы теории автоколебаний при резании металлов // Станки и инструмент 1962. № 10, № 11.
4. Кудинов В.А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1966. 359с.
5. Глустый И. Автоколебания в металлорежущих станках. М.: Машгиз. 1956.
6. Асташев В.К., Корендяев Г.К. Термомеханическая модель возникновения автоколебаний при резании. М. Проблемы машиностроения и надежности машин №3, 2012.
7. Грановский Г.И., Грановский В.Г. Резание металлов. М.: Высшая школа. 1985. 304 с.
8. Kalhori. Modelling and Simulation of Mechanical Cutting. Doctoral thesis. Lulea University of Technology. Sweden. 2001. 103 с.
9. Корендяев Г.К. «Исследование погрешности технологической системы профильного шлифования зубчатых колёс и шлицев с использованием 3D-моделирования» Диссертация на соискание степени магистра техники и технологии. МГТУ «СТАНКИН». 2010. 59 с.
10. Жарков И.Г. Вибрации при обработке лезвийным инструментом. Л.: Машиностроение, 1987. 184 с.
11. Харкевич А.А. Автоколебания. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 170 с.
12. Кедров С.С. Колебания металлорежущих станков. М.: Машиностроение, 1978. 200с.
13. Н.М. Беляев. Сопrotивление материалов. М. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 856с.