

УДК 621

## ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЙ ВИБРАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯМИ

© Александр Евгеньевич Божко<sup>1</sup>, Виталий Львович Крупенин<sup>2</sup>,  
Константин Борисович Мягкохлеб<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков,  
Украина

[mkb2004@ukr.net](mailto:mkb2004@ukr.net)

<sup>2</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, Москва, Россия

[krupeninster@gmail.com](mailto:krupeninster@gmail.com)

**Аннотация.** Приводятся результаты анализа тяговых усилий и перемещений якоря (платформы) электромагнитного вибровозбудителя (ЭМВ), предназначенного для работы в качестве испытательного вибростенда, воспроизводящего полигармонические вибрации. Показано, что в ряде принципиальных схем ЭМВ на выходе в тяговом усилии возникает ряд дополнительных гармонических составляющих. Представлен вариант ЭМВ, в котором дополнительные гармоники в тяговом усилии и перемещении якоря отсутствуют.

**Ключевые слова.** Тяговые усилия, электромагнитный вибровозбудитель, испытательный вибростенд, полигармоническая вибрация.

## PLAYBACK OF POLYHARMONIC VIBRATION ELECTROMAGNETICALLY VIBRATION EXCITER

A.Bozhko, V.Krupenin, K. Myagkokhlib

The A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of  
Sciences of Ukraine (IPMash NAS of Ukraine)

Federal budget - funded research Institute of Machines Science named after A.A.Blagonravov of  
the Russian Academy of Science

**Abstract.** The outcomes of the analysis of tractive powers and transitions are reduced. Armatures (platform) of an electromagnetic agent of vibrations (EMV), intended for job as a test vibration table reproducing polyharmonic vibrations. Is shown, that in a series(line) of key diagrams EMV there is on an exit in a tractive power a series(line) of additional wave constituents. The variant EMV is submitted, in which the additional harmonics in a tractive power and transition of an armature miss.

**Keywords.** Tractive powers, electromagnetic agent of vibrations, test vibration table, polyharmonic vibrations.

В эксплуатационных условиях машины, устройства, конструкции часто подвергаются одновременному действию нескольких вибрационных нагрузок (полигармонических), отличающихся по амплитуде и частоте. При этом, усталостная прочность объектов, подвергающихся полигармоническим вибрационным нагрузкам ниже, чем при действии моногармонических вибраций. Для гарантированной работы данных объектов в указанных условиях эксплуатации необходимо на стадии их проектирования осуществлять испытания на полигармоническую вибрацию. Такие испытания должны проводиться на специальных вибрационных стендах, воспроизводящих полигармонические вибрации. К таким стендам могут относиться электромагнитные (ЭМВ) [1]. Однако для их создания не обходимо разработать принципиальные особенности воспроизведения полигармонических вибраций.

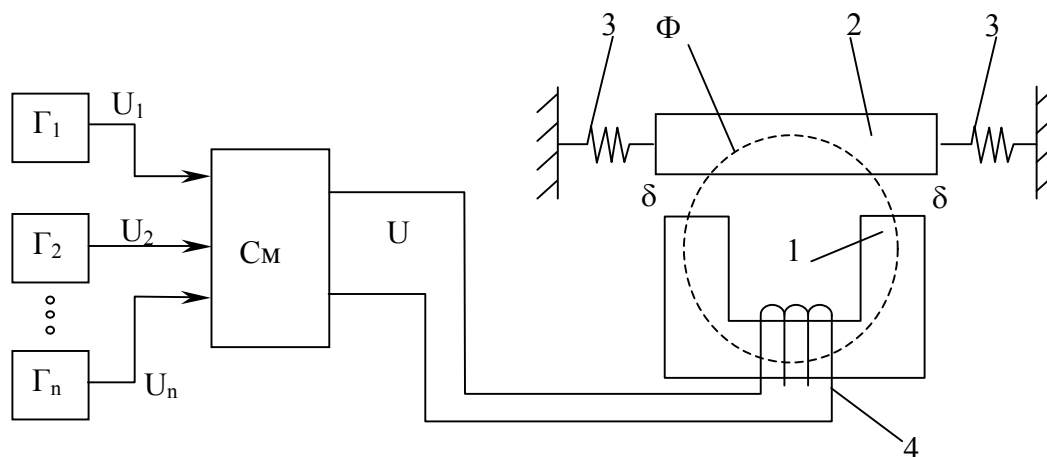


Рис. 1. Структурно—механическая схема ЭМВ, соответствующая принципу 1.

Изложим в этой статье возможные основные принципы и осуществим их сравнение.

Принцип 1. (см. рис. 1).

Моногармонические сигналы  $U_1, U_2, \dots, U_n$  от нескольких генераторов подаются на вход сумматора  $См$ , в котором осуществляется сложение моногармоник; выходное напряжение сумматора

$$U = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n U_{ak} \sin(\omega_k t \pm \varphi_k),$$

где  $U_{ak}, \omega_k, \varphi_k$  - амплитуда, круговая частота ( $\omega_k = 2\pi f_k, f_k$  - частота), угол сдвига  $k$ -й гармоники соответственно,  $t$  - время.

На рис. 1 изображен электромагнитный вибровозбудитель, имеющий магнитопровод 1, якорь 2, пружины 3, обмотку 4, на зажимы которой прикладывается напряжение  $U$ . Между якорем 2 и полюсами магнитопровода 1 имеется два воздушных зазора  $\delta$ . Якорь 2 является подвижной системой, то есть платформой испытательного стенда, на которой крепятся испытываемые объекты. С точки зрения испытания объектов важно иметь представление о формировании вибраций на платформе 2.

Для этого запишем уравнение движения платформы в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F,$$

где  $x$  — перемещение платформы (колебания);  $m$  — масса платформы совместно с испытываемым изделием;  $b, c$  — коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно,  $F$  — тяговое усилие, создаваемое ЭМВ под действием напряжения  $U$ .

Если тяговое усилие представляет собой полигармоническую зависимость

$$F = \sum_{k=1}^n F_{ak} \cos \omega_{kя} t, \text{ то вследствие принципа суперпозиции установившееся значение}$$

перемещения  $x$  также будет полигармоническим, то есть  $x(t) = \sum_{k=1}^n x_{ak} \cos(\omega_{kя} t - \varphi_{kя})$ . В

этих соотношениях  $F_{ak} x_{ak}$  — амплитуды тягового усилия и перемещения;  $\varphi_{kя}$  — угол сдвига  $k$ -й гармоники;  $\omega_{кя}$  — круговая частота гармонического колебания якоря. В дальнейшем будет показано, что  $\omega_k \neq \omega_{кя}$ .

Величины  $x_{ak}, \varphi_{кя}$  определяются соотношением [2]

$$\left. \begin{aligned} x_{ak} &= \frac{F_{ak}}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{кя}^2)^2 + 4h^2\omega_{кя}^2}}, k = \overline{1, n} \\ \varphi_k &= \operatorname{arctg} \frac{2h\omega_{кя}}{\omega_0^2 - \omega_{кя}^2} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $h = \frac{b}{2m}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ .

Как видно из выражения (1) амплитуды  $x_{ak}$ ,  $k = \overline{1, n}$  зависят от величин  $F_{ak}$ . Поэтому рассмотрим процесс формирования в ЭМВ тягового усилия  $F$ .

Известно [3], что величина  $F$  при двух зазорах  $\delta$  определяется соотношением.

$$F = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}, \quad (2)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток, проходящий по цепи: магнитопровод, зазоры  $\delta$  и якорь, создаваемый электрическим током  $i$ , идущим по обмотке 4;  $\mu_0$  — магнитная проницаемость воздуха;  $S$  — площадь поперечного сечения полюсов магнитопровода у воздушных зазоров.

Выразим  $F$  через величины напряжений  $U_k$  и параметров ЭМВ. Для этого воспользуемся законом полного тока [4]

$$iw = \frac{\Phi}{G}, \quad G = \frac{\mu_0 S}{2\delta}, \quad (3)$$

где  $G$  — магнитная проводимость двух зазоров в ЭМВ,  $w$  — число витков обмотки 4 и, зная, что от напряжения  $U$  в обмотке 4 возникает ток

$$i = \frac{U}{z} = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{z_k} = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak} \sin(\omega_k t \pm \varphi_k)}{\sqrt{R^2 + (\omega_k L)^2}},$$

где  $z$  — полное сопротивление обмотки 4 ЭМВ при полигармоническом  $U$ ;  $z_k$  — полное сопротивление обмотки ЭМВ для  $k$ -й гармоники тока  $i_k$ ;  $L$  — индуктивность обмотки;  $R$  — активное сопротивление обмотки. Реально в ЭМВ  $R \ll \omega_k L$ . Поэтому  $z_k \approx \frac{1}{\omega_k L}$ ,  $k = \overline{1, n}$  и

$$i = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \frac{U_{ak} \sin(\omega_k t \pm \varphi_k)}{\omega_k}. \quad (4)$$

Подставляя в (2) выражение (3) и  $\Phi = \sum_{k=1}^n \Phi_k$ ,  $i = \sum_{k=1}^n i_k$ , получим

$$F = \frac{\left( \sum_{k=1}^n \Phi_k \right)^2}{\mu_0 S} = \frac{\left( wG \sum_{k=1}^n i_k \right)^2}{\mu_0 S} = \mu_0 S \left( \frac{w}{2\delta} \sum_{k=1}^n i_k \right)^2 \quad (5)$$

Из (4) видно, что  $i_k = \frac{U_k}{\omega_k L}$ . Подставим это выражение в (5)

$$F = \mu_0 S \left( \frac{w}{2\delta L} \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{\omega_k} \right)^2. \quad (6)$$

Зная, что  $L = w^2 G = w^2 \frac{\mu_0 S}{2\delta}$ , преобразуем(6)

$$F = \frac{1}{\mu_0 w^2 S} \left( \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{\omega_k} \right)^2. \quad (7)$$

Раскроем в (7) знак суммы  $\sum_{k=1}^n$ , то есть (7) представим так:

$$F = a \left( \frac{U_1}{\omega_1} + \frac{U_2}{\omega_2} + \frac{U_3}{\omega_3} + \dots + \frac{U_n}{\omega_n} \right)^2 =$$

$$= a \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{U_k}{\omega_k} \right)^2 + 2 \sum_{\substack{k=1, n; \\ l=2, n; l \neq k}}^{C_n^2} \left( \frac{U_k U_l}{\omega_k \omega_l} \right) \right], \quad (8)$$

где  $a = \frac{1}{\mu_0 w^2 S}$ ;  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$  — число сочетаний из  $n$  по 2.

Далее, подставляя в (8) полные выражения гармоник  $U_k = U_{ak} \sin(\omega_k t \pm \varphi_k)$ ,  $U_l = U_{al} \sin(\omega_l t \pm \varphi_l)$ , получим

$$F = a \left\{ \sum_{k=1}^n \left[ \frac{U_{ak} \sin(\omega_k t \pm \varphi_k)}{\omega_k} \right]^2 + 2 \sum_{\substack{k=1, n; \\ l=2, n; \\ l \neq k}}^{C_n^2} \frac{U_{ak} U_{al} \sin(\omega_k t \pm \varphi_k) \sin(\omega_l t \pm \varphi_l)}{\omega_k \omega_l} \right\} \quad (9)$$

Как видно из выражения (9), тяговое усилие  $F$  в ЭМВ с одной обмоткой при воспроизведении полигармонических сигналов с частотами  $\omega_k, k = \overline{1, n}$ , включает в себе составляющие не только с частотами  $\omega_k, k = \overline{1, n}$ , что видно из первого слагаемого в (9), но и составляющие с другими частотами  $\omega_l, l = \overline{2, n}, l \neq k$ , образованными в соответствии со вторым слагаемым в (9). Определим эти частоты  $\omega_l$ . Для этого воспользуемся элементарными тригонометрическими преобразованиями вида

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В нашем случае с учетом (10)

$$\begin{aligned} \sin(\omega_k t \pm \varphi_k) \cdot \sin(\omega_l t \pm \varphi_l) &= \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\omega_k t \pm \varphi_k - \omega_l t \mp \varphi_l) - \cos(\omega_k t \pm \varphi_k + \omega_l t \pm \varphi_l)] = \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos[(\omega_k - \omega_l)t \pm \varphi_k \mp \varphi_l] - \cos[(\omega_k + \omega_l)t \pm \varphi_k \pm \varphi_l] \} \end{aligned} \quad (11)$$

Выражение (11) является преобразованным соотношением в числителе второго слагаемого (9). Из (11) ясно, что в тяговом усилии  $F$ , описанном выражением (9),

присутствуют гармоники с частотами  $(\omega_k - \omega_l)$  и  $(\omega_k + \omega_l)$ , а на основании первого слагаемого в (9) также присутствуют постоянные составляющие и гармоники с частотами  $2\omega_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Это утверждение является следствием простого тригонометрического преобразования  $2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ . Для упрощения аналитического представления тягового усилия  $F$  в формуле (9) пренебрежем углами сдвига  $\varphi_k$  и  $\varphi_l$ . Тогда выражение (9) принимает вид (с учетом указанного тригонометрического преобразования)

$$F = \frac{1}{\mu_0 w S} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{U_{ak}}{\omega_k} \right)^2 (1 - \cos 2\omega_k t) + \sum_{\substack{k=1, n; \\ l=2, n; \\ k \neq l}}^n \frac{U_{ka} U_{la}}{\omega_k \omega_l} [\cos(\omega_k - \omega_l)t - \cos(\omega_k + \omega_l)t] \right\}. \quad (12)$$

Из соотношения (12) видно, что при  $n$ -гармониках входного сигнала в тяговом усилии число гармоник увеличивается на  $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ , а гармоники с частотами  $\omega_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  преобразовываются в гармоники с частотами  $2\omega_k$  при наличии постоянной составляющей в

виде  $\frac{1}{2\mu_0 w S} \sum_{k=1}^n \left( \frac{U_{ak}}{\omega_k} \right)^2$ .

Подобные составляющие возникают и в перемещении  $x$  платформы ЭМВ под действием тягового усилия  $F$ .

Принцип 2 (см. рис. 2 - обозначения те же, что и на рис. 1).

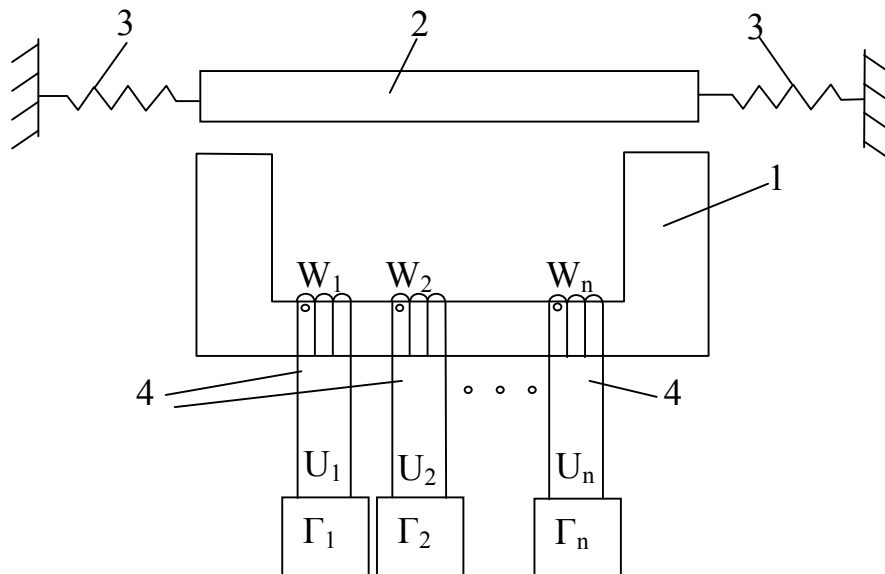


Рис. 2. Структурно-механическая схема ЭМВ, соответствующая принципу 2.

Согласно этому принципу генератор  $k$ -й гармоники подключается на соответствующую  $k$ -ю обмотку ЭМВ. Уравнение электрической цепи  $k$ -й обмотки записывается в виде

$$U_k - \sum_{\substack{l=1 \\ k \neq l}}^n w_k \frac{d\Phi_l}{dt} = i_k R_k + L_k \frac{di_k}{dt}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (13)$$

В уравнении (13) наличие взаимоиндуктивного влияния обмоток ЭМВ определяется выражением  $-\sum_{\substack{l=1 \\ k \neq n}}^n w_k \frac{d\Phi_l}{dt}$ , где  $\Phi_l$  — магнитный поток в магнитопроводе 1, созданный

током  $i_l$  в обмотке с числом витков  $w_l$ . Число уравнений (13) в нашем случае будет  $n$ .

Общий магнитный поток  $\Phi$ , который обуславливает возникновение тягового усилия  $F$  якоря ЭМВ равен сумме магнитных потоков  $\Phi_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то есть

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \Phi_k = \sum_{k=1}^n i_k w_k G.$$

Из (13) с учетом, что  $R \ll \omega_k L_k$ ,  $R \ll \omega_l L_k$  и  $L_k = w_k^2 G$ ;

$$i_k = \frac{U_k}{\omega_k L_k} - \frac{1}{w_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{w_l}{\omega_l} \frac{di_l}{dt}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Ток  $i_l$  определяется выражением

$$i_l = \frac{U_l}{\omega_l L_l} - \frac{1}{w_l} \left( \frac{w_k}{\omega_k} \frac{di_k}{dt} + \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq k \\ m \neq l \\ k \neq l}}^n \frac{w_m}{\omega_m} \frac{di_m}{dt} \right), \quad (15)$$

$l = \overline{1, n};$   
 $l \neq k$

Подставляя (15) в (14), получим уравнение относительно тока  $i_k$  в виде

$$i_k + \frac{1}{w_l} \frac{w_k}{\omega_k} \frac{d^2 i_k}{dt^2} = \frac{U_k}{\omega_k L_k} - \frac{1}{w_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{w_l}{\omega_l} \frac{d}{dt} \left( \frac{U_l}{\omega_l L_l} - \frac{1}{w_l} \sum_{\substack{m=2 \\ m \neq l \\ m \neq k \\ l \neq k}}^n \frac{w_m}{\omega_m} \frac{di_m}{dt} \right), \quad k = \overline{1, n} \quad (16)$$

Из уравнений (16) надо определить токи  $i_k, k = \overline{1, n}$ , но токи  $i_m$ , входящие в (16), зависят от  $i_k$  и  $i_l$ , то есть наблюдается взаимосвязь токов обмоток ЭМВ, возникшие через магнитные потоки, проходящие по одному магнитопроводу 1. Для более четкого уяснения вопроса о числе гармоник в тяговом усилии в данном случае более просто рассмотреть конкретно две гармоники на входе ЭМВ  $U_{a1} \sin \omega_1 t$ ,  $U_{a2} \sin \omega_2 t$  (фазовые углы не учитываем в связи с непринципиальностью их присутствия в конечном результате наших выводов о количестве гармоник, хотя в оценке общей амплитуды перемещения  $x$  они должны учитываться) и две обмотки с числом витков  $w_1$  и  $w_2$ . Для каждой цепи обмоток уравнение (13) запишется так:

$$\left. \begin{aligned} U_1 - w_1 \frac{d\Phi_2}{dt} &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \\ U_2 - w_2 \frac{d\Phi_1}{dt} &= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\} .$$

Как и раньше, учтем, что  $R_1 \ll \omega_1 L_1$ ;  $R_2 \ll \omega_2 L_2$ ;  $\Phi_1 = i_1 w_1 G$ ;  $\Phi_2 = i_2 w_2 G$ ;  $L_k = w_k^2 G$  и воспользуемся выражением (14) для нашего примера

$$i_1 = \frac{U_1}{\omega_1 L_1} - \frac{w_1 G}{L_1} \frac{w_2}{\omega_2} \frac{di_2}{dt} , \quad (17)$$

$$i_2 = \frac{U_2}{\omega_2 L_2} - \frac{w_2 G}{L_2} \frac{w_1}{\omega_1} \frac{di_1}{dt} \quad (18)$$

Подставим (18) в (17)

$$i_1 = \frac{U_1}{\omega_1 L_1} - \frac{w_1 w_2}{L_1 w_2} G \frac{d}{dt} \left( \frac{U_2}{\omega_2 L_2} - \frac{w_2 G w_1}{\omega_1 L_2} \frac{di_1}{dt} \right) . \quad (19)$$

Далее подставим в (19)

$$U_1 = U_{a1} \sin \omega_1 t; \quad U_2 = U_{a2} \sin \omega_2 t .$$

Тогда (19) примет вид

$$i_1 = \frac{U_{a1} \sin \omega_1 t}{\omega_1 L_1} - \frac{w_1 w_2 G}{\omega_2 L_1 L_2} U_{a2} \cos \omega_2 t + \frac{(w_1 w_2 G)^2}{\omega_1 \omega_2 L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} \quad (20)$$

На основании выражения (20) ток  $i_2$  запишем так:

$$i_2 = \frac{U_{a2} \sin \omega_2 t}{\omega_2 L_2} - \frac{w_1 w_2 G}{\omega_1 L_1 L_2} U_{a1} \cos \omega_1 t + \frac{(w_1 w_2 G)^2}{\omega_1 \omega_2 L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} . \quad (21)$$

Анализируя (20) и (21), приходим к выводу, что токи  $i_1$  и  $i_2$  включают в себя по две гармоники с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то есть

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I'_{a1} \sin \omega_1 t + I''_{a1} \sin \omega_2 t \\ i_2 &= I'_{a2} \sin \omega_1 t + I''_{a2} \sin \omega_2 t \end{aligned} \right\} .$$

Магнитные потоки в магнитопроводе 1 от этих токов будут следующими  $\Phi_1 = w_1 G i_1$ ;  $\Phi_2 = w_2 G i_2$ , а общий магнитный поток

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = G(i_1 w_1 + i_2 w_2) = \\ &= G \left[ w_1 (I'_{a1} \sin \omega_1 t + I''_{a1} \sin \omega_2 t) + w_2 (I'_{a2} \sin \omega_1 t + I''_{a2} \sin \omega_2 t) \right] = \\ &= \Phi_{a1} \sin \omega_1 t + \Phi_{a2} \sin \omega_2 t , \end{aligned}$$

где  $\Phi_{a1} = G(w_1 I'_{a1} + w_2 I'_{a2})$ ;  $\Phi_{a2} = G(w_1 I''_{a1} + w_2 I''_{a2})$ ,

Тяговое усилие  $F$  в этом случае будет

$$F = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} = \frac{1}{\mu_0 S} (\Phi_{a1} \sin \omega_1 t + \Phi_{a2} \sin \omega_2 t)^2 . \quad (22)$$

После раскрытия скобок в (22) и использования приведенных тригонометрических преобразований выражение (22) принимает вид

$$F = \frac{1}{\mu_0 S} \left\{ \frac{\Phi_{a1}^2}{2} (1 - \cos 2\omega_1 t) + \frac{\Phi_{a2}^2}{2} (1 - \cos 2\omega_2 t) + \Phi_{a1} \Phi_{a2} [\cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t] \right\} \quad (23)$$

Из выражения (23) видно, что в данном случае, подобно тому, что было в ЭМВ с одной обмоткой (принцип 1), в тяговом усилии присутствуют постоянная составляющая  $\frac{1}{2\mu_0 S} (\Phi_{a1}^2 + \Phi_{a2}^2)$  и четыре гармоники с частотами  $\omega_1, \omega_2, \omega_1 - \omega_2; \omega_1 + \omega_2$ .

Итак, можно сделать вывод, что если число гармоник на входе ЭМВ с несколькими обмотками будет  $n$ , то в тяговом усилии  $F$  будут гармоники с частотами  $\omega_k, k = \overline{1, n}, (\omega_k - \omega_l), (\omega_k + \omega_l), l = \overline{1, n}; l \neq k$ , то есть число гармоник в тяговом усилии в общем случае равно  $n + 2C_n^2 = n^2$ .

Как видно, число гармоник в тяговом усилии  $F$  присутствует в квадрате от числа входных гармоник. Такое же количество гармоник присутствует и в перемещении  $x$  якоря ЭМВ.

Принцип 3 (см. рис.3).

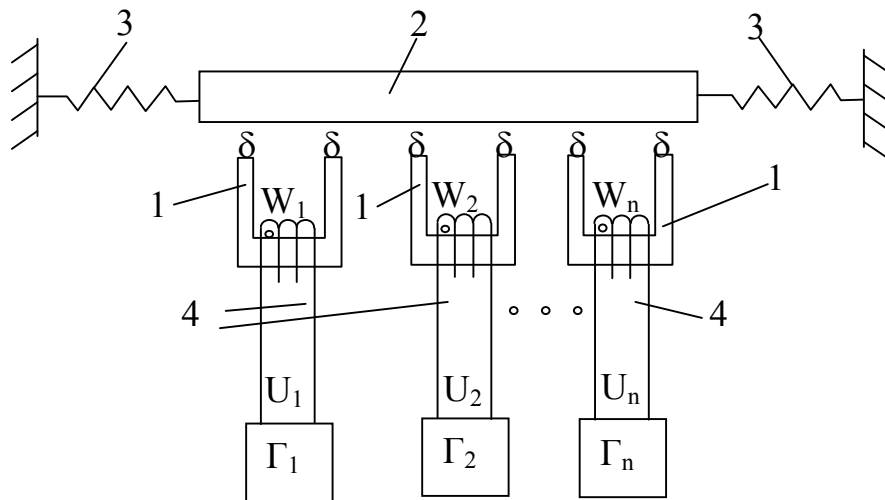


Рис.3. Структурно-механическая схема ЭМВ, соответствующая принципу 3.

По этому принципу вибростенд представляет собой систему, состоящую из нескольких магнитопроводов с обмотками, каждая из которых подключена к одному из генераторов гармонического напряжения  $U_k, k = \overline{1, n}$  и общего якоря 2 (платформа стенда).

Тяговое усилие  $F$  якоря 2 определяется суммой индивидуальных тяговых усилий в виде

$$F = \sum_{k=1}^n F_k = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_k^2}{\mu_0 S_k} \quad (24)$$

Как и ранее,  $\Phi_k = i_k w_k G_k, i_k = \frac{U_k \sin(\omega_k t \pm \varphi_k)}{\omega_k L_k}$ , поэтому



$$F_k = \frac{1}{2\mu_0 S_k} \left( \frac{U_k}{\omega_k w_k} \right)^2 \left[ 1 - \cos(2\omega_k t \pm \varphi'_k) \right],$$

где  $\varphi'_k = \varphi_k - \frac{\pi}{2}$ .

Общее тяговое усилие якоря на основании (24) имеет вид

$$F = \frac{1}{2\mu_0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{S_k} \left( \frac{U_k}{\omega_k w_k} \right)^2 \left[ 1 - \cos(2\omega_k t \pm \varphi_k) \right]. \quad (25)$$

Из (25) видно, что в данном случае в тяговом усилии якоря, а значит, в перемещении якоря присутствует такое же количество гармоник, что и на входе вибростенда, но частоты гармоник тягового усилия и перемещения якоря в два раза выше частот гармоник задающих генераторов  $F_k, k = \overline{1, n}$ . Никаких промежуточных частот в таком варианте вибростенда нет.

Представленные теоретические исследования экспериментально проверялись в Институте проблем машиностроения НАН Украины и нашли свое подтверждение. В эксперименте использовалось несколько звуковых генераторов, двухлучевые осциллографы, анализатор спектра, приборы для измерения напряжения, тока, частоты, ЭМВ, пьезоэлектрические преобразователи, согласующие усилители.

*Статья выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда Фундаментальных Исследований Украины (проект № Ф53.7/038) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 13-08-90419).*

#### Список литературы

1. Божко Е.А., Крупенин В.Л., Мякохлеб К.Б. Математическая модель и структурная схема трехкоординатной системы возбуждения вибраций электромагнитного типа // Интернет-журнал «Вестник научно-технического развития». ([www.vntr.ru](http://www.vntr.ru)). №6 (70), 2013 г. – С. 3-9.
2. Божко А. Е. Динамико-энергетические связи колебательных систем / А. Е. Божко, Н. М. Голуб.- Киев: Наук. думка, 1980.-188 с.
3. Клименко Б. В. Форсированные электромагнитные системы.-М.: Энергоатомиздат, 1989.-160 с.
4. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. - М.: Высшая Школа, 1978.-528 с.