

УДК 536.24

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СИСТЕМЕ, ОГРАНИЧЕННОЙ МНОГОСЛОЙНЫМ ТЕПЛОПРОВОДНЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ТЕЛОМ И ЗАПОЛНЕННОЙ ОСЛАБЛЯЮЩЕЙ СРЕДОЙ

© Валерий Владимирович Рубцов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Московский государственный строительный университет"

[rubval1@yandex.ru](mailto:rubval1@yandex.ru)

**Аннотация.** В статье изложен подход к численному моделированию стационарного радиационно-кондуктивного теплообмена в многослойной сферической системе, заполненной ослабляющей средой, основанный на совместном использовании обобщенного зонального метода и метода последовательных двусторонних приближений.

**Ключевые слова:** радиационно-кондуктивный теплообмен, коэффициент теплопроводности, поглощающая и рассеивающая среда.

### Investigation of Stationary Radiation-Conductive Heat Transfer in the System, Limited Multilayer Heat-Conducting Spherical Body and Filled with Weakens Medium

V.V. Rubtsov

**Annotation.** The article describes an approach to numerical modeling of stationary radiation-conductive heat transfer in multilayer spherical system, filled weakens medium, based on a joint use of the generalized zonal method and the method of successive two-sided approximations.

**Key words:** radiation-conductive heat transfer, coefficient of thermal conductivity, successive approximations.

**1. Постановка задач.** Рассматриваются две постановки задачи, различающиеся между собой способами задания граничных условий на внешней границе системы.

**1.1. Первая постановка задачи.** Пусть имеется теплопроводное тело сферической формы без источников (стоков) тепла, ограниченное поверхностями  $F_0, F_n$  и состоящее из  $n$  слоев  $V_i: V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$  (рис.1).

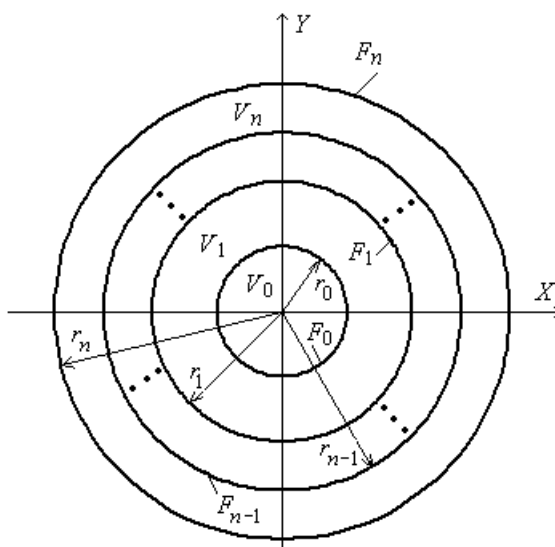


Рис.1. Схема излучающей системы

Предположим, что контакт между слоями  $V_i$  и  $V_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , совершенный и температура на соприкасающихся поверхностях  $F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , двух слоев одинакова. Заданы

коэффициенты теплопроводности  $\lambda_i(M_i)$  слоев  $V_i$ ,  $M_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , которые зависят лишь от расстояния точки  $M_i$  до центра сферической системы. Поверхность  $F_0$  примем серой, диффузно излучающей и отражающей с коэффициентом поглощения  $A_0$ . Поверхность  $F_n$  положим изотермической с заданной температурой  $T_{F_n}$  (граничное условие первого рода). Обозначим через  $V_0$  пространство, ограниченное поверхностью  $F_0$ , заполненное однородной изотермической средой с температурой  $T_0$  и заданными коэффициентами объемного поглощения  $\alpha$  и рассеяния  $\beta$  [1].

Требуется определить поля температур  $T_i(M_i)$  в сферических слоях  $V_i$ ,  $M_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие неравенствам

$$0 < m_* \leq T_i(M_i) \leq m^*, M_i \in V_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где

$$m_* = \min(T_0, T_{F_n}), m^* = \max(T_0, T_{F_n}).$$

Кроме того, требуется найти распределение значений плотности объемного результирующего излучения  $\eta_{\text{рез}}(M_0)$  в поглощающей и рассеивающей среде, заполняющей пространство  $V_0$ ,  $M_0 \in V_0$ , а также полусферическую плотность результирующего излучения  $E_{\text{рез.0}}$  на поверхности  $F_0$ .

Математическая постановка данной задачи в сферической системе координат формулируется следующим образом:

- найти функции  $T_i(r)$ , определенные при  $r_{i-1} \leq r \leq r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \lambda_i(r) r^2 \frac{dT_i(r)}{dr} \right) = 0, \quad r_{i-1} < r < r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

граничным условиям

$$T_i(r_i) = T_{i+1}(r_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3)$$

$$T_n(r_n) = T_{F_n}, \quad (4)$$

$$\lambda_i(r_i) \frac{dT_i(r_i)}{dr} = \lambda_{i+1}(r_i) \frac{dT_{i+1}(r_i)}{dr}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5)$$

$$-\lambda_1(r_0) \frac{dT_1(r_0)}{dr} = E_{\text{рез.0}} = A_0 \sigma_0 \left[ T_1^4(r_0) - T_0^4 \right] (\bar{\Pi}_{00} - 1), \quad (6)$$

и неравенствам

$$0 < m_* \leq T_i(r) \leq m^*, \quad r_{i-1} \leq r \leq r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (7)$$

- определить  $\eta_{\text{рез}}(r)$  на основании соотношения [3]

$$\eta_{\text{рез}}(r) = 4\alpha\sigma_0 \left[ T_1^4(r_0) - T_0^4 \right] \bar{\Pi}^{(1)}(r, F_0), \quad 0 \leq r < r_0. \quad (8)$$

Здесь  $\sigma_0$  - постоянная Стефана – Больцмана;  $\bar{\Pi}_{00}$  – вероятность перехода излучения от произвольной единичной площадки на поверхности  $F_0$  и поглощения его этой поверхностью

[4];  $\bar{H}^{(1)}(r, F_0)$  – вероятность перехода излучения от единичного элемента объема в точке с координатой  $r$  и его поглощения поверхностью  $F_0$  [4]. Вероятности  $\bar{H}_{00}$  и  $\bar{H}^{(1)}(r, F_0)$  находятся с помощью обобщенного зонального метода [3] с использованием расчетных формул и выражений, полученных в [2].

Задачу (2) – (8) удобно представить в безразмерном виде

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( v_i(\xi) \xi^2 \frac{d\theta_i(\xi)}{d\xi} \right) = 0, \quad \xi_{i-1} < \xi < \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$\theta_i(\xi_i) = \theta_{i+1}(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (10)$$

$$\theta_n(\xi_n) = \theta_n(1) = \theta_{F_n}, \quad (11)$$

$$v_i(\xi_i) \frac{d\theta_i(\xi_i)}{d\xi} = v_{i+1}(\xi_i) \frac{d\theta_{i+1}(\xi_i)}{d\xi}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (12)$$

$$-v_1(\xi_0) \frac{d\theta_1(\xi_0)}{d\xi} = \zeta_{\text{рез.0}} = N_0 \left[ \theta_1^4(\xi_0) - \theta_0^4 \right] (\bar{H}_{00} - 1), \quad (13)$$

$$0 < m \leq \theta_i(\xi) \leq 1, \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

$$q_{\text{рез}}(\xi) = \left[ \theta_1^4(\xi_0) - \theta_0^4 \right] \bar{H}^{(1)}(\xi, F_0), \quad 0 \leq \xi < \xi_0, \quad (15)$$

где

$$\theta = \frac{T}{m^*}, \quad v_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1(r_0)}, \quad \xi = \frac{r}{r_0}, \quad m = \frac{m^*}{m^*}, \quad N_0 = \frac{A_0 \sigma_0 m^{*3} r_n}{\lambda_1(r_0)}, \quad \zeta_{\text{рез.0}} = \frac{E_{\text{рез.0}} r_n}{\lambda_1(r_0) m^*}, \quad q_{\text{рез}} = \frac{\eta_{\text{рез}}}{4\alpha \sigma_0 m^{*4}}.$$

**1.2. Вторая постановка задачи.** Данная постановка характеризуется заданием на поверхности  $F_n$  граничного условия третьего рода, а именно предположим, что между поверхностью  $F_n$  и окружающей чисто поглощающей средой с температурой  $T_s$  происходит радиационный теплообмен. В этом случае математическая постановка задачи отыскания стационарных распределений температур в сферических слоях  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , приводится к решению дифференциальных уравнений (9) при граничном условии

$$v_n(1) \frac{d\theta_n(1)}{d\xi} = \zeta_{\text{рез.n}} = N_n \left[ \theta_s^4 - \theta_n^4(1) \right], \quad (16)$$

граничных условиях (10) – (13) и ограничениях (14).

**2. Решение задач.** Для решения сформулированных нелинейных краевых задач воспользуемся методом последовательных двусторонних приближений [2,5], В результате приходим к следующим расчетным выражениям

$$\theta_i^{(k)}(\xi) = a_1^{(k)} D_i(\xi) + b_1^{(k)}, \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

где

$$a_1^{(k)} = \frac{4N_0 \theta_{F_n} - f_0(\theta_1^{(k-1)})}{\frac{1}{\xi_0^2} + 4N_0 D_n(1)}, \quad (18)$$

$$b_1^{(k)} = \frac{D_n(1) f_0(\theta_1^{(k-1)}) + \frac{1}{\xi_0^2} \theta_{F_n}}{\frac{1}{\xi_0^2} + 4N_0 D_n(1)}, \quad (19)$$

- для первой постановки задачи;

$$a_1^{(k)} = \frac{N_0 f_n(\theta_n^{(k-1)}) - N_n f_0(\theta_1^{(k-1)})}{N_0 + \frac{N_n}{\xi_0^2} + 4N_0 N_n D_n(1)}, \quad (20)$$

$$b_1^{(k)} = \frac{[1 + 4N_n D_n(1)] f_0(\theta_1^{(k-1)}) + \frac{1}{\xi_0^2} f_n(\theta_n^{(k-1)})}{4 \left( N_0 + \frac{N_n}{\xi_0^2} \right) + 16N_0 N_n D_n(1)}, \quad (21)$$

- для второй постановки задачи.

Содержащиеся в формулах (17) – (21) величины определяются на основании соотношений

$$f_0(\theta_1^{(k-1)}) = N_0 \left\{ [\theta_1^{(k-1)4}(\xi_0) - \theta_0^4] (\bar{H}_{00} - 1) + 4\theta_1^{(k-1)}(\xi_0) \right\}, \quad (22)$$

$$f_n(\theta_n^{(k-1)}) = N_n \left[ \theta_s^4 - \theta_n^{(k-1)4}(1) + 4\theta_n^{(k-1)}(1) \right], \quad (23)$$

$$D_1(\xi) = \varphi_1(\xi), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1, \quad (24)$$

$$D_i(\xi) = \varphi_i(\xi) + \sum_{l=1}^{i-1} \varphi_l(\xi_l), \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (25)$$

$$\varphi_i(\xi) = \int_{\xi_{i-1}}^{\xi} \frac{dz}{z^2 v_i(z)}, \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

С помощью полученных расчетных выражений находим неубывающие  $\theta_{i*}^{(0)}(\xi) = m$ ,  $\theta_{i*}^{(k)}(\xi)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и невозрастающие  $\theta_i^{*(0)}(\xi) = 1$ ,  $\theta_i^{*(k)}(\xi)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , последовательности приближений, сходящиеся к единственному решению  $\theta_i(\xi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , рассматриваемых краевых задач [2,5]. Далее приближенно принимаем

$$\theta_i(\xi) \approx \frac{1}{2} \left[ \theta_{i*}^{(k)}(\xi) + \theta_i^{*(k)}(\xi) \right], \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

где  $\theta_{i*}^{(k)}(\xi)$  и  $\theta_i^{*(k)}(\xi)$  выбираем из условия

$$\left| \theta_i^{*(k)}(\xi) - \theta_{i*}^{(k)}(\xi) \right| < \varepsilon, \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

при заданном достаточно малом числе  $\varepsilon > 0$ .

**3. Численные исследования.** Предположим, что коэффициенты теплопроводности  $v_i(\xi)$  задаются выражениями  $v_i(\xi) = \sigma_i \xi^2 + \gamma_i \xi + \omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотрим три случая: 1) функции  $v_i(\xi)$  не зависят от координаты  $\xi$ , т.е.  $\sigma_i = \gamma_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; 2)  $v_i(\xi)$  являются линейными функциями координаты  $\xi$ , т.е.  $\sigma_i = 0$ ,  $\gamma_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; 3)  $v_i(\xi)$  являются квадратичными функциями  $\xi$ , т.е.  $\sigma_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Тогда величины  $\varphi_i(\xi)$ , определяемые формулой (26), будут соответственно иметь вид:

$$1) \quad \varphi_i(\xi) = \frac{1}{\omega_i} \left( \frac{1}{\xi_{i-1}} - \frac{1}{\xi} \right); \quad (29)$$

2) если  $\omega_i = 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{1}{2\gamma_i} \left( \frac{1}{\xi_{i-1}^2} - \frac{1}{\xi^2} \right); \quad (30)$$

если  $\omega_i \neq 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{1}{\omega_i} \left( \frac{1}{\xi_{i-1}} - \frac{1}{\xi} \right) + \frac{\gamma_i}{\omega_i^2} \ln \frac{(\gamma_i \xi + \omega_i) \xi_{i-1}}{(\gamma_i \xi_{i-1} + \omega_i) \xi}; \quad (31)$$

3) если  $\gamma_i = 0$ ,  $\omega_i = 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{1}{3\sigma_i} \left( \frac{1}{\xi_{i-1}^3} - \frac{1}{\xi^3} \right); \quad (32)$$

если  $d_i = \gamma_i^2 - 4\sigma_i\omega_i = 0$ ,  $\gamma_i \neq 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{16\sigma_i^2}{\gamma_i^3} \ln \frac{(2\sigma_i\xi + \gamma_i)\xi_{i-1}}{(2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i)\xi} + \frac{4\sigma_i(\xi - \xi_{i-1})}{\gamma_i^2} \left[ \frac{4\sigma_i^2}{(2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i)(2\sigma_i\xi + \gamma_i)} + \frac{1}{\xi_{i-1}\xi} \right]; \quad (33)$$

если  $d_i > 0$ ,  $\omega_i = 0$ , то

$$\varphi_i(\xi) = \frac{\sigma_i^2}{\gamma_i^3} \ln \frac{(\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i)\xi}{(\sigma_i\xi + \gamma_i)\xi_{i-1}} + \frac{\sigma_i(\xi_{i-1} - \xi)}{\gamma_i^2\xi_{i-1}\xi} + \frac{\xi^2 - \xi_{i-1}^2}{2\gamma_i\xi_{i-1}^2\xi^2}; \quad (34)$$

если  $d_i > 0$ ,  $\omega_i \neq 0$ , то

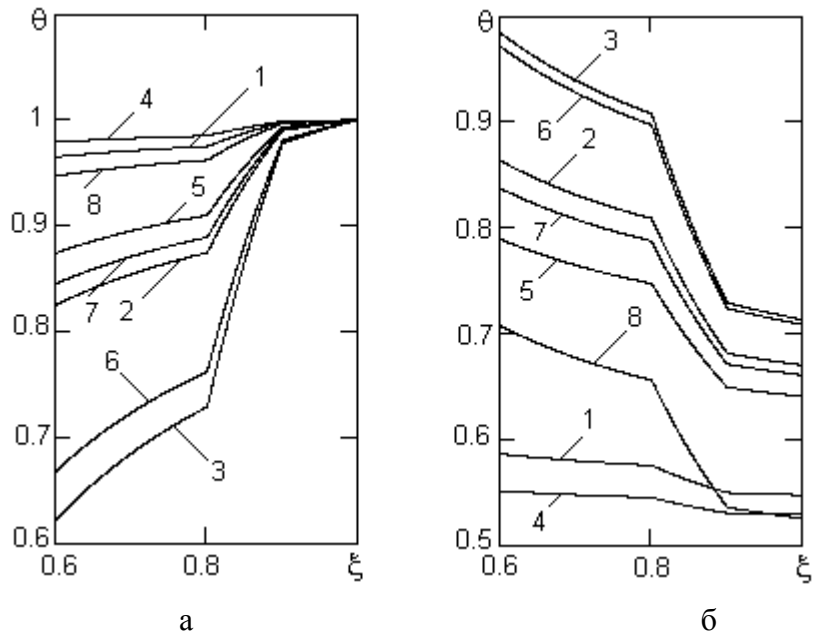
$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi) = & \frac{\gamma_i}{\omega_i^2} \ln \frac{\xi_{i-1}}{\xi} + \frac{\xi - \xi_{i-1}}{\omega_i\xi_{i-1}\xi} + \frac{4\sigma_i^2}{\sqrt{d_i}(\sqrt{d_i} - \gamma_i)^2} \ln \frac{2\sigma_i\xi + \gamma_i - \sqrt{d_i}}{2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i - \sqrt{d_i}} + \\ & + \frac{4\sigma_i^2}{\sqrt{d_i}(\sqrt{d_i} + \gamma_i)^2} \ln \frac{2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i + \sqrt{d_i}}{2\sigma_i\xi + \gamma_i + \sqrt{d_i}}; \end{aligned} \quad (35)$$

если  $d_i < 0$ , то

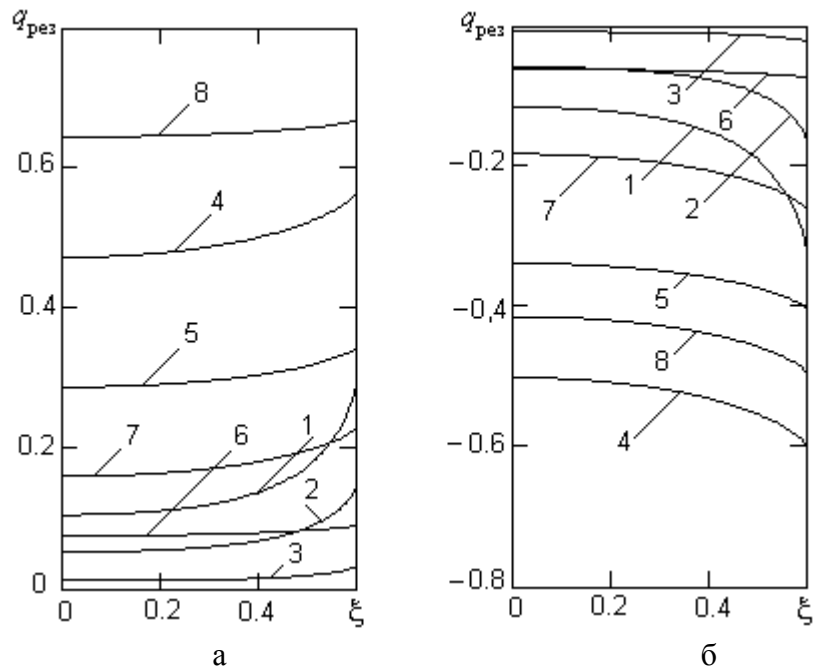
$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi) = & \frac{\gamma_i}{\omega_i^2} \ln \frac{\xi_{i-1}}{\xi} + \frac{\xi - \xi_{i-1}}{\omega_i\xi_{i-1}\xi} + \frac{1}{2\omega_i^2} \left[ \gamma_i \ln \frac{\sigma_i\xi^2 + \gamma_i\xi + \omega_i}{\sigma_i\xi_{i-1}^2 + \gamma_i\xi_{i-1} + \omega_i} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_i^2 + d_i}{\sqrt{-d_i}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_i\xi + \gamma_i}{\sqrt{-d_i}} - \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_i\xi_{i-1} + \gamma_i}{\sqrt{-d_i}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

На основании полученных расчетных формул и выражений были выполнены численные исследования стационарных распределений температур в трехслойном сферическом теле  $V$ , а также распределений значений плотности объемного результирующего излучения в ослабляющей среде, заполняющей пространство  $V_0$ . При проведении расчетов полагали:  $\xi_0 = 0.6$ ,  $\xi_1 = 0.8$ ,  $\xi_2 = 0.9$ ,  $\xi_3 = 1$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\gamma_1 = -0.6$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = -0.1$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\omega_2 = -0.2$ ,  $\sigma_3 = 0.1$ ,  $\gamma_3 = 0.5$ ,  $\omega_3 = 0.8$ ,  $A_0 = 0.5$ ,  $m = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.001$ . Для первой постановки задачи принимали  $\theta_0 = 0.5$ ,  $\theta_n = 1$ , а для второй постановки полагали  $\theta_0 = 1$ ,  $\theta_s = 0.5$ .

Полученные результаты представлены в виде соответствующих графических зависимостей на рис.2 и 3. На рис.2 изображены графические зависимости от координаты точки  $\xi$  температуры  $\theta(\xi)$  тела  $V : \theta(\xi) = \theta_i(\xi), \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, i = 1, 2, 3$ ; на рис.3 изображены графические зависимости от  $\xi$  плотности объемного результирующего излучения  $q_{рез}(\xi), 0 \leq \xi < \xi_0$ .



**Рис.2.** Распределения температур в трехслойном сферическом теле:  
 а – первая постановка задачи; б – вторая постановка задачи



**Рис.3.** Распределения значений плотности объемного результирующего излучения:  
 а – первая постановка задачи; б – вторая постановка задачи

Представленные на рисунках 2, 3 графики соответствуют следующим значениям параметров системы  $N_0$ ,  $N_n$ ,  $p = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ , числа Бугера  $Bu = (\alpha + \beta)r_n$ :

- 1)  $N_0 = 0.1$ ,  $N_n = 1$  (для второй постановки задачи),  $Bu = 5$ ,  $p = 0.5$ ;
- 2)  $N_0 = 1$ ,  $N_n = 1$ ,  $Bu = 5$ ,  $p = 0.5$ ;
- 3)  $N_0 = 10$ ,  $N_n = 1$ ,  $Bu = 5$ ,  $p = 0.5$ ;
- 4)  $N_0 = 0.1$ ,  $N_n = 1$ ,  $Bu = 1$ ,  $p = 0.5$ ;
- 5)  $N_0 = 1$ ,  $N_n = 1$ ,  $Bu = 1$ ,  $p = 0.5$ ;
- 6)  $N_0 = 10$ ,  $N_n = 1$ ,  $Bu = 1$ ,  $p = 0.5$ ;
- 7)  $N_0 = 1$ ,  $N_n = 1$ ,  $Bu = 1$ ,  $p = 0$ ;
- 8)  $N_0 = 1$ ,  $Bu = 1$ ,  $p = 0.9$  - для первой постановки задачи;  
 $N_0 = 1$ ,  $N_n = 10$ ,  $Bu = 1$ ,  $p = 0.5$  - для второй постановки задачи.

Для указанных исходных данных также были получены следующие значения полусферических плотностей результирующего излучения  $\zeta_{рез.0}$  и  $\zeta_{рез.n}$  на поверхностях  $F_0$  и  $F_n$ :

- для первой постановки задачи:

- 1)  $\zeta_{рез.0} = -0.07$ ; 2)  $\zeta_{рез.0} = -0.347$ ; 3)  $\zeta_{рез.0} = -0.756$ ; 4)  $\zeta_{рез.0} = -0.041$ ; 5)  $\zeta_{рез.0} = -0.252$ ;
- 6)  $\zeta_{рез.0} = -0.661$ ; 7)  $\zeta_{рез.0} = -0.31$ ; 8)  $\zeta_{рез.0} = -0.105$ ;

- для второй постановки задачи:

- 1)  $\zeta_{рез.0} = 0.076$ ,  $\zeta_{рез.n} = -0.028$ ; 2)  $\zeta_{рез.0} = 0.386$ ,  $\zeta_{рез.n} = -0.139$ ; 3)  $\zeta_{рез.0} = 0.541$ ,  $\zeta_{рез.n} = -0.195$ ;
- 4)  $\zeta_{рез.0} = 0.044$ ,  $\zeta_{рез.n} = -0.016$ ; 5)  $\zeta_{рез.0} = 0.296$ ,  $\zeta_{рез.n} = -0.107$ ; 6)  $\zeta_{рез.0} = 0.538$ ,  $\zeta_{рез.n} = -0.189$ ;
- 7)  $\zeta_{рез.0} = 0.353$ ,  $\zeta_{рез.n} = -0.127$ ; 8)  $\zeta_{рез.0} = 0.363$ ,  $\zeta_{рез.n} = -0.131$ .

**Выводы.** В работе дано применение метода последовательных двусторонних приближений и обобщенного зонального метода к численному моделированию стационарной задачи о радиационно-кондуктивном теплообмене в многослойной сферической системе, заполненной поглощающей и рассеивающей средой с заданной температурой. Рассмотрены две постановки задачи, различающиеся между собой типами граничных условий, заданных на внешней границе системы.

На основании полученных расчетных формул и выражений выполнены численные исследования стационарных полей температур в трехслойном сферическом теле и поля значений плотности объемного результирующего излучения в ослабляющей среде, заполняющей систему. Кроме того, найдены значения полусферической плотности результирующего излучения на поверхностях, ограничивающих рассматриваемое сферическое тело. Результаты исследований представлены в виде соответствующих графических зависимостей.

Изложенный подход, а также полученные результаты могут найти применение при решении задач радиационно-кондуктивного теплообмена в различных системах теплофизического, теплоэнергетического и теплотехнического назначения. В частности, представленный материал может быть использован в строительной теплотехнике для расчета тепловой изоляции проектируемых зданий и сооружений.

### Список литературы

1. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир. 1975. 934 с.
2. Рубцов В.В. Стационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в системе из двух теплопроводных концентрических сферических тел, разделенных ослабляющей средой // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2009. №3. С.42-46.

3. Суринов Ю.А. Обобщенный зональный метод исследования и расчета лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. 1975. №4. С.112-137.
4. Суринов Ю.А. О некоторых вопросах стохастической теории переноса излучения и радиационного теплообмена // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 1992. №5. С.76-81.
5. Рубцов В.В., Суринов Ю.А. О методах решения нестационарных задач теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1989. Т.29. №11. С.1705-1713.