

УДК 539.3:621.891

## О ЖЁСТКОСТИ ТОЧЕЧНОГО УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТА

© Михаил Яковлевич Пановко

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук  
[mpanovko@yandex.ru](mailto:mpanovko@yandex.ru)

**Аннотация.** Представлена методика оценки жёсткости смазанного точечного контакта по результатам численного решения упругогидродинамической (УГД) задачи. Математическая модель УГД контакта описывается системой нелинейных интегродифференциальных уравнений со свободной границей (выходная граница зоны контакта). Вычислительный алгоритм базируется на методе Ньютона. Получены зависимости нагрузки и жёсткости от сближения для УГД контакта. Показано, что в условиях, при которых функционируют подшипники качения и зубчатые передачи, жёсткость смазанного точечного контакта значительно ниже жёсткости сухого контакта.

**Ключевые слова:** Упругогидродинамическая смазка, точечный контакт, жёсткость, численное моделирование.

**1. Введение.** В общем балансе жёсткостей элементов технических устройств контактная жёсткость, как отмечалось в ряде исследований, посвященных этому вопросу, может составлять значительную долю или даже быть определяющей [1-4]. Среди технических устройств, для расчетного анализа которых данные о контактной жёсткости взаимодействующих тел представляют значительный практический интерес, находятся такие узлы трения как подшипники качения и зубчатые передачи. Контактное взаимодействие упругих тел в этих узлах осуществляется в областях, характерные геометрические размеры которых на много порядков меньше характерных размеров взаимодействующих тел. В связи с этим сосредоточенные контакты при проведении расчётно-теоретических исследований часто моделируются линейными или точечными контактами в зависимости от конфигурации первоначального (до деформации) касания двух несмазанных контактирующих тел. Исходя из подобной идеализации, сосредоточенные контакты в зубчатых передачах и подшипниках качения во многих случаях рассматриваются как точечные. Оценка жёсткости этого контакта осуществляется на основе решения задачи Герца для точечного контакта [5], из которого следует расчётное соотношение, описывающее связь между сближением двух контактирующих упругих тел  $\delta$  и сжимающей их силой  $P$

$$P = (4RE^2 / 9)^{1/2} \delta^{3/2} \quad (1)$$

$$1/R = 1/R_1 + 1/R_2, \quad 1/E = ((1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2)/2$$

здесь  $E_1, E_2$  – модули упругости контактирующих тел;  $E$  – эффективный модуль упругости;  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона упругих тел;  $R_1, R_2$  – радиусы кривизны упругих тел;  $R$  – эффективный радиус кривизны.

Соотношение (1) описывает упругую характеристику сухого точечного контакта, дифференцированием которой можно оценить жёсткость герцевского контакта

$$S_{Hz} = dP/d\delta = 3(4RE^2 / 9)^{1/2} \delta^{1/2} / 2 \quad (2)$$

Аналогично, рассчитав упругую характеристику смазанного точечного контакта, можно оценить жесткость этого контакта  $S_{EHD}$ . В настоящей работе расчёт упругой характеристики смазанного точечного контакта основывался на результатах численного решения упругогидродинамической (УГД) задачи.

**2. Постановка УГД задачи.** Рассматривается задача о смазке точечного УГД контакта (см. рис. 1). В области контакта вводится подвижная система координат, ось  $z$  которой проходит через центры кривизны контактирующих тел, а плоскость  $xu$  совпадает со срединной плоскостью в смазочном слое  $z=0$ . Предполагается, что гладкие поверхности контактирующих тел движутся с линейными скоростями

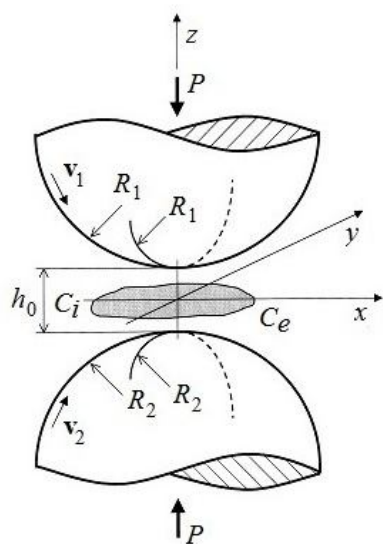


Рис. 1 Схема контакта

$\vec{v}_1(v_{1x}, v_{1y}), \vec{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$ ; смазка, вовлекаемая поверхностями в зазор между ними, обладает свойствами несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости и находится в изотермических условиях; к сосредоточенному контакту упругих тел приложена внешняя стационарная сила  $P$ .

Система уравнений, описывающая течение смазки в изотермическом точечном УГД контакте, выводится с учётом ряда допущений (их обсуждение и вывод уравнений см., например, в [6-8]) из уравнений гидродинамики и теории упругости. Основные допущения заключаются в следующем: толщина слоя смазки существенно меньше радиусов кривизны поверхностей контактирующих тел, локально контактирующие тела заменяются полупространствами, динамические эффекты в телах пренебрежимо малы (выполняется условие квазистатичности деформации), инерционные и объёмные силы по сравнению с силами

вязкого трения и давления в смазке пренебрежимо малы, течение масляного слоя рассматривается как ламинарное, соблюдаются условия прилипания жидкости к поверхности. Зависимость вязкости смазки от давления полагается известной. Известными являются физические свойства упругих тел. Система УГД уравнений замыкается краевыми условиями для давления на кривой, ограничивающей рассматриваемый смазочный слой в плане на плоскости  $xu$ . Причем часть границы области контакта – входная – задается; остальная часть границы – выходная (свободная), отделяющая область смазки от кавитационной, – определяется в процессе решения задачи.

Для системы уравнений, описывающих точечный УГД контакт, вводятся следующие безразмерные переменные

$$(x', y', \xi', \eta') = (x, y, \xi, \eta) / a_H, \quad p' = p / p_H, \quad h' = h / h_0, \quad \mu' = \mu / \mu_0, \quad H_0 = 2Rh_0 / a_H^2$$

$$V = 24\mu_0 |\vec{v}_1 + \vec{v}_2| R^2 / p_H a_H^3, \quad Q_0' = Q_0 p_H, \quad P' = P / p_H a_H^2, \quad \vec{v} = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) / |\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$$

здесь  $x, y, \xi, \eta$  - декартовы координаты;  $p$  – давление;  $h$  – толщина смазочного слоя (зазор);  $h_0$  – зазор в центре контакта;  $\mu$  - вязкость смазки;  $\mu_0$  - вязкость смазки при давлении окружающей среды;  $a_H$  – радиус герцевского точечного контакта;  $p_H$  – максимальное герцевское давление;  $H_0$  - безразмерная толщина смазочного слоя в центре контакта;  $V$  - нагрузочно-скоростной параметр;  $Q_0$  – пьезокоэффициент вязкости смазки. Значения  $a_H$  и  $p_H$  оцениваются по формулам для несмазанного точечного контакта

$$p_H = (3PE^2 / (2\pi^3 R^2))^{1/3}, \quad a_H = (3PR / (2E))^{1/3}, \quad a_H / p_H = \pi R / E \quad (3)$$

Система уравнений в безразмерной форме имеет следующий вид (штрихи далее опущены)

$$L(p) = \nabla \cdot \left( H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \vec{v} h \right) = 0 \quad (4)$$

$$h(x, y) = 1 + \frac{x^2 + y^2}{H_0} + \frac{4}{\pi^2 H_0} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5)$$

$$M(p) = \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{2}{3} \pi \quad (6)$$

$$p|_C = \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{C_e} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \vec{v} = (v_x, v_y), \quad \mu = \mu(p)$$

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

здесь  $\Omega$  - область контакта;  $C$  - граница области контакта;  $C_e$  - выходная граница области контакта  $C_e = C \setminus C_i$ , где  $C_i$  - входная граница.

Нелинейная интегродифференциальная система уравнений (4)-(7) включает уравнение Рейнольдса (4), уравнение для определения толщины смазочной плёнки между упругими телами (5), условие равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта (6) и краевые условия для давления (7). В процессе решения системы уравнений определяются распределения давления, толщины смазочной плёнки в зоне контакта, а также выходная граница.

Решение задачи должно удовлетворять граничным условиям для давления (см. (7)) на входной части границы области контакта  $C_i$ , которая задана, и на заранее неизвестной границе выхода  $C_e$ ,  $C = C_i \cup C_e$ . Входная и выходная границы определяются следующим образом

$$\begin{aligned} C_i \text{ задано,} & \text{ если } (\vec{Q} \cdot \vec{n})|_{C_i} < 0 \\ (\nabla p \cdot \vec{n})|_{C_e} &= 0, \text{ если } (\vec{Q} \cdot \vec{n})|_{C_e} \geq 0 \\ \vec{Q} &= \vec{v} h - H_0^2 h^3 \nabla p / (\mu V) \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\vec{Q}$  - вектор плотности потока жидкости,  $\vec{n}$  - единичный вектор внешней нормали.

Выходная граница  $C_e$  отделяет зону смазки, где  $p > 0$ , от кавитационной, где полагается  $p = 0$ . Граничное условие для давления на свободной границе  $(\nabla p \cdot \vec{n})|_{C_e} = 0$ , известное как условие Рейнольдса (кавитационное), удовлетворяет требованию сплошности течения смазки и применяется для решения различных задач контактной гидродинамики [6-8].

В настоящей работе определение расположения выходной границы  $C_e$  основано на принципе дополненности, согласно которому, если  $(\vec{Q} \cdot \vec{n})|_{C_e} \geq 0$

$$\begin{aligned} L(p) &= 0, \quad p > 0 \text{ в зоне смазки} \\ p &= 0, \quad L(p) < 0 \text{ в зоне кавитации} \end{aligned} \quad (9)$$

Обоснование применимости для решения задач об УГД контакте условий дополнительности подробно изложено в работах [9, 10]. В работе [11] отмечалось, что при использовании этого подхода удовлетворяется кавитационное условие на  $C_e$ .

В системе уравнений и неравенств (4)-(9) заданными считаются входная граница  $C_i$ , нагрузочно-скоростной параметр  $V$  (для тяжело нагруженного контакта  $V \ll 1, Q_0 \gg 1$ ), вектор скорости  $\vec{v}(v_x, v_y)$ , зависимость вязкости от давления  $\mu = \mu_0 \exp(Q_0 p)$  с задаваемым пьезокоэффициентом вязкости смазки  $Q_0$ . Решение задачи представляется распределениями давления  $p(x, y)$  и зазора  $h(x, y)$ , расположением выходной границе  $x_e(y)$ , безразмерной толщиной смазочной пленки  $H_0$  в центре контакта.

По результатам решения УГД задачи для ряда значений нагрузочно-скоростного параметра  $V$  определяется зависимость  $\delta'(V)$ , где  $\delta' = \delta/h_0$  – безразмерные значения сближения контактирующих тел в центре УГД контакта. Значения  $\delta'$  оцениваются по упругой деформации в центре контакта, исходя из следующего выражения

$$\delta' = \frac{4}{\pi^2 H_0} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad (10)$$

Переход к размерным значениям нагрузки  $P$  осуществляется, исходя из выражения для нагрузочно-скоростного параметра  $V$  с учетом формул для герцевского контакта относительно  $a_H$  и  $p_H$ , согласно следующему соотношению

$$P = (A/V)^{3/4} \quad (11)$$

в котором коэффициент  $A$  имеет вид

$$A = (2^{13}/3)^{1/3} \pi \mu_0 |\vec{v}_1 + \vec{v}_2| (R^5 E)^{1/3}$$

Размерные значения сближения контактирующих тел оцениваются с учётом значений  $\delta'$  и  $h_0 = a_H^2 H_0 / 2R$ , т.е.

$$\delta = \delta' h_0 \quad (12)$$

Таким образом, решив УГД задачу для ряда значений параметра  $V$ , получаем упругую характеристику  $P(\delta)$  точечного смазанного контакта, на основе которой численным дифференцированием оценивается контактная жёсткость  $S_{EHD}$ .

**3. Численный метод решения УГД задачи.** Расчётная область, включающая область контакта  $\Omega$ , где  $p > 0$ , и кавитационную область, где  $p = 0$ , в плоскости  $xu$  задается в виде прямоугольника  $\{x, y : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$  и покрывается неравномерной разнесенной декартовой сеткой с системой узлов  $(x_i, y_j), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ . Давление определяется в узлах  $(x_i, y_j)$ , толщина смазочной пленки – в узлах  $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ . После интегрирования уравнения (4) по области  $\Delta\Omega_{ij}$ , занимаемой расчетной ячейкой  $(i, j)$  внутри контура  $(l_{ij})$ , получаем

$$L_1(p) = \int_{(l_{ij})} \left[ H_0^2 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \cdot \vec{n}) - V(\vec{v} \cdot \vec{n})h \right] dl = 0 \quad (13)$$

В условиях дополненности (9) оператор  $L(p)$  заменяется на  $L_1(p)$ .

Алгоритм решения системы уравнений и неравенств, описывающих УГД контакт, основан на методе Ньютона. Уравнения (5), (6), (13), линеаризованные около решения  $(p(x, y), H_0)_k$ , где  $k$  - номер итерации, используются для построения конечноразностной схемы, при этом система разностных уравнений, решаемых относительно приращений  $\Delta p_{k+1} = p_{k+1} - p_k$ ,  $\Delta H_{0,k+1} = H_{0,k+1} - H_{0,k}$  на каждом итерационном шаге, имеет следующую структуру

$$\begin{pmatrix} (a_{qr})_{mm} & (b_q)_m \\ (c_r)_m^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta p_r)_m \\ \Delta H_0 \end{pmatrix} \Big|_k = - \begin{pmatrix} (L_1(p_r))_m \\ M(p_r) \end{pmatrix} \Big|_k \quad (14)$$

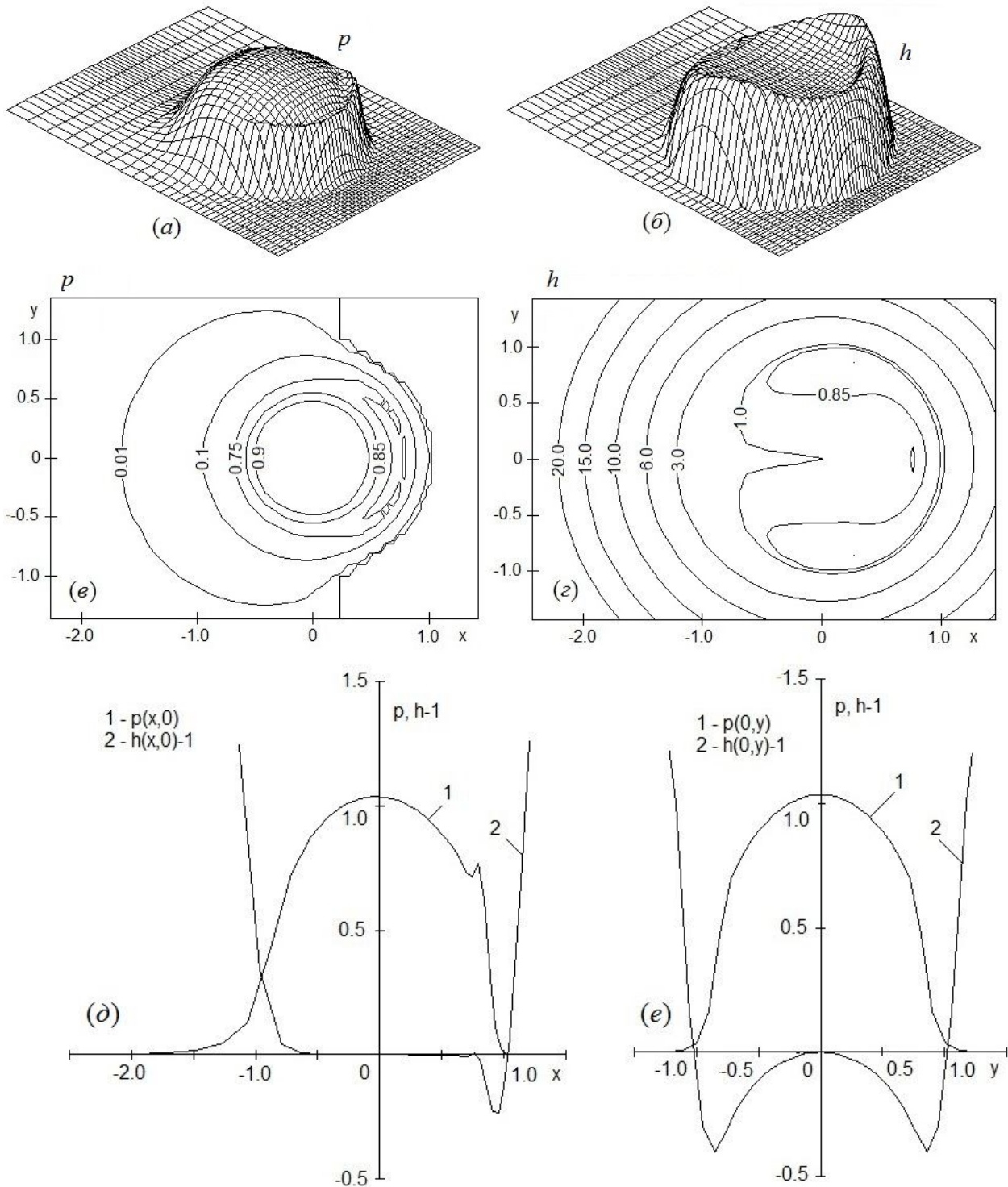
где элементами матрицы Якоби порядка  $(m+1)$  являются полная квадратная матрица  $(a_{qr})_{mm}$  порядка  $m$ , вектор-столбец  $(b_q)_m$  и вектор-строка  $(c_r)_m^T$  ( $q, r = 1, \dots, m$ ). Значение  $m$  равно числу узлов сетки, в которых определяется давление, и зависит от местоположения выходной границы.

Один шаг итерационного процесса состоит в решении разностных уравнений относительно  $\Delta H_{0,k+1}$ ,  $\Delta p_{k+1}(x_i, y_j)$  методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента, вычислении  $H_{0,k+1} = H_{0,k} + \Delta H_{0,k+1}$ ,  $p_{k+1} = p_k + \Delta p_{k+1}$ , вычислении  $h_{k+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$  по соотношению (5) и определении выходной границы  $x_{e,k+1}(y_j)$ . Интеграл в выражении (5) вычислялся по кубатурной формуле для сингулярных интегралов [12].

Проверка условий дополненности (9) осуществляется в каждом узле расчётной сетки после решения уравнения Рейнольдса. Узлы некавитирующей области, которые не удовлетворяют условию  $p > 0$ , помещаются в область кавитации, а узлы области кавитации, в которых нарушается условие  $L(p) < 0$ , помещаются в некавитирующую область. Процедура решения уравнения Рейнольдса и проверки принадлежности узлов кавитирующей и некавитирующей областям осуществляется в итерационном цикле. Итерационный процесс продолжался до достижения требуемой относительной точности решения  $\varepsilon$ , т.е.  $\max(|H_{0,k+1}/H_{0,k} - 1|, |p_{k+1}/p_k - 1|, |h_{k+1}/h_k - 1|, |x_{e,k+1}/x_{e,k} - 1|) < \varepsilon$ .

**4. Результаты расчётов.** Изложенный выше вычислительный алгоритм был применен для расчёта тяжело нагруженного точечного УГД контакта двух упругих тел, поверхности которых в окрестности точки касания описываются сферическими поверхностями, при наличии в зоне контакта смазочной плёнки со свойствами несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости. Вектор скорости качения задавался вдоль оси  $x$ , т.е. имел компоненты  $v_x=1$ ,  $v_y=0$ . Численное моделирование осуществлялось на сетке  $40 \times 40$ . С целью получения упругой характеристики контакта, по которой затем определяется жёсткость УГД контакта, задача решалась для ряда значений нагрузочно-скоростного параметра  $V$ . В расчётах  $V=0.01-0.4$ ,  $Q_0=5$  (значения  $V$ ,  $Q_0$  соответствуют условиям тяжелого нагружения). В расчетах относительная точность задавалась, равной  $\varepsilon=0.001$ . Дальнейшее уменьшение  $\varepsilon$  (до  $\varepsilon=0.00001$  в ряде предварительных расчётов) практически не влияло на значения вычисляемых величин, существенно увеличивая при этом время счёта.

Для каждого значения параметра  $V$  были получены в безразмерном виде распределения давления, толщины смазочной плёнки, значения толщины плёнки в центре контакта и расположение выходной (свободной) границы. На рис. 2 типичные распределения давления и зазора, соответствующие параметру  $V=0.1$ , представлены в

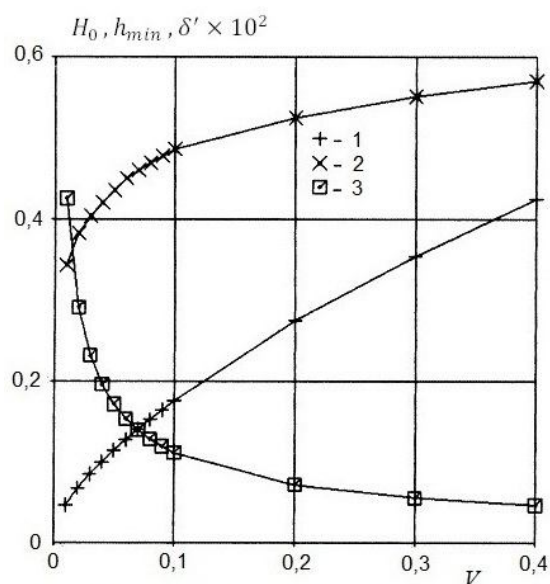


**Рис. 2** Распределения давления и толщины смазочной плёнки в зоне контакта

виде: поверхностей (рис. 2 а, б), изолиний (рис. 2 в, г), графиков в плоскостях сечений  $y=0$  и  $x=0$  (рис. 2 д, е). На рис. 2 б распределение зазора  $h(x,y)$  для наглядности показано как  $-h(x,y)$ . На рис. 2 д, е кривая 1 относится к распределению давления, кривая 2 – к распределению зазора. Представленные распределения демонстрируют характерные

особенности распределений давления и зазора в точечном тяжело нагруженном УГД контакте: уплощение зазора в герцевской области, образование пиков давления и уменьшение зазора в окрестности выходной границы смазочной плёнки, расположение выходной границы.

Исходя из полученных решений УГД задачи, была определена зависимость  $\delta'(V)$  в безразмерном виде. Эта характеристика, а также изменение толщины пленки в центре

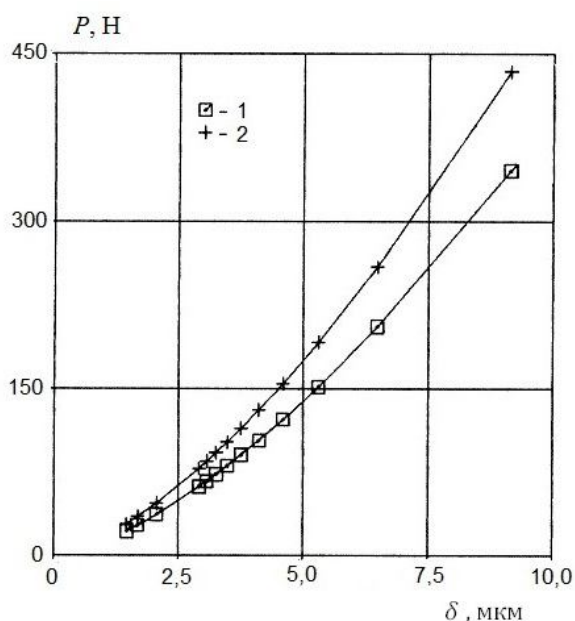


**Рис. 3** Изменение безразмерных значений толщины смазочной плёнки в центре контакта (1), минимальной тошины плёнки (2), сближения упругих тел (3) в зависимости от нагрузочно-скоростного параметра

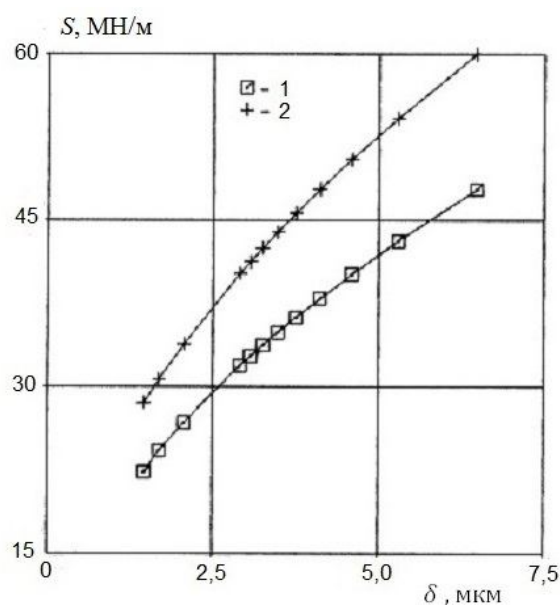
контакта  $H_0$  и минимальной толщины плёнки  $h_{min}$  в зависимости от параметра  $V$  представлены на рис. 3, на котором обозначения соответствуют: (1) –  $H_0(V)$ , (2) –  $h_{min}(V)$ , (3) –  $\delta'(V)$ . Падающий характер зависимости  $\delta'(V)$  объясним тем, что внешняя нагрузка приблизительно обратно пропорциональна параметру  $V$  (см. (11)).

С учётом приведенных выше соотношений (3), (11), (12), задавшись при этом конкретными значениями  $\mu_0, E_1, E_2, v_1, v_2, R_1, R_2, v_1, v_2$ , можно на основе  $\delta'(V)$  определить упругую характеристику контакта в размерных величинах  $P(\delta)$ . В качестве примера на рис. 4 представлены упругие характеристики точечных УГД и герцевского контактов, полученные для следующих значений:  $R=0.01$  м,  $E_1=E_2=2.1 \times 10^{11}$  Па,  $v_1=v_2=0.33$ ,  $v_1=v_2=1$  м/с,  $\mu_0=0.1$  Па·с. На рис. 4 видно, что для обоих контактов упругие характеристики нелинейны и по типу зависимости  $P(\delta)$  относятся к жёстким характеристикам.

Характеристика герцевского контакта располагается выше характеристики УГД контакта, при этом расслоение кривых увеличивается с ростом сближения. Поскольку значение жёсткости равно тангенсу угла наклона касательной к характеристике, то из представленных на этом рисунке характеристик следует, что жёсткость сухого контакта выше жёсткости УГД контакта.



**Рис. 4** Упругие характеристики упругогиродинамического (1) и герцевского (2) контактов



**Рис. 5** Жёсткость упругогиродинамического (1) и герцевского (2) контактов в зависимости от сближения

Определяя значения жёсткости УГД контакта путем численного дифференцирования его упругой характеристики, получаем зависимость  $S_{EHD}(\delta)$ , представленную рис. 5. На рис. 5 показана также зависимость  $S_{Hz}(\delta)$ , рассчитанная по формуле (2). Из данных, представленных на рис. 5, следует, что значения жёсткости герцевского контакта заметно превышают значения жёсткости УГД контакта. Полагая, что давление в центре контакта 1 ГПа (что весьма типично для зубчатых передач) получаем сближение 3 мкм. Из этого следует, что расхождение в жёсткостях (см. рис. 5) может составить около 20%. Очевидно, что для других исходных значений  $R_i$ ,  $E_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\mu_0$  упругие характеристики  $P(\delta)$  и соответственно зависимости  $S_{EHD}(\delta)$ ,  $S_{Hz}(\delta)$  будут иметь другие численные значения, но при этом наблюдаемые закономерности сохранятся. Таким образом, по имеющейся расчетной зависимости  $\delta'(V)$  (см. рис. 3, кривая 3) можно оценить жёсткость точечного УГД контакта в широком диапазоне изменения его параметров с целью использования этой информации в последующем расчёте, в частности, таких узлов трения как подшипники качения и зубчатые передачи.

**5. Выводы.** Описана методика оценки жёсткости смазанного точечного контакта по результатам численного решения упругогидродинамической задачи. Проведено численное моделирование точечного УГД контакта в широком диапазоне изменения нагрузочно-скоростного параметра с целью определения упругой характеристики контакта и его жёсткости. Показано, что для условий функционирования подшипников качения и зубчатых передач значения жёсткости несмазанного точечного контакта, оцениваемые по формулам решения герцевской задачи, заметно превышают значения жёсткости УГД контакта.

### Список литературы

1. **Рыжов Э.В.** Контактная жесткость деталей машин. М.: Машиностроение, 1966. 197 с.
2. **Левина З.М., Решетов Д.Н.** Контактная жесткость машин. М.: Машиностроение, 1971. 264 с.
3. **Айрапетов Э.Л., Генкин М.Д.** Деформативность планетарных механизмов. М.: Наука, 1973. 213 с.
4. **Rivin E.I.** Stiffness and Damping in Mechanical Design. New York: Marcel Dekker, 1999. 512 p.
5. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
6. **Галахов М.А., Гусятников П.В., Новиков А.П.** Математические модели контактной гидродинамики. М.: Наука, 1985. 296 с.
7. **Коднир Д.С.** Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 304 с.
8. **Dowson D., Higginson G.R.** Elasto-hydrodynamic lubrication. Oxford: Pergamon Press, 1966. 235 p.
9. **Kostreva M.M.** Elasto-hydrodynamic lubrication: a nonlinear complementarity problem // Intern. J. Numer. Methods in Fluids. 1984. V. 4. № 4. P. 377-397.
10. **Oh K.P.** The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // Trans. ASME. J. Tribol. 1984. V. 106. № 1. P. 88-95.
11. **Oh K.P., Li C.H., Goenka P.K.** Elasto-hydrodynamic lubrication of piston skirts // Trans. ASME. J. Tribol. 1987. V. 109. № 2. P. 356-365.
12. **Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.