УДК 534.1

В.Ш. Бурд, В.Л. Крупенин

# Субгармонические резонансные колебания ударного осциллятора при полигармоническом возмущении

**Аннотация.** Рассматривается движение демпфированного ударного осциллятора под действием полигармонической силы. Исследованы условия существования и устойчивости периодических резонансных режимов.

переменные импульс-фаза, периодическая функция Грина, метод усреднения, резонансные периодические режимы.

## 1. Введение

Представления виброударных процессов через интегралы движения виброударной системы с одной степенью свободы и (или) их однозначных функций диктуется физикой виброударных систем. Соответствующие переменные (импульс - фаза) весьма естественны для колебательных процессов, сопровождающихся ударами. Импульс может трактоваться как силовая характеристика удара, фаза - как момент соударения.

При этом в случае мгновенного удара представления периодических виброударных процессов могут быть записаны через так называемые периодические функции Грина, определяемые только линейной частью системы. Периодические функции Грина фигурируют ниже либо в виде рядов Фурье, либо конечных соотношений на интервалах периодичности. Это обстоятельство очень важно: с одной стороны сила удара представима через $\delta$-функцию Дирака и величины, зависящие от импульса и фазы удара, а с другой стороны именно упомянутые периодические функции Грина вычисляются посредством хорошо известных методов [1]. Такой подход был предложен В.И. Бабицким и М.З. Коловским [2].

Наша цель - дать корректное описание резонансных режимов движения в виброударных системах с одной степенью свободы.

Мы исследуем движение консервативного ударного осциллятора с одной степенью свободы под действием малого полигармонического возбуждения.

Эта задача сводится к исследованию двумерной системы с быстро вращающейся фазой и разрывами по фазе.

Периодические возмущения гладких двумерных систем с быстро вращающейся фазой были изучены в [3].

## 2. Консервативный ударный осциллятор

Для дальнейшего кратко опишем невозмущенный ударный осциллятор. Детальное изложение содержится в книге [1].

Рассмотрим линейную колебательную систему с уравнением движения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0,$$

описывающую гармонические колебания тела единичной массы, укрепленного на пружине с жесткостью $\Omega^2$. Фазовый портрет системы - эллипсы

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \Omega^2 x^2) = E = const.$$

Установим в точке $x = \Delta$ неподвижный ограничитель и будем предполагать, что по достижении координатой $x$ значения $\Delta$ в системе происходит мгновенный упругий удар, так что если $x = \Delta$ в момент времени $t_\alpha$, то выполняется соотношение

$$\dot{x}(t_\alpha - 0) = -\dot{x}(t_\alpha + 0). \tag{1}$$

При наличии зазора, когда $\Delta > 0$, эллипсы, соответствующие линейной системе, “разрезаются"вертикальной прямой $x = \Delta$ и истинным траекториям соответствуют их левые части. Если уровень энергии в линейной системе недостаточен для выхода на уровень $x = \Delta$, происходят линейные колебания с частотой $\Omega$. При наличии соударений частота колебаний $\omega > \Omega$ и с увеличением энергии возрастает, но не может быть больше значения $2\Omega$, так что

$$\Omega < \omega < 2\Omega, \quad \Delta > 0. \tag{2}$$

При натяге $\Delta < 0$ частота колебаний $\omega$ удовлетворяет неравенству

$$2\Omega < \omega < \infty, \quad \Delta < 0. \tag{3}$$

При $\Delta = 0$ получаем эллипс, “разрезанный"точно пополам. Поэтому для всех значений энергии изображающая точка проходит любую фазовую траекторию за одно и то же время с удвоенной скоростью $2\Omega$, так что

$$\omega = 2\Omega, \quad \Delta = 0. \tag{4}$$

Условие (1) говорит о том, что изменение импульса $\Phi_0$ в окрестности момента удара $t_\alpha$ имеет вид

$$J = \dot{x}_- - \dot{x}_+ = 2\dot{x}_-, \quad \dot{x}_- > 0,$$

где $\dot{x}_\alpha = \dot{x}(t_\alpha \mp 0)$.

Результирующая сила оказывается локализованной при $t = t_\alpha$. Поэтому

$$\Phi_0 \left|_{t=t_\alpha} = J\delta(t - t_\alpha) \right. \tag{5}$$

причем

$$\int\limits_{t_\alpha-0}^{t_\alpha+0} \Phi_0 dt = J.$$

Удары происходят периодически, когда $t_\alpha = t_0 + \alpha T$, где $\alpha$ - целое число, а $T$ - период между ударами, вычисляемый при помощи равенства $T = 2\pi\omega^{-1}$ и (1)-(4). Поэтому при $\infty < t < \infty$ получаем $T$-периодическое продолжение (5)

$$\Phi_0 = J\delta_T(t - t_0),$$

где $\delta_T(t)$ - $T$ - периодическая $\delta$-функция.

Под решением уравнения

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0 \tag{6}$$

можно понимать $T$-периодическую функцию $x(t)$, которая, будучи подставленной в это уравнение, обращает его в верное (в смысле теории обобщенных функций) равенство вида

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + J\delta_T(t - t_0) = 0,$$

где $t_0$ - произвольная постоянная, и для всех $\alpha = 0, \pm 1, \ldots$

$$x(t_0 + \alpha T) = \Delta, \quad J = 2\dot{x}_-(t_0 + \alpha T).$$

При этом выполняются ограничения

$$x(t) \le \Delta, \quad \dot{x}_- > 0.$$

а периоды колебаний в зависимости от знака $\Delta$ соответствуют частотным диапазонам (2)-(4).

Для аналитического описания решения положим $t_0 = 0$. Тогда при $0 \le t < T_0$ решение уравнения (6) имеет вид

$$x(t) = -J\kappa[\omega_0(J)(t-t_0), \omega_0(J)], \quad \kappa(t,\omega_0) = \tfrac{1}{2\Omega}\tfrac{\cos[\Omega(t-T_0/2)]}{\sin(\Omega T_0/2)} = \tfrac{\omega_0}{2\pi\Omega^2} + \tfrac{\omega_0}{\pi}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{\cos k\omega_0 t}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2}, \quad J(\omega_0) = -2\Omega\Delta\tan\tfrac{\Omega T_0}{2}, \quad J \ge 0,$$

причем третье соотношение определяет здесь при $\Delta \ne 0$ гладкую зависимость $\omega_0(J)$, а при $\Delta = 0$ получаем $\omega_0 = 2\Omega$.

Найденное представление следует продолжить по периодичности. Получим

$$\kappa(t,\omega_0) = \frac{\omega_0}{2\pi\Omega^2} + \frac{\omega_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\omega_0 t}{\Omega^2 - k^2\omega_0^2}.$$

Геометрические условия удара приводят к частотным интервалам (2)-(4). Отметим, что в случае $\Delta = 0$, решение $x(t)$ при $0 \le t < \pi/\Omega$ имеет вид

$$x(t) = -\frac{J}{2\Omega}\sin\Omega t,$$

причем $J$ - произвольная постоянная, не зависящая от частоты.

## 3. Возмущенный ударный осциллятор

Рассмотрим теперь возмущенный ударный осциллятор

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \Phi_0(x,\dot{x}) = \varepsilon[f(t) - \gamma\dot{x}], \tag{7}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $f(t)$ - периодическая функция, определяемая формулой

$$f(t) = \sum_{k=1}^{L} a_k \sin(\nu t + \beta_k),$$

$\gamma > 0$, $a_k$, $\nu$, $\beta_k$ - вещественные постоянные.

Положим $\psi = \omega_0 t$ и от уравнения (7) перейдем к системе в переменных $J, \psi$ (импульс-фаза) с помощью замены

$$\begin{array}{l} x = -J\kappa[\psi, \omega_0(J)], \\ \dot{x} = -J\omega_0(J)\kappa_\psi[\psi, \omega_0(J)], \end{array} \tag{8}$$

где

$$\kappa[\psi, \omega_0(J)] = \kappa(\psi, J) = \omega_0(J)^{-1}\left[\frac{1}{2\pi\Omega_0^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\psi}{\Omega_0^2 - k^2}\right], \quad \Omega_0 = \frac{\Omega}{\omega_0(J)}.$$

Из теории рядов Фурье (см., например, [4, гл. 4]) следует, что функция $\kappa[\psi, \omega_0(J)]$ имеет конечные разрывы в точках $\psi = 2l\pi$, где $l$ - целое число, и непрерывна во всех остальных точках. Кроме того, функция $\kappa[\psi, \omega_0(J)]$ дифференцируема во внутренних точках интервалов $[2l\pi, 2(l+1)\pi]$. Ряд Фурье функции $\kappa_\psi[\psi, \omega_0(J)]$ имеет вид

$$\kappa_\psi[\psi, \omega_0(J)] = \omega_0(J)^{-1}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin k\psi}{\Omega_0^2 - k^2}.$$

Следовательно, замена (8) - негладкая; при $\psi = 2l\pi$, где $l$ - целое число, функция $\kappa_\psi$ имеет конечные разрывы, поэтому в новых переменных удары происходят, когда $\psi = 2l\pi$. Производя замену (8), придем к системе (см. [1])

$$\begin{array}{l} \frac{dJ}{dt} = -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\psi, J)]\kappa_\psi(\psi, J), \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_0(J) - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t) + J\omega_0(J)\kappa_\psi(\psi, J)](-J\kappa(\psi, J))_J. \end{array} \tag{9}$$

Получили систему с быстро вращающейся фазой, где правые части периодичны по $\psi$ и имеют конечные разрывы ($\kappa_\psi$) в точках $\psi = 2l\pi$. Зависимости $\omega_0(J)$ имеют вид

$$\begin{array}{l} \omega_0(J) = \frac{\pi\Omega}{\pi - \arctan[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta > 0, \quad \Omega < \omega_0 < 2\Omega, \\ \omega_0(J) = -\frac{\pi\Omega}{\arctan[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta < 0, \quad 2\Omega < \omega_0 < \infty, \\ \omega_0 = 2\Omega = const, \quad \Delta = 0. \end{array}$$

Система (9) - это система с двумя медленными переменными $J, \tau$ и двумя быстрыми переменнными $\psi, t$. Существование и устойчивость стационарных резонансных режимов в таких системах будет исследоваться.

## 4. Вывод усредненных уравнений

Мы используем метод усреднения на бесконечном интервале (см. [3]).

Пусть $J_{pq}$ является решением уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = \frac{q}{p}\nu.$$

где $p$, $q$ - взаимно простые целые числа. Сделав замену $\psi = \varphi + \frac{q}{p}\nu t$ мы преобразуем систему (9) в систему

$$\begin{array}{l} \frac{dJ}{dt} = -4\varepsilon\omega_0(J)[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)]\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0(J) - \frac{q}{p}\nu - 4\varepsilon\omega_0(J)J^{-1}[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)]\times \\ (-J\kappa(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J))_J. \end{array} \qquad (10)$$

Точка $J = J_{pq}$ является резонансной точкой в системе (10).

Предположим, что резонанс невырожденный, т.е.

$$\left.\frac{d\omega_0}{dJ}\right|_{J=J_{pq}} = \omega_0'(J_{pq}) \neq 0. \qquad (11)$$

Исследуем поведение решений системы (10) в $\mu = \sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной точки $J_{pq}$. Выполним замену

$$J = J_{pq} + \mu z$$

и разложим правую часть системы (10) по степеням параметра $\mu$. В результате получим систему

$$\begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = \mu F_0(t,\varphi,J_{pq}) + \mu^2 F_1(t,\varphi,J_{pq})z + O(\mu^3), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \mu\omega_0'(J_{pq})z + \frac{1}{2}\mu^2\omega_0''(J_{pq})z^2 + \mu^2 G_0(t,\varphi,J_{pq}) + O(\mu^3) \end{array} \qquad (12)$$

где

$$F_0(t,\varphi,J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})[f(t) + \gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J + pq)]\times$$
$$\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J_{pq}),$$

$$F_1(t,\varphi,J_{pq}) = -4\frac{d}{dJ}\Big\{\omega_0(J)[f(t) + \gamma J\omega_0(J)\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)]\times$$
$$\left.\kappa_\psi(\varphi + \frac{q}{p}\nu t, J)\Big\}\right|_{J=Jpq}.$$

$$G_0(t,\varphi,J_{pq}) = -4\omega_0(J_{pq})J_{pq}^{-1}[f(t) + \gamma J_{pq}\omega_0(J_{pq})\kappa_\psi(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq})]\times$$
$$(-\kappa(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq}) - J_{pq}\kappa_J(\varphi + \tfrac{q}{p}\nu t, J_{pq}).$$

Система (12) содержит только одну быструю переменную. $t$. Сделав стандартную замену метода усреднения (см. [5]), получим систему

$$\begin{aligned} \tfrac{d\xi}{dt} &= \mu f_0(\eta) + \mu^2 f_1(\eta)\xi + O(\mu^3), \\ \tfrac{d\eta}{dt} &= \mu\omega_0'(J_{pq})\xi + \tfrac{1}{2}\mu^2\omega_0''(J_{pq}))\xi^2 + \mu^2 g_0(\eta) + O(\mu^3), \end{aligned} \tag{13}$$

где $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$, $g_0(\eta)$ определяются как средние значения по $t$ функций $F_0(t,\eta,J_{pq})$, $F_1(t,\eta,J_{pq})$, $G_0(t,\eta,J_{pq})$ соответственно:

$$f_0(\eta) = \tfrac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu} F_0(t,\eta,J_{pq})dt,$$
$$f_1(\eta) = \tfrac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu} F_1(t,\eta,J_{pq})dt,$$
$$g_0(\eta) = \tfrac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu} G_0(t,\eta,J_{pq})dt.$$

## 5. Существование и устойчивость периодических решений

Сформулируем две теоремы о существовании и устойчивости периодических решений в системе (9). Доказательство этих теорем содержится в [5].

**Теорема 1**. *Пусть существует такая постоянная $\eta_0$, что имеет место равенство*

$$f_0(\eta_0) = 0, \quad 0 < \eta_0 < 2\pi$$

*и неравенство*

$$f_{0\eta}(\eta_0) \neq 0.$$

*Пусть выполняется неравенство*

$$\omega_0'(J_{pq})f_{0\eta}(\eta_0) > \sigma_0 > 0, \quad \sigma_0 = const.$$

*Тогда в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной точки $J_{pq}$ для достаточно малых $\varepsilon$ существует единственное неустойчивое периодическое решение системы (9) с периодом $\frac{2\pi p}{\nu}$.*

**Теорема 2**. *Пусть $\eta_0$ удовлетворяет равенству*

$$f_0(\eta_0) = 0$$

*и неравенству*

$$f_{0\eta}(\eta_0) \neq 0.$$

*Пусть выполняется неравенство*

$$\omega_0'(J_{pq}) f_{0\eta}(\eta_0) < \sigma_1 > 0, \quad \sigma_1 = const.$$

*Пусть справедливо неравенство*

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) \neq 0.$$

*Тогда для достаточно малых $\varepsilon$ система (9) имеет единственное периодическое решение с периодом $\frac{2\pi p}{\nu}$ в $\varepsilon$-окрестности резонансной точки $J_{pq}$. Это решение асимптотически устойчиво, если выполняется неравенство*

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) < 0$$

*и неустойчиво, если выполняется неравенство*

$$f_1(\eta_0) + g_{0\eta}(\eta_0) > 0.$$

Теоремы 1 и 2 применимы к изучению резонансных периодических решений в системе (10) с

$$f(t) = \sum_{k=1}^{L} a_k \sin(k\nu t + \beta_k)$$

. Резонансная точка определяется из уравнения

$$\omega_0(J_{pq}) = -\frac{\pi\Omega}{\pi - arctan\frac{J_{pq}}{2\Omega\Delta}} = \frac{q}{p}\nu. \tag{14}$$

Из уравнения (14) следует, что

$$\omega_0'(J_{pq}) > 0.$$

Чтобы вычислить $f_0(\eta)$ нужно усреднить $F_0(t,\eta,J_{pq})$. Первое слагаемое этой функции имеет вид

$$-4\omega_0(J_{pq})\sum_{l=1}^{L} a_l \sin(l\nu t+\beta_l)\kappa_\psi(\eta+\frac{q}{p}\nu t). \tag{15}$$

Так как

$$\kappa_\psi(\eta+\frac{q}{p}\nu t) = -\omega_0(J_{pq})^{-1}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin k(\eta+\frac{q}{p}\nu t)}{\Omega_0^2-k^2}, \quad \Omega_0=\Omega[\omega_0(J_{pq}]^{-1},$$

то мы должны усреднить слагаемые вида

$$a_l\sin(l\nu t+\beta_l)\sin k(\eta+\frac{q}{p}\nu t), \quad l=1,2,\dots,L, \quad k=1,2,\dots.$$

Легко видеть, что среднее значение функции (15) будет ненулевым тогда и только тогда, когда $q=1$, $p=n\,(n=1,2,\dots)$. Для $q=1$, $p=n$ оно равно

$$\sum_{l=1}^{L}\frac{2a_l\nu^2 l}{\pi n(\Omega^2-\nu^2 l^2)}\cos(ln\eta-\beta_l).$$

Среднее значение второго слагаемого

$$-4\gamma J_{pq}\omega_0^2(J_{pq})\chi_\psi(\eta+\frac{q}{p}\nu t)\kappa_\psi(\eta+\frac{q}{p}\nu t)$$

равно

$$-\frac{\gamma J_{pq}}{2}\left(1+\frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{pq}^2}\right).$$

При вычислении среднего значения использовано следующее равенство

$$\sin^{-2}\pi\Omega_0 = 1+4J^{-2}\Omega^2\Delta^2.$$

Следовательно, постоянная $\eta_0$ определяется как решение уравнения

$$\sum_{l=1}^{L}\frac{2a_l\nu^2 l}{(\Omega^2-\nu^2 l^2)}\cos(ln\eta-\beta_l) = \frac{\gamma J_{n1}\pi n}{2}\left(1+\frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{n1}^2}\right). \tag{16}$$

Так как правая часть уравнения (16) стремится к бесконечности при $n\to\infty$, то уравнение (16) может иметь решения только для конечного числа значений $n$.

Отметим, что в том случае, когда точка $J_{n1} = 1/n$ является резонансной, то резонансными точками будут и точки $J_{ln1} = 1/ln$, $l = 2, 3, \dots, L$. Для любой из этих точек среднее значение функции (15) отлично от нуля. Наиболее простое уравнение для определения постоянной $\eta_0$ получается для резонанса $J_{Ln1} = \frac{1}{Ln}$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\cos(Ln\eta - \beta_L) = \frac{\gamma J_{1Ln}\pi n}{4a_L\nu^2 L}(\Omega^2 - \nu^2 L^2)\left(1 + \frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{1Ln}^2}\right) = A_n. \qquad (17)$$

Если уравнение (17) имеет решения для данного значения $n$ ($|A_n| < 1$), то эти решения определяются следующими формулами

$$\eta_{0m} = \frac{\beta_L}{Ln} \pm \frac{\arccos A_n}{Ln} + \frac{2m\pi}{Ln}, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

Вычисляя производную функции $f_0(\eta)$ в точках $\eta_{0m}$, получим

$$f_{0\eta}(\eta_{0m}) = \pm\frac{2a_L\nu^2}{\pi(\Omega^2 - \nu^2 L^2)}\sqrt{1 - A_n^2}, \qquad (18)$$

и, следовательно, (18) имеет положительный знак в $n$ точках и отрицательный знак в $n$ точках.

Простые вычисления аналогичные предыдущим показывают, что

$$f_1(\eta_{0m}) + g_{0\eta}(\eta_{0m}) < 0.$$

Теоремы 1 и 2 приводят к следующему результату.

Если резонансная точка $J_{Ln1}$ является решением уравнения

$$\omega(J_{Ln1}) = \frac{\nu}{Ln},$$

тогда для достаточно малых $\varepsilon$ уравнение (9) имеет $n$ неустойчивых резонансных решений с периодом $\frac{2\pi Ln}{\nu}$ в $\sqrt{\varepsilon}$-окрестности резонансной точки $J_{Ln1}$ и $n$ асимптотически устойчивых резонансных периодических решений с периодом $\frac{2\pi Ln}{\nu}$ в $\varepsilon$-окрестности резонансной точки $J_{Ln1}$.

При $L = 1$ получаем результат из [5]. При $L > 1$ получаются более сложные тригонометрические уравнения для определения резонансных периодических решений.

Кратко остановимся на случае $L = 2$. Предположим, что функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = a_1\sin(\nu t + \beta) + a_2\sin(2\nu t + 2\beta).$$

Если $J_{n1} = 1/n$ - резонансная точка, то резонансной будет и точка $J_{2n1} = 2/n$. Для резонансной точки $J_{2n1}$ справедливы результаты, которые получены выше для резонансной точки $J_{Ln1}$. Для отыскания точки $\eta_0$ соответствующей резонансу $J_{n1} = 1/n$ получим уравнение

$$\frac{2a_1\nu^2}{(\Omega^2-\nu^2)}\cos(n\eta-\beta)+\frac{4a_2\nu^2}{(\Omega^2-4\nu^2)}\cos(2n\eta-2\beta)=\frac{\gamma J_{1n}\pi n}{2}\left(1+\frac{4\Omega^2\Delta^2}{J_{1n}^2}\right).$$

Это уравнение можно записать в виде

$$A\cos^2(n\eta-\beta)+B\cos(n\eta-\beta)+C=0.$$

В постоянную $A$ входит амплитуда $a_2$ второй гармоники, а в $B$ - амплитуда $a_1$ первой гармоники. Если $a_2$ достаточно велика по сравнению с $a_1$, то может существовать две серии периодических решений соответствующих резонансу $J_{n1}$. При малом $a_2$ по сравнению с $a_1$ может существовать одна серия периодических решений.

Отметим, что в [6] в достаточно общем виде исследуется задача об оценке числа нелинейных резонансных периодических режимов в системах общего вида, линейная часть которых задана оператором динамической податливости общего вида.

## Список литературы

1. В.И. Бабицкий, В.Л. Крупенин Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985, 384 с.

2. В.И. Бабицкий, М.З. Коловский К исследованию резонансных режимов в виброударных системах.- Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 4, с. 88–91.

3. V. Burd, Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval. Theory and Applications, 2007, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, 352 p.

4. Г.П. Толстов Ряды Фурье, М: Физматгиз, 1960, 390 с.

5. В.Ш. Бурд, В.Л. Крупенин Резонансные периодические колебания ударного осциллятора, ВНТР, № 10(38), 2010, с.3–11. Электронный журнал, http://www.vntr.ru/.

6. В.Л. Крупенин Об оценке числа периодических режимов движения нелинейных колебательных систем при периодическом полигармоническом возбуждении колебаний, ВНТР, № 4(68), 2013, с.14–19. Электронный журнал, http://www.vntr.ru/.