

УДК 534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

© Николай Николаевич Веричев, Владимир Иванович Ерофеев,
Ольга Ивановна Ведяйкина

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем
машиностроения Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия
erf04@sinn.ru

Аннотация. В рамках геометрически-нелинейной модели упругого стержня изучаются процессы взаимодействия изгибных и крутильных волн, приводящие к формированию периодических и уединенных стационарных волн.

Ключевые слова: изгибно-крутильная волна, стационарная волна, периодическая волна, солитон, упругий стержень.

Ранее в работах по динамике упругих стержневых конструкций рассматривалась линейная теория распространения изгибно-крутильных волн в тонкостенных упругих балках произвольного сечения, общие особенности дисперсии, соотношения, учитывающие изгибно-крутильную связь [1,2], изгибно-крутильные колебания двух жестко скрепленных между собой упругих стержней с заземленными концами [3].

В [4] в рамках геометрически нелинейной модели изгибно-крутильных колебаний упругого стержня рассматривались задачи о распространении интенсивной изгибной волны в закрученном стержне и о распространении интенсивной крутильной волны в стержне с начальной погибью.

В публикуемой работе изучаются процессы взаимодействия изгибных и крутильных волн, приводящие к формированию нелинейных периодических и уединенных стационарных волн.

Связанные изгибно-крутильные волны описываются следующей системой уравнений [4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 2c_m^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\theta^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} r_y^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2c_m^2 I_y}{I_p} \frac{\partial \theta}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta}{\rho I_p} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^3 + c_m^2 \theta^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \\ - \frac{2c_m^2}{r_p^2} \theta^3 - \frac{2c_m^2}{r_p^2} \theta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - c_m^2 \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $w(x,t)$ – поперечное перемещение частиц срединной линии стержня; $\theta(x,t)$ – угол поворота его поперечного сечения; $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны в материале; $c_s = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны (стержневая скорость); $c_m = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$; E – модуль Юнга; λ, μ – константы Ламе; ρ – плотность материала; r_y и r_p – осевой и полярный радиусы инерции, соответственно, определяемые

соотношениями: $r_{y,p} = \sqrt{I_{y,p}/F}$; где $I_y = \iint_F z^2 dF$ – осевой момент инерции; $I_p = \iint_F (y^2 + z^2) dF$ – полярный момент инерции; F – площадь поперечного сечения стержня; $\beta = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \iint_F (y^2 + z^2) dF$.

Будем искать решение системы (1) в виде бегущих стационарных волн:

$$w = w(\xi), \theta = \theta(\xi), \quad (2)$$

где $\xi = x - Vt$, V – скорость стационарной волны. Соотношения (2) сведут (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + \frac{V^2}{c_s^2 r_y^2} U = \frac{2c_m^2}{c_s^2 r_y^2} \left[\theta^2 U + U^3 + \frac{1}{2} r_y^2 U \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 \right], \quad (3)$$

$$(V^2 - c_\tau^2) \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left[2c_m^2 \frac{I_y}{I_p} \frac{d\theta}{d\xi} U^2 + \frac{\beta}{\rho I_p} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^3 + c_m^2 \theta^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right) \right] -$$

$$- \frac{2c_m^2}{r_p^2} \theta^3 - \frac{2c_m^2}{r_p^2} \theta U^2 - c_m^2 \theta \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2$$

Здесь введено обозначение $U = \frac{dw}{d\xi}$, при этом уравнение (3) получено путем интегрирования по ξ уравнения относительно w и приравнивания константы интегрирования к нулю.

Введем в (3), (4) безразмерную переменную $\eta = \frac{\xi}{\Lambda}$ и замену функций $\tilde{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}$, $\tilde{U} = \frac{U}{\theta_0}$, что позволит привести эту систему к виду:

$$\frac{d^2 \tilde{U}}{d\eta^2} + \frac{V^2}{c_s^2} \tilde{U} = 2 \frac{c_m^2}{c_s^2} \theta_0^2 \tilde{U}^3 + 2 \frac{c_m^2}{c_s^2} \theta_0^2 \tilde{U} \tilde{\theta}^2 + 2 \frac{c_m^2}{c_s^2} \theta_0^2 \tilde{U} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} \right)^2, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}}{d\eta^2} = \frac{2c_m^2 \theta_0^2}{c_\tau^2 \left(\frac{V^2}{c_\tau^2} - 1 \right)} \left[2\tilde{U} \frac{d\tilde{U}}{d\eta} \frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} + \frac{\tilde{\theta}}{2} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} \right)^2 - \tilde{\theta}^3 - \tilde{\theta} \tilde{U}^2 \right]. \quad (6)$$

Заметим, что при выводе уравнения (6) пренебрегалось нелинейными слагаемыми перед $\frac{d^2 \tilde{\theta}}{d\eta^2}$ как величинами более высокого порядка малости по сравнению с сохраненными слагаемыми.

Для дальнейшего упрощения уравнений оценим величины входящих в них коэффициентов. Если стержень изготовлен из алюминиевого сплава Д16, то $\lambda = 6,99 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu = 2,75 \cdot 10^{10}$ Н/м² [5], следовательно $\frac{c_m^2}{c_\tau^2} \approx 3$, а $\frac{c_m^2}{c_s^2} \approx 1,125$.

Систему (5), (6) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{u}}{d\eta^2} + \tilde{u} &= 2\varepsilon \left[\tilde{u}^3 + \tilde{u}\tilde{\theta}^2 + \tilde{u} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2\tilde{\theta}}{d\eta^2} &= \pm 3\varepsilon \left[4\tilde{u} \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} + \tilde{\theta} \left(\frac{d\tilde{\theta}}{d\eta} \right)^2 - 2\tilde{\theta}^3 - 2\tilde{\theta}\tilde{u}^2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon \approx \theta_0^2$; $\Lambda \sim r_{\rho,y}$.

Для компактности уравнениями (7) записаны две независимые системы. Одна из них соответствует знаку «+» второго уравнения, а вторая – знаку «-».

Знаку «+» соответствует случай $V > c_t$, т.е., когда скорость нелинейной стационарной волны больше скорости линейной крутильной волны. Знак «-» соответствует противоположному случаю.

Обратимся к свойствам уравнений (7) и опишем возможные типы стационарных волн.

Если $\varepsilon = 0$, то решения системы имеют простой вид: $\tilde{u} = C_1 \sin \eta + C_2 \cos \eta$, $\tilde{\theta} = C_3 + C_4 \eta$. Этот случай интереса не представляет.

Положительный параметр ε в обеих системах (7) является устранимым. А именно, замена переменных вида

$$\tilde{u} = (2\varepsilon)^{-1/2} W, \quad \tilde{\theta} = (2\varepsilon)^{-1/2} \Psi \quad (8)$$

сводит уравнения (7) к системе без этого параметра:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W}{d\eta^2} + W &= W^3 + W\Psi^2 + W \left(\frac{d\Psi}{d\eta} \right)^2, \\ \frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} &= \pm \frac{3}{2} \left[4W \frac{dW}{d\eta} \frac{d\Psi}{d\eta} + \Psi \left(\frac{d\Psi}{d\eta} \right)^2 - 2\Psi^3 - 2\Psi W^2 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Для удобства записываем уравнения (9) эквивалентной системой вида

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\eta} &= X \\ \frac{dX}{d\eta} &= -W + W^3 + W\Psi^2 + WY^2 \\ \frac{d\Psi}{d\eta} &= Y \\ \frac{dY}{d\eta} &= \pm \frac{3}{2} (4WXY + \Psi Y^2 - 2\Psi^3 - 2\Psi W^2) \end{aligned} \quad (10)$$

Состояниями равновесия уравнений (10) являются точки $O(W_0, X_0, \Psi_0, Y_0)$: $O_1(0,0,0,0)$, $O_2(-1,0,0,0)$, $O_3(1,0,0,0)$. В соответствии с заменой (8) состояния равновесия системы (7): $O_1(0,0,0,0)$, $O_2(-(2\varepsilon)^{-1/2}, 0,0,0)$, $O_3((2\varepsilon)^{-1/2}, 0,0,0)$.

Приведем необходимое для дальнейшего изложения определение интегрального многообразия динамической системы [6].

Множество точек $M(x)$ фазового пространства $G(x)$ динамической системы $\dot{x} = F(x)$ называется интегральным многообразием, если для любой точки $x_0 \in M$ выполняется $x(t) \in M$ для всех t , где $x(t)$ – решение системы с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

По определению, интегральное многообразие – поверхность (гиперповерхность) в фазовом пространстве динамической системы, заполненная ее фазовыми траекториями. В системе (10) роль времени играет координата η .

Непосредственно из уравнений (10) устанавливаем существование следующих интегральных многообразий системы в фазовом пространстве $G\{W, X, \psi, Y\}$.

$M_1 = \{\psi=0, Y=0\}$ (координатная плоскость (W, X)) является интегральным многообразием системы (10). Траектории системы (10) на многообразии M_1 являются траекториями системы

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\eta} &= X \\ \frac{dX}{d\eta} &= -W + W^3 \end{aligned} \quad (11)$$

с интегралом: $W^4 - 2(W^2 + X^2) = C$. Картина интегральных кривых изображена на рис.1.

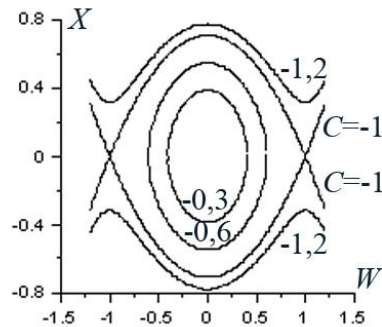


Рис.1

Интерпретируя этот результат на динамику стержня, заключаем, что при отсутствии кручения возможно существование двух типов стационарных изгибных волн.

Солитоны (кинк и антикинк) [7], соответствующие сепаратрисам, идущим из седла $O_2(-1, 0, 0, 0)$ в седло $O_3(1, 0, 0, 0)$ (на рис.1 они соответствуют значению $C=-1$).

Периодические стационарные волны, соответствующие периодическим траекториям внутри сепаратрисного контура. Траекториям вблизи сепаратрисного контура соответствуют кноидальные волны, а траекториям, располагающимся вблизи состояния равновесия $O_1(0, 0, 0, 0)$ (центра), – квазигармонические волны.

$M_2 = \{W=0, X=0\}$ (координатная плоскость (ψ, Y)) – интегральное многообразие системы (10). Траектории системы (10) на многообразии M_2 являются траекториями двумерной системы

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\eta} &= Y \\ \frac{dY}{d\eta} &= \pm \frac{3}{2}(\psi Y^2 - 2\psi^3) \end{aligned} \quad (12)$$

имеющей интеграл: $Y^2 - 2\psi^2 \mp \frac{4}{3} = C \exp\left(\pm \frac{3}{2}\psi^2\right)$. Картины интегральных кривых изображены на рис.2 (соответствует верхнему знаку) и рис. 3 (нижний знак).

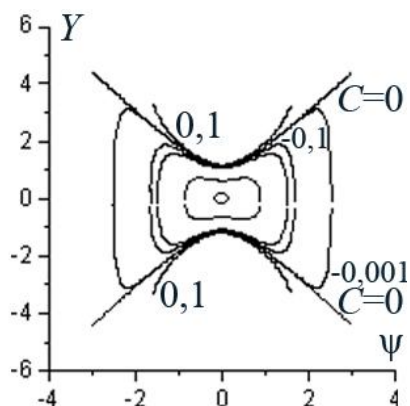


Рис.2

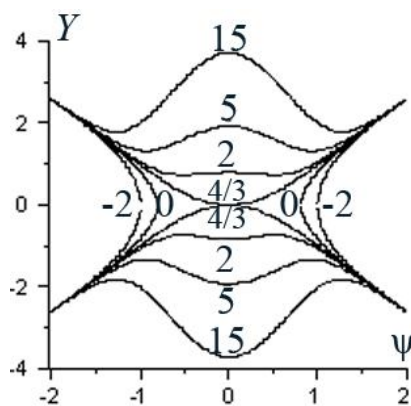


Рис.3

На рис.4 а, б показаны одна из характерных траекторий системы (10) (знак «+») и ее осциллограмма, полученные в численном эксперименте.

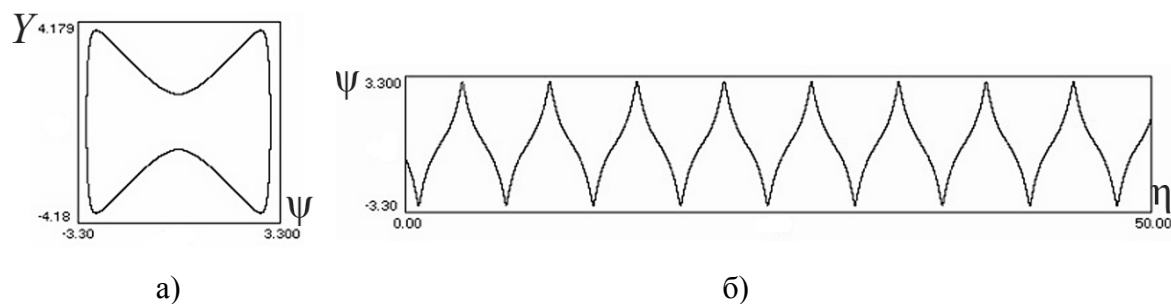


Рис.4

Таким образом, в отсутствие изгибных возмущений все возможные стационарные крутильные волны являются периодическими, по терминологии [7], – сверхнелинейными, рис.4.б.

Рассмотрим динамику системы (10) вне интегральных многообразий.

Как показывает численный эксперимент, стационарные движения осцилляторов в системе (10), происходящие вне разобранных выше многообразий, являются либо периодическими, либо квазипериодическими. Соответственно, эти движения определяют или периодические или квазипериодические изгибно-крутильные стационарные волны, рис. 5-8. Характерные особенности этих волн состоят в следующем.

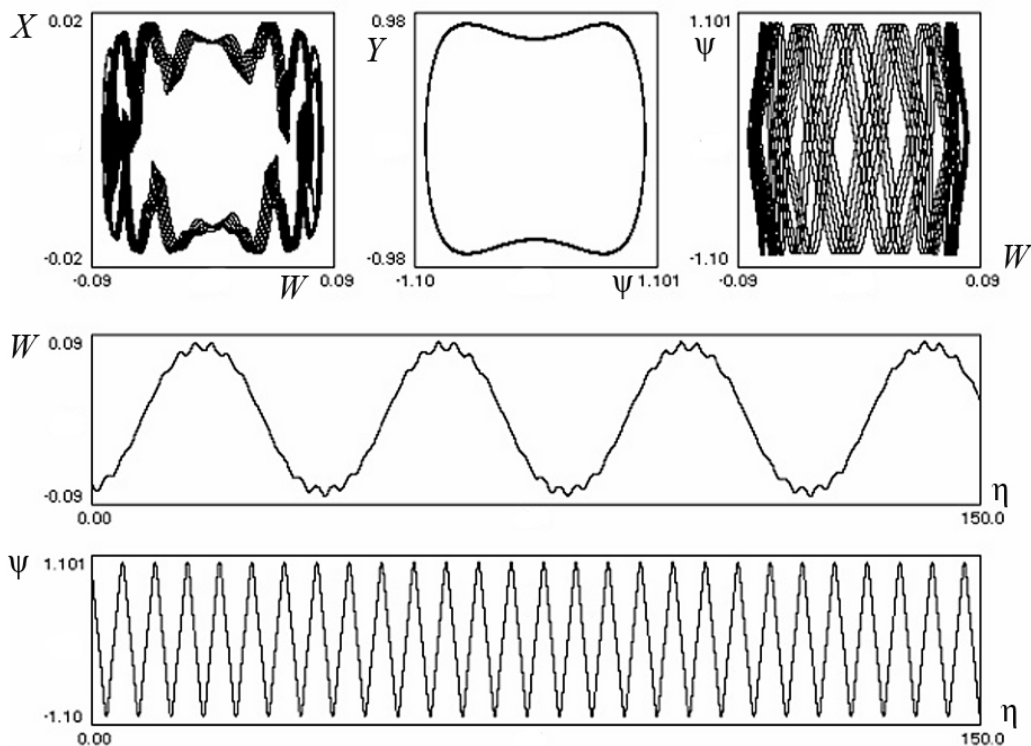


Рис.5

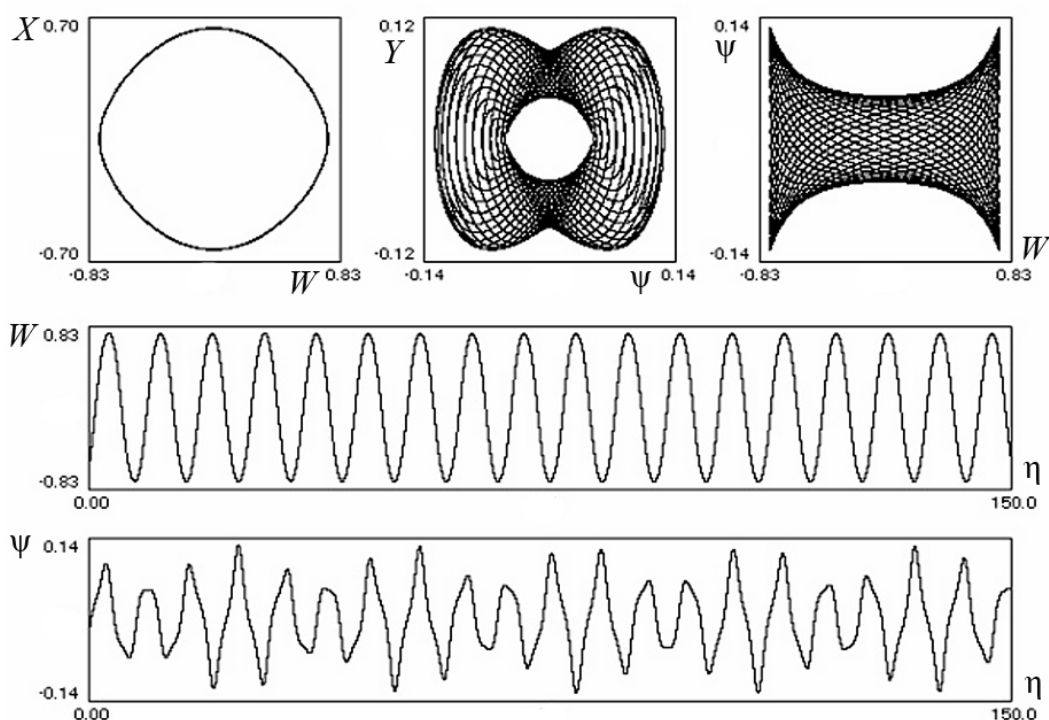


Рис.6

При формировании формы волны взаимодействие изгибных и крутильных колебаний является слабым в том смысле, что малые колебания одной из компонент в какой-либо точке, остаются таковыми во всех точках профиля волны. Эта ситуация отражена на рис. 5, 6. В первом случае мала изгибная компонента, а на втором, – крутильная компонента волны. Слабое взаимодействие изгибной и крутильной компонент стационарной волны объясняется

большим разном их нелинейных частот, определяемых смещениями той и другой компоненты от равновесного состояния.

В случае близких интенсивностей (одного порядка) изгибной и крутильной компонент (соответственно, частот колебаний соответствующих осцилляторов), имеет место их резонансное взаимодействие, приводящее к периодической стационарной волне, рис.7, или квазипериодической волне со значительной глубиной модуляции одной из ее компонент, рис.8.

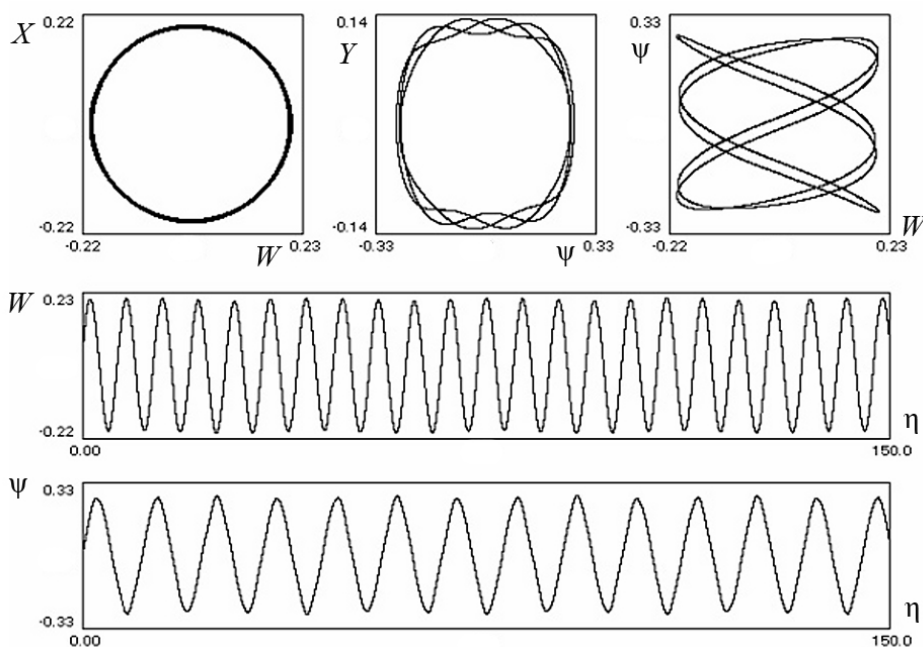


Рис.7

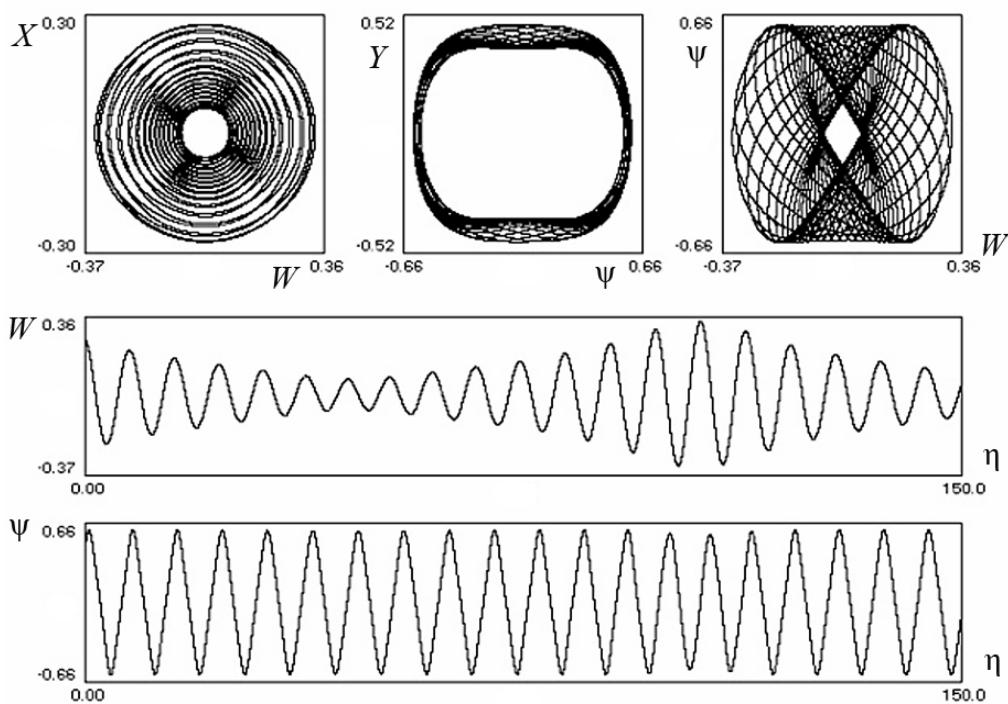


Рис.8

Список литературы

1. Muller P. Torsional-flexural waves in thin-walled open beams // Journal of Sound and Vibration. 1983. Volume 87, Issue 1. – pp. 115-141.
2. Ерофеев В.И., Орехова О.И. Дисперсия изгибно-крутильной волны, распространяющейся в балке. Части 1,2 // Приволжский научный журнал. 2011. № 2. С. 7-15, № 3. С. 20-26.
3. Баранов Н. А., Родыгин А.В. Изгибно-крутильные колебания стержневой системы // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2008. Т. 6. № 7. С. 47-52.
4. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Орехова О.И. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 1. С. 11-15.
5. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
6. Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.
7. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, физматлит, 2000. 272 с.