

УДК 534.1

РАСЩЕПЛЕНИЕ СОЛИТОНОВ ДЕФОРМАЦИИ В СТЕРЖНЕ ПРИ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

© Владимир Иванович Ерофеев, Владимир Владимирович Кажаяев

Институт проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород

erf04@sinn.ru

Аннотация. Проведено численное исследование взаимодействия сильно нелинейных солитоноподобных волн деформации в стержне. В частности, продемонстрированы эффекты расщепления сверхзвуковых уединенных волн.

Ключевые слова: стержень, солитон деформации, взаимодействие, расщепление.

Уравнение, описывающее продольные волны в стержне круглого сечения в безразмерных переменных имеет вид [1]:

$$U_{tt} - (1 + U_x)U_{xx} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(U_{tt} - c^2 U_{xx}) = 0, \quad (1)$$

где U – безразмерное перемещение частиц срединной линии; $c^2 < 1$. Эта математическая модель относится к классу неинтегрируемых систем.

Математические модели, описывающие распространение и взаимодействие нелинейных волн в распределенных системах, принято подразделять на интегрируемые методом обратной задачи рассеяния и неинтегрируемые этим методом [2]. На сленге специалистов упомянутые модели называются «интегрируемыми системами» и «неинтегрируемыми системами».

Во многих работах (см. например, [2,3]) аналитически и численно было показано, что в интегрируемых системах локализованные волны (солитоны) ведут себя подобно частицам: при столкновении они сохраняют свою индивидуальность и приобретают лишь сдвиг фаз («упругое» взаимодействие). Это было подтверждено экспериментами с нелинейными волнами в плазме, в жидкости с пузырьками газа, а также с электромагнитными волнами [4,5].

Для неинтегрируемых систем, наряду с «упругим», характерен и другой сценарий взаимодействия локализованных волн. При обгонном взаимодействии солитоноподобные волны излучают часть своей энергии в виде квазилинейных волновых пакетов («неупругое» взаимодействие) [6].

В настоящее время отсутствуют какие-либо регулярные методы получения аналитических решений, описывающих как обгонное, так и встречное взаимодействие солитоноподобных волн, поэтому в предлагаемой работе приводятся результаты только численного моделирования. Процессы взаимодействия при встречном столкновении, строго говоря, не могут быть описаны эволюционными уравнениями одноволнового приближения [7] и нужно привлекать полные уравнения нелинейной динамики, учитывающие волны, движущиеся в обоих направлениях. Такие уравнения, как правило, неинтегрируемые и их решения описывают уединенные волны, не являющиеся солитонами в строгом математическом смысле [2], однако для простоты мы будем называть их так же солитонами.

Уравнение (1) имеет солитоноподобное (уединенная стационарная волна) решение:

$$U(x,t) = A \operatorname{th} \left(\frac{x - vt}{\Delta} \right) \quad (2)$$

описывающее как дозвуковые $v^2 < c^2 < 1$, так и сверхзвуковые $v^2 > 1$ солитоны, их амплитуда и ширина могут быть выражены через скорость:

$$A = 6\sqrt{(v^2 - c^2)(v^2 - 1)} \quad , \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{v^2 - c^2}{v^2 - 1}} \quad (3)$$

Плотность энергии волнового процесса имеет вид:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}U(x,t)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x,t)\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x,t)\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}U(x,t)\right)^2 + \frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,t)\right)^2, \quad (4)$$

подстановка (2) в (4) и интегрирование дает зависимость энергии солитона от его скорости, графики которой приведены на Рис.1 для дозвуковых солитонов Рис.1а и для сверхзвуковых Рис.1б, здесь и далее все расчеты выполнены при $c^2 = 0,9$.

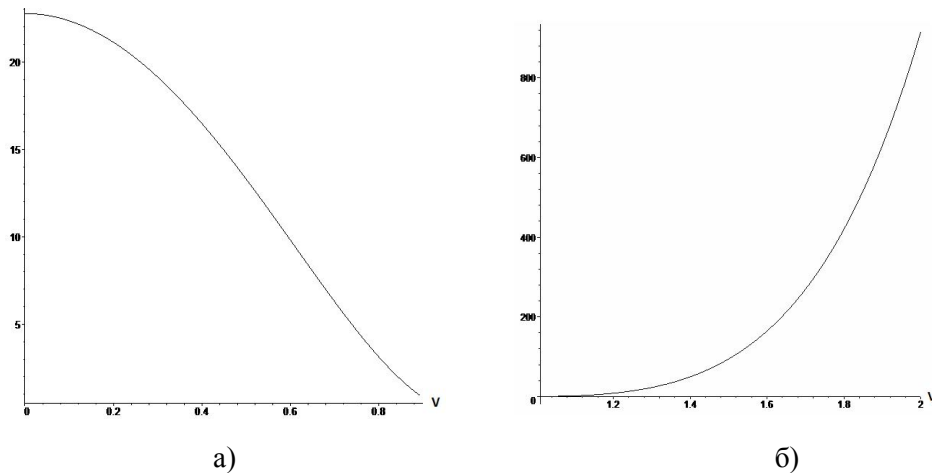


Рис. 1

В неинтегрируемых системах столкновение солитонов носит, так называемый, неупругий характер, т.е. после столкновения образуются вторичные (или дочерние) солитоны меньшей энергии, а остаток энергии реализуется в некоторый волновой процесс или, если энергии достаточно, то могут формироваться дополнительные вторичные солитоны. В нашем случае процессы взаимодействия солитонов наиболее эффектно выглядят для солитонов деформации, которые могут быть получены из (2) простым дифференцированием:

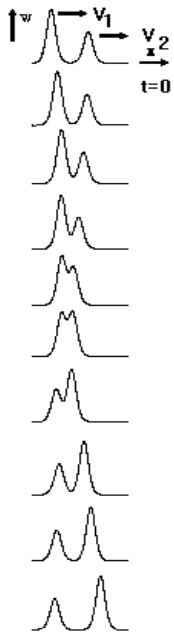
$$W(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}U(x,t) = \frac{3(v^2 - 1)}{ch^2\left(\frac{x - vt}{\Delta}\right)}, \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{v^2 - c^2}{v^2 - 1}} \quad (5)$$

Так же дифференцированием (1) с учетом (5) получаем уравнение для солитонов деформации:

$$W_{tt} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(W + \frac{1}{2} W^2 \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (W_{tt} - c^2 W_{xx}) = 0, \quad (6)$$

Решения (1) и (6) с учетом (5) полностью совпадают. При этом, дозвуковые солитоны деформации имеют отрицательную полярность, а сверхзвуковые положительную.

Качественно различные сценарии взаимодействия солитонов зависят от относительной скорости столкновения, далее мы будем рассматривать столкновение только сверхзвуковых солитонов, т.к. для них можно реализовать любые скорости столкновения. При малой скорости столкновение происходит подобно обменному взаимодействию



классических солитонов Кортевега – де Вриза. Быстрый солитон догоняет медленный, не сливаясь они, как бы, обмениваются характеристиками и далее продолжают движение в соответствии с вновь полученными скоростями, при чем вторичные солитоны полностью идентичны первичным (Рис.2).

Расчеты для Рис.2 произведены при $v_1^2 = 1,2$ $v_2^2 = 1,1$ относительная скорость столкновения $\Delta v = v_1 - v_2 = 0,0466$. За время взаимодействия солитоны успевают пройти очень большее расстояние по отношению к их ширине Δ , из за чего изобразить весь процесс целиком в одном пространственном масштабе не представляется возможным. Рисунок выполнен с помощью следящего окна, поэтому на нем нельзя видеть сдвига фаз, полученный солитонами при взаимодействии, этот эффект хорошо известен и, в данном случае, интереса не представляет. Здесь хотелось бы подчеркнуть тот факт, что даже в неинтегрируемых системах возможно упругое столкновение солитонов, хотя бы с точностью до ошибок численного эксперимента. Так же заметим, что известное аналитическое двухсолитонное решение KdV здесь не применимо.

Рис. 2

При большей относительной скорости $\Delta v = 0,1$ столкновение солитонов уже носит неупругий характер (Рис.3). При взаимодействии солитоны теряют часть своей энергии, которая реализуется в пакет квазигармонических волн, движущийся за самым медленным сверхзвуковым солитоном со скоростью линейных волн. Характеристики вторичных солитонов полностью совпадают с решением (5) или (2). На Рис.3 пакет квазилинейных волн в увеличенном масштабе показан в кружочке.

Дальнейшее увеличение скорости столкновения $\Delta v = 0,4$ (Рис.4) приводит к тому, что быстрый солитон, догнав медленный, сливается с ним. Амплитуда такого слияния оказывается меньше алгебраической суммы амплитуд взаимодействующих солитонов. Затем солитоны расходятся, потеряв часть энергии, которая реализуется в два волновых пакета, один из которых распространяется в сторону, противоположную направлению движения солитонов со скоростью квазилинейных волн (в увеличенном масштабе показан в кружочке Рис.4), а другой с той же скоростью догоняет сверхзвуковые солитоны (он в увеличенном масштабе показан в квадратной рамочке).

Большие скорости столкновения $\Delta v \geq 0,5$ приводят к эффекту «расщепления солитонов», под которым мы понимаем образование большего количества вторичных солитонов, чем вступивших во взаимодействие. На Рис.5 показан процесс расщепления при столкновении солитонов со скоростями $v_1 = 3$ $v_2 = 1,5$. В этом случае амплитуды, участвующих в процессе солитонов, различаются почти на два порядка, по этому для удобства визуального восприятия (Рис.5) выполнен в логарифмическом масштабе. Из

рисунка видно: высокоскоростной солитон, обогнав медленный, быстро удаляется из зоны взаимодействия, при этом возникает волновой пакет, распространяющийся в сторону, противоположную направлению движению солитонов. В увеличенном масштабе он показан в левом кружочке, ниже его эволюция. Далее выделяется второй солитон, за которым распространяется нестационарный волновой пакет (правый кружочек), его эволюция показана ниже. Из него образуется еще один сверхзвуковой солитон, далее опять квазилинейный волновой пакет и медленный (дозвуковой) солитон отрицательной полярности. Все характеристики вторичных солитонов полностью совпадают с решением (2) или (5).

Взаимодействие солитонов при очень больших скоростях $\Delta v > 2$ наиболее эффектно выглядит при встречном столкновении одинаковых солитонов, при этом картина полностью симметрична и область взаимодействия остается в центре как показано на Рис.6. Из-за симметрии достаточно рассмотреть только одну половину рисунка.

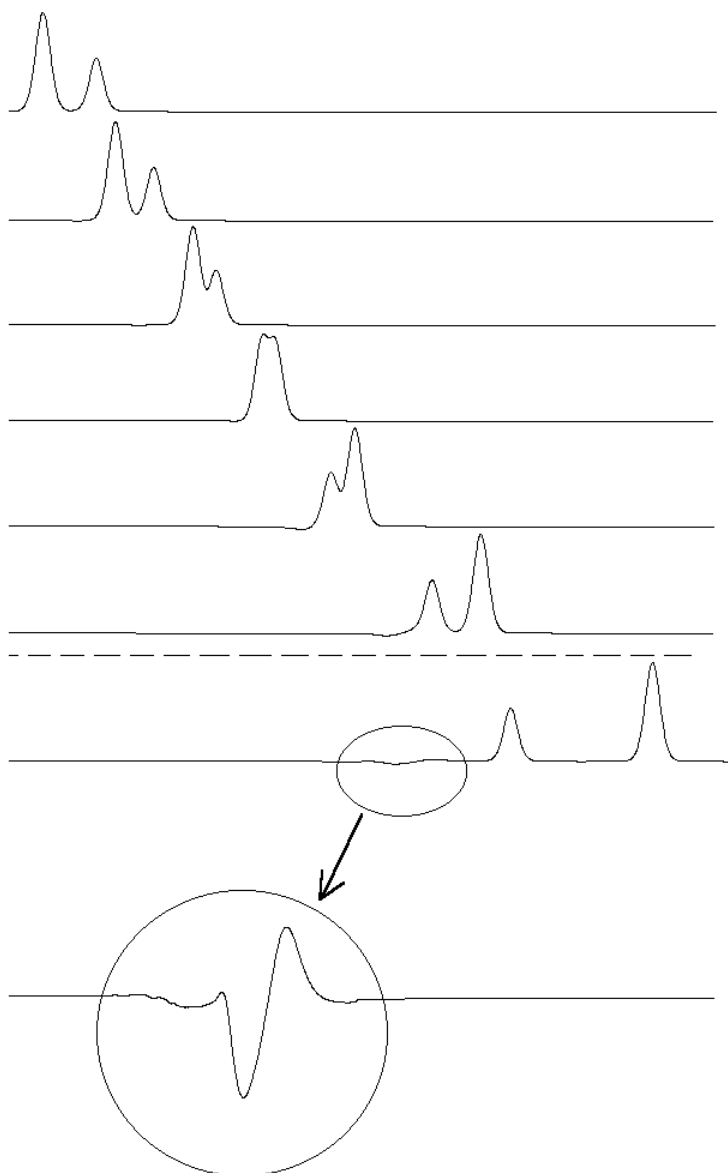


Рис.3

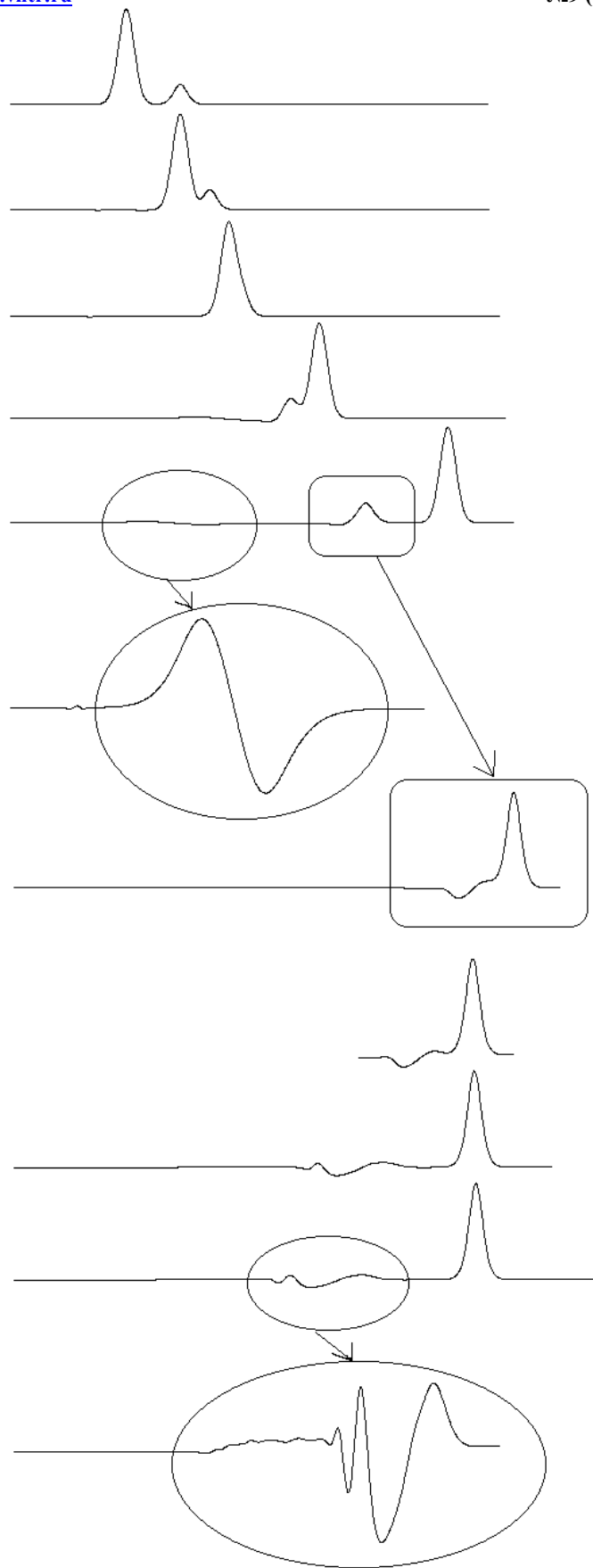


Рис.4

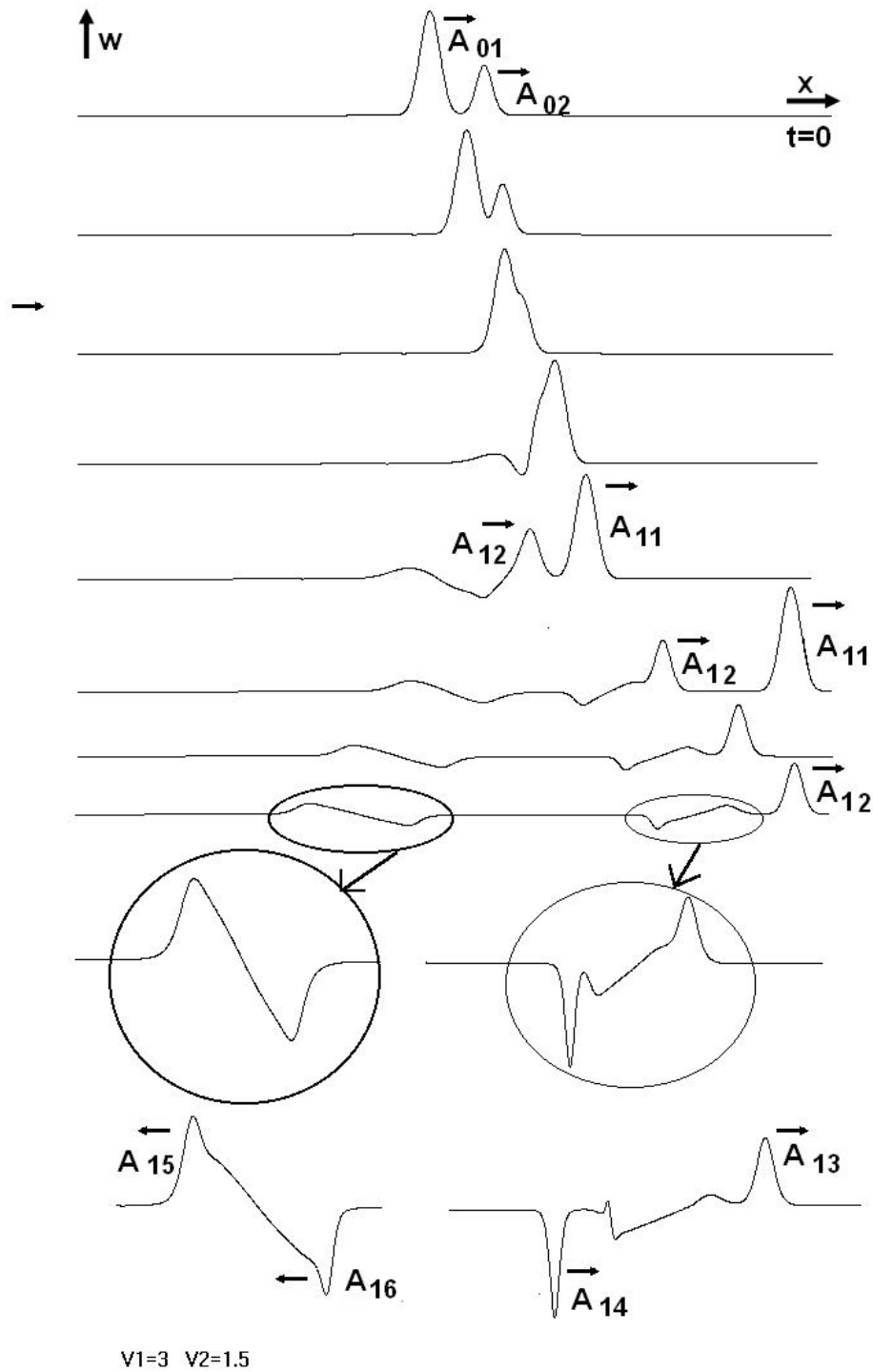


Рис.5

После столкновения выделяется высокоскоростной вторичный солитон амплитуды A_{11} не на много меньше первичной A_0 . За ним образуется второй вторичный солитон, амплитуда которого A_{12} много меньше. Далее нелинейный волновой пакет, в увеличенном масштабе он показан в кружочке, можно заметить, что из этого пакета могут в дальнейшем сформироваться еще солитоны, но это требует большего времени наблюдения,

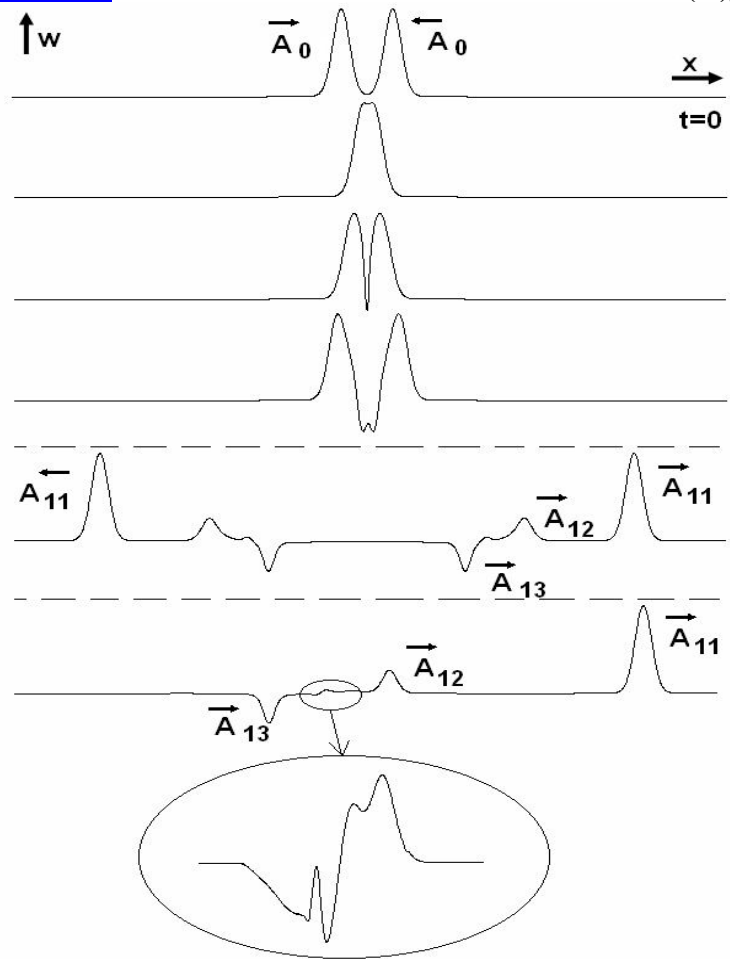


Рис. 6

и завершает картину медленный дозвуковой солитон, амплитуда которого A_{13} почти равна A_{12} . Вообще говоря, из волнового пакета может образоваться сколько угодно сверхзвуковых солитонов, так как их амплитуда и энергия может быть практически нулевой.

Отдельный интерес представляет взаимодействие солитонов с границей. В качестве граничного закрепления для волн смещения (уравнение (2)) выбрана идеальная свободная граница:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} U(x, t) \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) \right|_{x=0} = 0, \quad (7)$$

для волн деформации (6) это будет соответствовать «шарнирному» закреплению:

$$W(x, t) \Big|_{x=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x} W(x, t) \right|_{x=0} = 0. \quad (8)$$

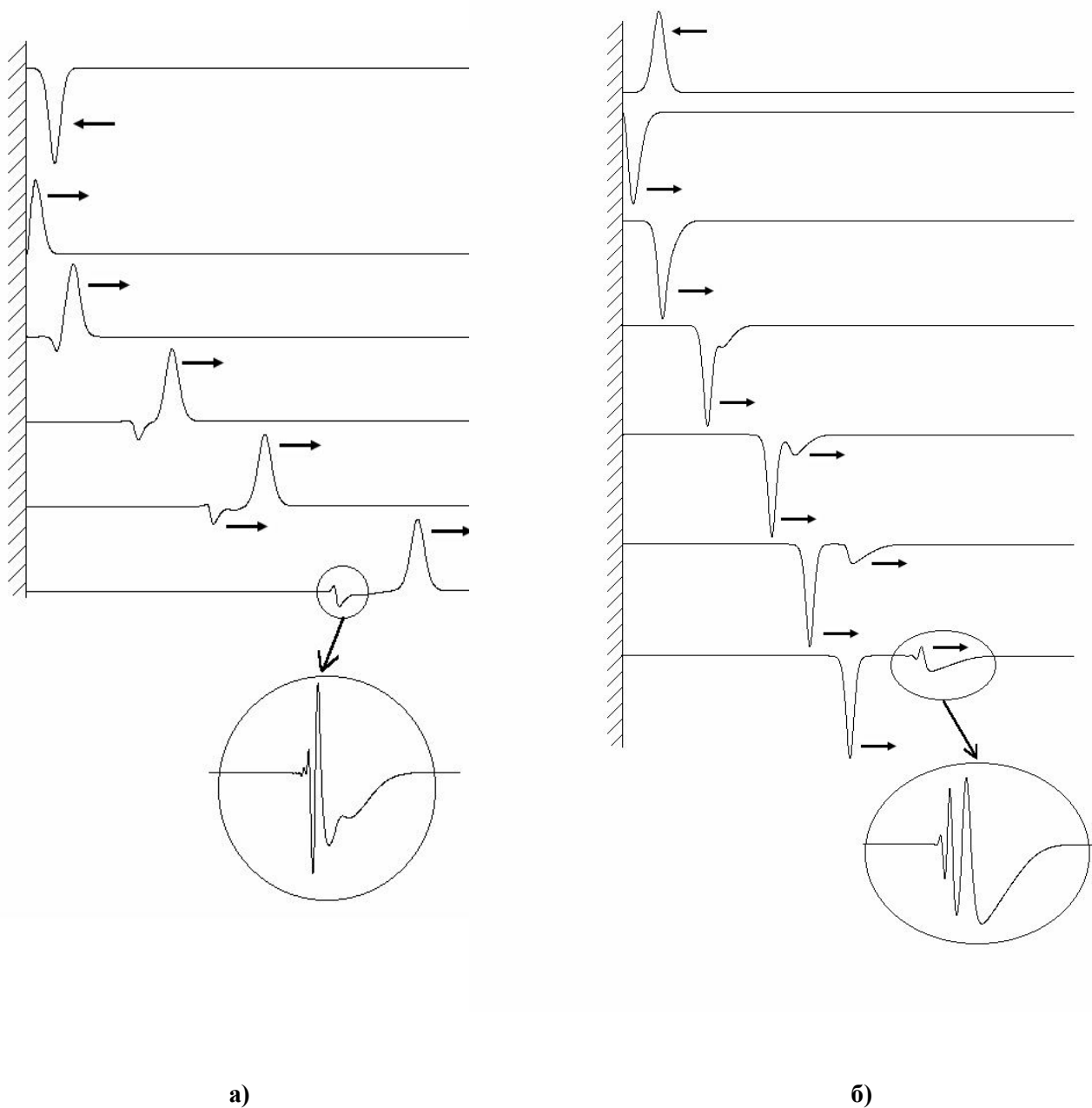


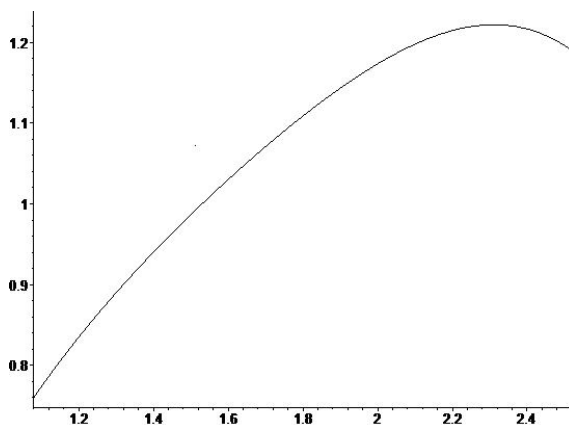
Рис. 7

При взаимодействии с границей солитон меняет полярность, точнее вторичный (отраженный) солитон имеет обратную полярность по отношению к первичному, энергия которого меньше начальной, а избыток энергии реализуется в виде волнового пакета, распространяющегося со скоростью линейных волн.

Так если на границу падает дозвуковой солитон (у него отрицательная полярность) (Рис. 7а), отражается сверхзвуковой солитон, за которым следует пакет квазилинейных волн, показанный в увеличенном масштабе в кружочке. Взаимодействие сверхзвукового солитона (у него положительная полярность) с границей (Рис. 7б) порождает отраженный волновой пакет, за которым следует дозвуковой солитон. Зависимость амплитуды вторичного сверхзвукового солитона от амплитуды первичного дозвукового солитона показана на Рис. 8а. На Рис. 8б показана зависимость амплитуды вторичного дозвукового солитона от амплитуды первичного сверхзвукового солитона. Из сравнения Рис. 8а и 8б можно

предположить, что приведенные зависимости взаимно обратны, однако это утверждение требует более тщательной проверки.

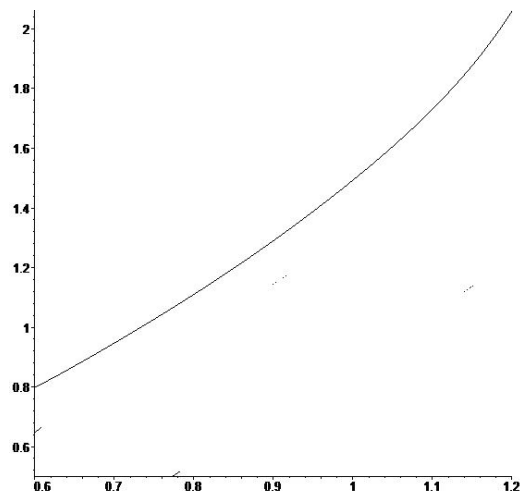
Амплитуда вторичного сверхзвукового солитона



Амплитуда первичного дозвукового солитона

а)

Амплитуда вторичного дозвукового солитона



Амплитуда первичного сверхзвукового солитона

б)

Рис. 8

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(гранты № 12-08-00888, № 12-08-90032-Бел, № 13-08-97103-р_поволжье)

Список литературы

1. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т.48. № 6. С.725-740.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
3. Скотт Э., Чу Ф., Маклафлин Д. Солитон – новое понятие в прикладных науках // Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио. 1977. С. 215-284.
4. Островский Л.А., Папко В.В., Пелиновский Е.Н. Уединенные электромагнитные волны в нелинейных линиях передачи // Известия вузов. Радиофизика, 1972. Т.15. №4. С.580-591.
5. Лонгрэн К. Экспериментальные исследования солитонов в нелинейных линиях передачи с дисперсией // Солитоны в действии / под.ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир. 1981. С.138-162.
6. Abdullow Kh.O., Bogoloubsku I.L. and Makhankov V.G. One more example of inelastic soliton interaction // Phys. Lett. A. 1976. Vol.56. P.427-428.
7. Engelbrecht J.K., Fridman V.E., Pelinovsky E.N. Nonlinear Evolution Equations. Pitman, London. 1988.